Pubblicazione bimensile. N. 1-2.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXVIII.° — Fascicoli 1°-2°

2° SEMESTRE.

Comunicazioni pervenute all'Accademia durante le ferie del 1919.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI
1919

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Renpiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili del l'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2 Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 9 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a pagine 4 $^1/_2$.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 30 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta a stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta, pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 50 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 30 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

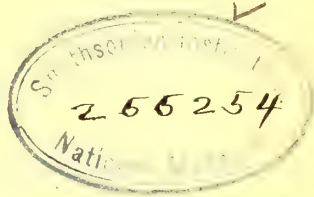
1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVIII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1919.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo)

Biologia vegetale. — *Osservazioni sul fiore dell'Olivo.* Nota preventiva del Socio R. PIROTTA [1].

Le osservazioni da tempo fatte e ripetute mi hanno condotto a stabilire che l'olivo comune (*Olea europaea* L.) è una specie pleomorfa nel riguardo della costituzione del fiore.

L'olivo presenta infatti *tre sorta di fiori*:

a) fiore *prettamente monoclino*, cioè con due stami e un pistillo normali, i primi polliniferi, il secondo ovulifero, che produce frutto e seme;

b) fiore *prettamente staminifero*, cioè con soli stami, polliniferi, ma senza pistillo, quindi senza ovuli, senza frutto e senza seme;

c) fiori *fisiologicamente staminiferi*, cioè coi due stami normali, polliniferi, ma con pistillo non normale, sia perchè lo stimma è più o meno completamente ridotto e senza funzione o manca del tutto; sia perchè l'ovario è più o meno ridotto, non produce ovuli o ne contiene di non normali, o è anche rappresentato da semplice residui.

Queste diverse sorta di fiori si trovano talvolta sopra diverse sorta di individui: cosicchè abbiamo olivi con fiori *monoclini*, e sembra essere il caso più frequente nelle piante coltivate; ed olivi con *fiori staminiferi*, ed è il caso più raro nelle piante coltivate. Tal'altra volta *le due sorta di fiori si trovano sul medesimo individuo*: cosicchè abbiamo olivi con fiori *monoclini*

[1] Pervenuta all'Accademia il 20 luglio 1919.

e staminiferi, ed è caso non molto frequente; ed olivi *con fiori monoclini* e *fiori con pistillo più o meno ridotto* ma sempre manifesto, ed è caso frequente.

Negli oliveti ben tenuti si trovano di regola prevalentemente individui con fiori monoclini; si trovano però anche altri individui, in numero vario, a seconda della cura con la quale si fa la coltivazione, con fiori monoclini e fiori con pistillo più o meno ridotto. Qua e là si riscontrano anche individui con fiori quasi tutti staminiferi.

Gli individui del primo gruppo sono i più fruttiferi, portando ricca mèsse di frutti abboniti; quelli del secondo gruppo sono assai meno fruttiferi, portando di regola pochi frutti perfettamonte normali, spesso frutti mediocri o piccoli; quelli del terzo gruppo sono quasi completamente sterili, perchè o non portano affatto frutti o ne producono pochissimi.

E si comprende allora anche perchè gli olivi con fiori staminiferi siano rari negli oliveti, avendo l'olivicoltore interesse ad eliminare le piante che non producono frutti o ne producono troppo scarsamente.

Mi limito per ora a riportare alcuni esempii tolti dai numerosi dati raccolti da osservazioni ripetute.

A). *Olivo gaetano*, fornitomi dall'egregio e accurato osservatore professor C. Campbell e raccolto a Esperia (Caserta).

Osservazioni del maggio 1918:

Ho potuto esaminare ventitrè abbondanti campioni appartenenti ad altrettanti individui e che si possono riunire in quattro gruppi, perchè erano stati indicati: *fertili; più o meno fertili; più o meno sterili*; *sterili*, secondochè portavano sempre frutti abbondanti e normali, ovvero portavano abbondanti fiori e pochi o pochissimi frutti o lasciavano cadere, si può dire, tutti gli abbondanti fiori senza che rimanessero frutti.

L'esame dei numerosissimi fiori mi ha permesso di constatare che la fertilità e la sterilità di questi olivi era in diretta dipendenza con la costituzione dei fiori. Gli esemplari indicati come sterili hanno tutti i fiori con pistillo ridotto; quelli indicati come più o meno fertili hanno fiori con pistilli in maggioranza normali, e quelli indicati come fertili hanno fiori con pistilli quasi tutti normali.

Riporto alcuni dati numerici delle mie numerose osservazioni.

Individuo sterile. — Esaminate 5 infiorescenze; 67 fiori in totale (14 + 12 + 13 + 13 + 15).

Fiori tutti staminiferi per riduzione completa del pistillo.

Individuo più o meno sterile. — Esaminate 4 infiorescenze; 103 fiori in totale (20 + 24 + 29 + 30):

1ª infiorescenza, 20 fiori:

6 con pistillo quasi normale;

14 » ridotto

2ª infiorescenza, 24 fiori:
7 con pistillo più o meno normale;
5 " in parte ridotto;
12 " ridotto.
3ª infiorescenza, 29 fiori:
7 con pistillo più o meno normale;
4 " in parte ridotto;
12 " ridotto.
4ª infiorescenza, 30 fiori:
7 con pistillo normale;
17 " più o meno ridotto;
6 " ridotto.

Individuo più o meno fertile. — Esaminate 5 infiorescenze; 63 fiori in totale (11 + 13 + 13 + 12 + 14).

1ª infioresenza, 11 fiori:
8 con pistillo normale;
3 " ridotto;
2ª infiorescenza, 13 fiori:
8 con pistillo normale;
5 " ridotto.
3ª infiorescenza, 13 fiori:
8 con pistillo normale;
5 " ridotto.
4ª infiorescenza: 12 fiori
7 con pistillo normale;
5 " ridotto.
5ª infiorescenza, 14 fiori:
6 con pistillo normale;
3 " più o meno ridotto;
5 " ridotto.

Individuo fertile. — Esaminate 5 infiorescenze; 92 fiori in totale (25 + 14 + 19 + 11 + 23).

1ª infiorescenza, 25 fiori:
23 con pistillo normale;
2 " ridotto.
2ª infiorescenza, 15 fiori;
14 con pistillo normale;
1 " ridotto.
3ª infiorescenza, 19 fiori:
6 con pistillo normale;
13 " in parte ridotto.

4ª infiorescenza, 11 fiori:
9 con pistillo normale;
2 » ridotto.

5ª infiorescenza, 23 fiori:
tutti con pistillo normale.

B). *Olivo coltivato in vaso*, che ho potuto esaminare per cortesia del collega B. Grassi.

Maggio 1918. Di 75 fiori esaminati, nessuno ha il pistillo normale; 62 hanno il pistillo molto ridotto, con una lieve sporgenza a punta, rappresentante lo stilo; 13 non hanno che un segno puntiforme al posto del pistillo.

Maggio 1919. I numerosi fiori presi in esame sono quasi tutti staminiferi; alcuni fiori monoclini, con pistillo manifesto ma non normale, si osservano nelle infiorescenze dei rami più alti, e sono accompagnati sempre, sulla stessa infiorescenza, da molti fiori staminiferi.

C). *Altro olivo coltivato in vaso* (come B).

Giugno 1919. In basso prevalgono i rametti e le infiorescenze staminifere, in alto quelle monocline con pistillo talora con stimma verde, normale, impollinabile, tal'altra e più spesso con stimma bruno e non impollinabile. Vi sono rametti completamente staminiferi; altri con fiori, nella stessa infiorescenza, in parte pistilliferi con stimma e pistillo quasi sempre non normale.

Porta, nel luglio, soltanto alcuni frutti.

D). *Olivo maschio* (esemplare illustrato dal prof. C. Campbell) [1], Fine giugno 1919. Esaminati 6 rami.

1° ramo, 14 infiorescenze, delle quali:
7 sono prettamente staminifere;
5 hanno il solo fiore terminale col pistillo più o meno ridotto e lo stilo secco;
1 con alcuni fiori laterali con stilo secco;
1 col fiore terminale con pistillo e stimma di aspetto normale.

2° ramo, 6 infiorescenze (con 12 a 23 fiori):
Di esse, una sola ha il fiore terminale monoclino, ma con ovario piccolo e stimma secco; le altre hanno fiori staminiferi, con pistillo ridottissimo o nullo.

3° ramo, 4 infiorescenze (con 18 a 24 fiori):
Nessuna infiorescenza ha fiori con pistillo; in alcuni fiori soltanto vi è cenno di un ovario ridottissimo.

4° ramo, 7 infiorescenze (con 14 a 26 fiori):
Una sola infiorescenza ha il fiore terminale con un piccolo ovario e stimma bianchiccio; tutti gli altri fiori sono staminiferi.

[1] Campbell C., *L'aborto fiorale dell'Olivo.* Italia agricola, a. XLVIII, n. 16.

5° ramo, 11 infiorescenze (da 19 a 28 fiori):

Due sole infiorescenze hanno il fiore terminale, e un'altra un fiore laterale con stimma verde ma con ovario piccolo; tutti gli altri fiori hanno un residuo secco di stilo soltanto o nessuna traccia di pistillo.

6° ramo, 8 infiorescenze (da 29 a 47 fiori):

Tre infiorescenze hanno o il fiore terminale o uno taterale con stimma verde, ma due soli con ovario pure verde benchè piccolo; le altre hanno qualche fiore con stilo ma gialliccio, e ovario molto ridotto o con residuo secco di stilo; il maggior numero ha fiori prettamente staminiferi.

*
* *

L'olivo comune è una specie del genere *Olea*, che comprende un numero non grande di specie spontanee o selvatiche più o meno bene caratterizzate.

Benchè ancora poche siano le osservazioni accurate sull'argomento che ci interessa, è però certo che nelle diverse specie selvatiche del genere *Olea* non si trova il fiore costruito sempre allo stesso modo, ma si riscontrano sorta diverse di fiori e una differente distribuzione di essi sugli individui delle diverse specie. Basterà, in questo cenno preventivo, ricordare che al genere *Olea* si ascrivono specie con fiori monoclini (es. *O. glandulifera* Wall.), altre con fiori diclini dioici (es. *O. dioica* Rotb., *O. maritima* Wall.); altre ancora con fiori monoclini e staminiferi (es. *O. verrucosa* Link., *O. polygama* Wight).

Credo inoltre opportuno di far rilevare che l'*O. cuspidata* Wall. a fiori tipicamente monoclini ha, secondo le osservazioni da me fatte su un individuo coltivato nell'Orto botanico di Roma, non pochi fiori con pistillo ridotto, cosicchè questi diventano funzionalmente staminiferi. La maggioranza dei rametti dell'unica pianta hanno fiori tutti monoclini, di apparenza normale; alcuni rametti portano infiorescenze con fiori monoclini, altre con fiori monoclini e staminiferi e altre, più rare, con fiori tutti staminiferi.

*
* *

Il genere *Olea* appartiene alla famiglia *Oleacee*, che comprende un numero ristretto di generi, nei quali, pur predominando i fiori monoclini, la costituzione dei fiori e la distribuzione loro nei diversi individui è spesso differente.

Infatti, per fare ora un semplice cenno, limitandomi anche alla serie delle *Oleinee*, le specie del genere *Chionanthus* sono indicate come monocline; quelle dei generi *Ligustrum*, *Linociera*, *Phillyrea*, sono indicate con fiori monoclini e staminiferi; quelle del genere *Osmanthus* con fiori monoclini e staminiferi o con fiori carpelliferi e staminiferi sopra individui differenti.

***

L'olivo si comporta dunque come la selvatica, affinissima *Phillyrea* (¹), perchè, per quanto riguarda la distribuzione dei fiori è anch'esso specie pleomorfa, con individui pleomorfi: e precisamente è specie tipicamente *difitica* perchè nel suo ciclo di sviluppo, nella sua ontogenesi, entrano *due sorta di individui*, un individuo monoclino e un individuo staminifero; ma effettivamente è *trifitica*, perchè, oltre le due sorta tipiche sopraricordate, si riscontrano, e frequentemente, individui con fiori monoclini normali e con fiori monoclini più o meno ridotti, fisiologicamente quindi staminiferi.

Così ancora si può ripetere per l'olivo quanto già dissi per *Phillyrea*, che cioè la forma monoclina è da ritenersi primitiva, la staminifera derivata per graduale continua riduzione del pistillo, perchè anche attualmente si incontrano individui nei quali, insieme coi fiori prettamente monoclini, se ne trovano altri, in numero più o meno piccolo o grande, che presentano tutti i gradi di riduzione del pistillo e delle sue parti fino alla scomparsa totale.

***

L'olivo è ritenuto pianta con fiori monoclini; e quantunque si sapesse che esistono individui poco fruttiferi o quasi infruttiferi, si ritenne e si sostenne che ciò dipendesse da uno stato anormale o patologico, per cui molti o tutti i fiori vengono a cadere, ovvero vanno a male e non possono legare e dar frutto per aborto del pistillo determinato da questo stato patologico.

Era anche noto che vi sono piante di olivo (che si disse appartenere ad una speciale varietà), le quali producono abbondantissimi fiori, ma che dànno pochissimi frutti; e queste piante, in alcuni luoghi, erano e sono ritenute necessarie per la fecondazione degli altri olivi, cosicchè si chiamano perciò *olivi maschi* e se ne pianta qualche individuo nei poderi ulivetati. Ma si disse anche a riguardo di questi olivi che si trattava di un pregiudizio, poichè il fiore dell'olivo è monoclino.

Da quanto è stato più sopra esposto risulta con piena sicurezza la conferma di quanto il prof. C. Campbell (²) ed io (³) abbiamo già affermato, e cioè che il così detto olivo maschio esiste realmente, direi quasi naturalmente, perchè non è altro che l'individuo staminifero che, come ho dimostrato, si ha sempre nel ciclo di sviluppo dell'olivo in relazione e dipendenza della

(¹) Pirotta R. e Ballerini B., *Sulla costituzione e sulla distribuzione dei fiori nella Phillyrea*. Rend. Accad. Lincei ser. 5ª, vol. XXVII, 1° sem., pag. 312 (1918).

(²) Campbell C., *Osservazioni e ricerche sull'Olivo chiamato* « Maschio ». Boll. Soc. Bot. ital. 1910, pag. 5; *Sull'Olivo* « Dekkar » del *Sud Tunisino* ecc. N. Giorn. Bot. ital., N. S. XIX, 1912, pag. 73.

(³) Pirotta R. e De Pergola, *Sull'olivo maschio*. Bull. Soc. Bot. ital., 1913, pag. 124.

normale naturale spontanea costituzione del fiore dell' olivo medesimo e della non meno naturale spontanea distribuzione dei fiori nei diversi individui che compongono la specie olivo.

Questa normale esistenza dell'olivo staminifero, o cosiddetto maschio, è anche confermata da un fatto importantissimo di valore morfologico.

I fiori staminiferi dell'olivo, e anche quelli con pistillo assai ridotto, si distinguono di regola assai bene dai fiori monoclini, cosicchè anche l'individuo che li porta, quando è in fiore, ha nel suo complesso un aspetto differente. Mi limito a ricordare, ora, che le infiorescenze sono più lunghe, giungendo a $^1/_3$ a $^1/_2$ della lunghezza della foglia ascellante o anche quasi raggiungendola (mentre nel fiore monoclino le infioresenze sono brevi o brevissime, $^1/_4$ o meno della foglia ascellante); che le infiorescenze medesime sono più ramificate in basso e tendono quindi meglio ad assumere il carattere cimoso; che i fiori sono più numerosi; che il bottone è più grosso, sferico, più bianco, e il fiore aperto è più grande; che i fiori si distaccano e cadono interi (mentre i monoclini staccano soltanto la corolla con gli stami, lasciando il calice e il pistillo); che gli stami sono più grossi e più ricchi di polline, giallo; che il pistillo manca (e con esso gli ovuli) od è rappresentato da un mucroncino centrale.

Meccanica. — *Sopra alcuni casi singolari nella teoria dei giroscopi asimmetrici pesanti.* Nota I di ORAZIO LAZZARINO, presentata dal Corrisp. R. MARCOLONGO [1].

In una Nota precedente [2], alla quale mi riferisco per la parte bibliografica, trattando l'equivalenza fra le equazioni differenziali di Hess-Schiff e quelle di Euler-Poisson nella teoria dei giroscopi asimmetrici pesanti, ho dimostrato per via intrinseca l'esistenza di due casi eccezionali per i quali l'equivalenza non sussiste.

Lo studio intrinseco di questi due casi è l'oggetto di questa Nota nella quale, utilizzando i risultati dello Stäckel e quelli da me ottenuti, riesco anche a risolvere alcune interessanti questioni che lo Stäckel, per difficoltà insormontabili di calcolo, non riuscì ad affrontare.

Per comodità del lettore credo opportuno riportare quelle formole della precedente Nota che è necessario tener continuamente presenti nello studio attuale.

[1] Pervenuta all'Accademia il 25 giugno 1919.

[2] O. Lazzarino, *Sull'equivalenza fra le equazioni differenziali di Hess-Schiff e quelle di Euler-Poisson nella teoria dei giroscopi asimmetrici pesanti* [Rend. della R. Acc. dei Lincei, 1919, vol. XXVIII, serie 5ª, 1° sem., fasc. 9 e 10, pp. 325 e 341].

Indicando con apici le derivate rispetto al tempo, con α l'omografia d'inerzia del giroscopio rispetto al punto fisso O, con $\boldsymbol{\Omega}$ il vettore della velocità istantanea di rotazione, con $\mathbf{g}$ il vettore $G - O$ del baricentro G e con $\mathbf{k}_1$ un vettore unitario fisso nello spazio, diretto secondo la verticale e rivolto verso l'alto, alle sei equazioni di Euler-Poisson, sotto la nota forma cartesiana, si possono sostituire le due equazioni vettoriali [1]

$$\text{(I)} \qquad (\alpha\boldsymbol{\Omega})' = \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{g}$$

$$\text{(II)} \qquad \mathbf{k}_1' = 0$$

ove, per semplicità di scrittura, si è supposto eguale ad uno il peso del corpo.

Inoltre, gl'invarianti principali S, T, U, introdotti da Hess, assumono rispettivamente la forma

$$\text{(III)} \qquad \mathrm{S} = \mathbf{g} \times \alpha\boldsymbol{\Omega} \quad , \quad 2\mathrm{T} = \boldsymbol{\Omega} \times \alpha\boldsymbol{\Omega} \quad ; \quad 2\mathrm{U} = \alpha\boldsymbol{\Omega} \times \alpha\boldsymbol{\Omega}$$

dove T rappresenta l'energia cinetica del sistema e U il modulo del vettore $\alpha\boldsymbol{\Omega}$ che è il momento rispetto ad O dell'impulso. Le (III) dànno le proiezioni del vettore $\alpha\boldsymbol{\Omega}$ secondo i vettori $\mathbf{g}$, $\boldsymbol{\Omega}$, $\alpha\boldsymbol{\Omega}$ e sono invarianti nel senso che non dipendono da eventuali sistemi di coordinate, pur potendo essere, come effettivamente sono in generale, funzioni del tempo.

Dalle (III), derivando rispetto al tempo e tenendo conto della (I), si ricavano immediatamente le equazioni di Hess sotto la forma

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} a) & \mathrm{S}' = \mathbf{g} \times \alpha\boldsymbol{\Omega}' = \mathbf{g} \times \alpha\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\Omega} \\ b) & \mathrm{T}' = \boldsymbol{\Omega} \times \alpha\boldsymbol{\Omega}' = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{g} \\ c) & \mathrm{U}' = \alpha\boldsymbol{\Omega} \times \alpha\boldsymbol{\Omega}' = \alpha\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{g} \end{cases}$$

In virtù di queste formole, le equazioni di Schiff, che dànno le espressioni del vettore $\mathbf{k}_1$ e delle grandezze S', T', U' in funzione di S, T, U, si scrivono

$$\text{(V)} \qquad (\mathbf{g} \wedge \alpha\boldsymbol{\Omega})^2 . \mathbf{k}_1 = (h - \mathrm{T})(2\mathrm{U}\mathbf{g} - \mathrm{S}.\alpha\boldsymbol{\Omega}) + \\ + k(\mathbf{g}^2.\alpha\boldsymbol{\Omega} - \mathrm{S}.\mathbf{g}) + \mathrm{U}'.\mathbf{g} \wedge \alpha\boldsymbol{\Omega}$$

$$\text{(VI)} \qquad \begin{cases} a) & \mathrm{S}' = \mathbf{g} \times \alpha\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\Omega} \\ b) & (\mathbf{g} \wedge \alpha\boldsymbol{\Omega})^2 . \mathrm{T}' = [\mathrm{S}(h - \mathrm{T}) - k\mathbf{g}^2]\,\mathrm{S}' + [2\mathrm{T}\mathbf{g}^2 - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{g}.\mathrm{S}]\,\mathrm{U}' \\ c) & \mathrm{U}'^2 = \mathbf{g}^2(2\mathrm{U} - k^2) - \mathrm{S}^2 + 2k\mathrm{S}(h - \mathrm{T}) - 2\mathrm{U}(h - \mathrm{T})^2 \end{cases}$$

dove

$$\text{(VII)} \qquad (\mathbf{g} \wedge \alpha\boldsymbol{\Omega})^2 = 2\mathbf{g}^2\mathrm{U} - \mathrm{S}^2$$

[1] In questa Nota si è indicato con $\mathbf{k}_1$ il vettore $\mathbf{k}$ della Nota precedente per non confonderlo col vettore $\mathbf{k}$ della terna fondamentale $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ che interviene in seguito.

e le costanti h, k sono quelle degli integrali

$$\text{(VIII)} \qquad \begin{cases} a) & \mathrm{g} \times \mathrm{k}_1 = h - \mathrm{T} \\ b) & \alpha\Omega \times \mathrm{k}_1 = k \end{cases} .$$

Nella Nota sopra citata si è concluso che « *quando nè l'invariante U* « *nè l'invariante S sono costanti, cioè indipendenti dal tempo, sussiste* « *l'equivalenza fra le equazioni* (I) (II) *di Euler-Poisson e le equazioni* « (V) *e* (VI) ***di Schiff*** ». Quindi i due casi singolari, oggetto del presente lavoro, sono rispettivamente caratterizzati dalle condizioni

$$\mathrm{U} = \text{costante} \quad , \quad \mathrm{S} = \text{costante}.$$

Si è anche dimostrato, e giova qui ricordarlo, che « *se due qualunque* « *dei tre invarianti S, T, U sono costanti, risulta costante anche il terzo* « *ed i moti del giroscopio sono rotazioni permanenti* ».

1. Studio del caso in cui l'invariante principale U è costante. Sia U_0 il valore costante di U; dalla terza delle (III) si ha

$$(1) \qquad (\alpha\Omega)^2 = 2\mathrm{U}_0 = \text{costante}$$

cioè « *il modulo del momento rispetto ad O dell'impulso si mantiene co-* « *stante durante il moto* ». Quindi, tenendo presente l'integrale (VIII_b), si vede che « *la prima curva d'impulso, descritta dal punto* $P = O + \alpha\Omega$, « *è in questo caso una circonferenza contenuta in un piano orizzontale e* « *col centro sulla verticale passante per O* ».

Inoltre, per $\mathrm{U}' = 0$, dalla (IV_c) risulta

$$(2) \qquad \mathrm{g} \wedge \alpha\Omega \times \mathrm{k}_1 = 0$$

cioè « *i due vettori* g *ed* $\alpha\Omega$, *risultando complanari col vettore verti-* « *cale* k_1, *devono mantenersi, durante il moto, in un piano verticale* ».

Vediamo ora come si comportino in questo caso le equazioni (V) e (VI) di Schiff. La (V) dà

$$(\mathrm{V}') \quad (\mathrm{g} \wedge \alpha\Omega)^2 . \mathrm{k}_1 = (h - \mathrm{T})\,(2\mathrm{U}_0\,\mathrm{g} - \mathrm{S} . \alpha\Omega) + k(\mathrm{g}^2 . \alpha\Omega - \mathrm{S} . \mathrm{g})$$

e da qui, tenendo conto delle (III), si deduce per il vettore k_1 l'espressione

$$(\mathrm{V}'') \quad \mathrm{k}_1 = (\mathrm{g} \wedge \alpha\Omega)^{-2} . [(h - \mathrm{T})\,(\alpha\Omega \wedge \mathrm{g}) \wedge \alpha\Omega + k(\mathrm{g} \wedge \alpha\Omega) \wedge \mathrm{g}] .$$

La (VI_a) permette di esprimere il tempo in funzione di S mediante l'integrale abeliano

$$\int [d\mathrm{S} / (\mathrm{g} \wedge \alpha\Omega \times \Omega)]$$

e la (VI_c) porge una relazione algebrica fra S e T, cioè

$$(VI'_c) \qquad g^2(2U_0 - k^2) - S^2 + 2kS(h - T) - 2U_0(h - T)^2 = 0,$$

la quale permette di esprimere S in funzione di T, e viceversa. Ma la (VI_b) dà ora un'equazione che non è indipendente dalle altre, perchè può dedursi dalla (VI'_c). Infatti, tenendo conto della (VII), la (VI_b) dà, per $U' = 0$,

$$(VI'_b) \qquad (2g^2 U_0 - S^2) T' = [S(h - T) - kg^2] S'$$

e ponendo in questa equazione, al posto di g^2, l'espressione

$$g^2 = [S^2 - 2kS(h - T) + 2U_0(h - T)^2] / (2U_0 - k^2)$$

ottenuta dalla (VI'_c), si ricava, dopo qualche semplice riduzione,

$$(3) \qquad [kS - 2U_0(h - T)] T' = [k(h - T) - S] S'.$$

Ora è facile vedere che questa equazione può anche ottenersi direttamente dalla (VI'_c). Derivando, infatti, la (VI'_c) rispetto al tempo, si ha

$$-2SS' + 2k(h - T) S' - 2kST' + 4U_0(h - T) T' = 0$$

da cui, mettendo in evidenza T' ed S', si ottiene precisamente la (3).

Resta così dimostrato che la (VI'_b) è una conseguenza della (VI'_c) e si può quindi concludere che « per U = costante, poichè una delle equazioni « del sistema di Schiff diviene conseguenza delle altre, è necessario per la « equivalenza fra i sistemi di Schiff e di Euler-Poisson trovare una nuova « equazione, indipendente dalle altre, che possa sostituire la (VI_b) ».

Per tale scopo si osserva che, secondo quanto è stato dimostrato nella precitata Nota, quando il solo invariante U è costante sussiste certamente l'equivalenza fra le equazioni di Schiff e quelle di Euler, occorrendo per ciò che solo l'invariante S sia funzione del tempo, ma resta dubbio se dalle (VI) possa dedursi come conseguenza anche la (II) che equivale al noto sistema di Poisson.

Ora è facile vedere che, se alle due equazioni

$$(4) \qquad g \times k'_1 = 0 \quad , \quad \alpha\Omega \times k'_1 = 0 \, ,$$

dedotte dalle equazioni (VI) di Schiff (v. l. c.), si associa la condizione

$$(5) \qquad \Omega \times k'_1 = 0 \, ,$$

si ha un sistema che ammette come conseguenza necessaria la (II). Infatti dalle (4) e (5), le quali esprimono che le proiezioni del vettore k'_1, su Ω, g, $\alpha\Omega$ sono tutte nulle, si ha l'equazione

$$\Omega \times g \wedge \alpha\Omega \, . \, k'_1 = 0$$

e da questa, poichè è per ipotesi $S' = \Omega \times g \wedge \alpha\Omega \neq 0$, segue necessariamente $k'_1 = 0$ c. d. d.

Dopo ciò si può dire che « *quando l'invariante U è costante, cioè in-* « *dipendente dal tempo, le equazioni di Euler sono conseguenza delle equa-* « *zioni di Schiff; ma perchè sussistano anche quelle di Poisson è neces-* « *sario e basta associare al sistema di Schiff l'equazione supplementare* (5) « *al posto della* (VI_b) *che in questo caso diviene conseguenza della* (VI_c) ».

Per ottenere l'espressione della (5) in funzione degli invarianti S, T, U si può procedere nel seguente modo: si deriva la (V) rispetto al tempo e, tenendo conto della (VII) e osservando che è $g' = \Omega \wedge g$, si ha

$$(2U_0 g^2 - S^2) k_1' = 2SS' k_1 - T'(2U_0 g - S.\alpha\Omega) + \\ + (h - T)[2U_0.\Omega \wedge g - S'.\alpha\Omega - S.k_1 \wedge g] + \\ + k[g^2.k_1 \wedge g - S'g - S.\Omega \wedge g]$$

dove, poichè per U costante sussiste la (I), si è posto $(\alpha\Omega)' = k_1 \wedge g$.

Moltiplicando ora questa relazione scalarmente per Ω e tenendo conto delle (III), si ricava con qualche riduzione

$$(2U_0 g^2 - S^2)^2 k_1' \times \Omega = \\ = S' \{ [2U_0(h-T) - kS].[g \times \Omega.S - 2g^2 T] - [S(h-T) - kg^2]^2 \}$$

e da qui, nell'ipotesi che sia diverso da zero il coefficiente $2U_0 g^2 - S^2 = (g \wedge \alpha\Omega)^2$ e poichè è $S' \neq 0$, si ha la cercata espressione della (5), cioè

$$(5') \quad [2U_0(h - T) - kS][g \times \Omega.S - 2g^2 T] - [S(h - T) - kg^2]^2 = 0$$

e questa può anche scriversi, tenendo conto delle (III) e delle (VIII), sotto la forma

$$(5'') \quad (\alpha\Omega \wedge g) \times (\alpha\Omega \wedge k_1).(g \wedge \alpha\Omega) \times (\Omega \wedge g) - \\ - [(g \wedge \alpha\Omega) \times (k_1 \wedge g)]^2 = 0$$

dalla quale risulta chiaro che nel caso escluso, $g \wedge \alpha\Omega = 0$, la (5′) si annulla identicamente.

Per vedere ora come l'equazione supplementare (5) non possa essere in generale conseguenza della (VI'_c), basta dimostrare che non lo è in qualche caso particolare.

Consideriamo, ad esempio, il caso di un giroscopio assiale in cui il vettore $g = G - O$ del baricentro sia parallelo ad uno degli assi principali d'inerzia relativi al punto fisso O. Indicando con $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ tre vettori unitari paralleli ai detti assi, con A, B, C i corrispondenti momenti d'inerzia e supponendo

$$(6) \qquad g = G - O = i$$

si ha

$$(7) \qquad S = g \times \alpha\Omega = A.\Omega \times i = A.\Omega \times g$$

da cui

$$\Omega \times \mathrm{g} = \mathrm{S}/\mathrm{A} \tag{8}$$

e quindi la (VI'_c) e la $(5')$ possono rispettivamente scriversi

$$(2\mathrm{U}_0 - k^2) - \mathrm{S}^2 + 2k\mathrm{S}(h - \mathrm{T}) - 2\mathrm{U}_0(h - \mathrm{T})^2 = 0 \tag{9}$$

$$[2\mathrm{U}_0(h - \mathrm{T}) - k\mathrm{S}] . [\mathrm{S}^2 - 2\mathrm{AT}] - \mathrm{A}[\mathrm{S}(h - \mathrm{T}) - k]^2 = 0 . \tag{10}$$

Ora è facile vedere che queste due equazioni, di secondo grado in $(h - \mathrm{T})$, sono tra loro *indipendenti*, comunque si scelgano i valori delle costanti h, k, U_0; basta per questo osservare che la loro risultante è una funzione razionale e intera di ottavo grado in S in cui il coefficiente di S^8 è A^2 cioè una quantità essenzialmente positiva e indipendente dai valori delle dette costanti. Inoltre, poichè le (9) e (10) sono due relazioni indipendenti fra S e T, si ha che gl'invarianti S e T devono essere *costanti* cioè indipendenti dal tempo, qualunque siano i valori delle costanti h, k, U_0. Ricordando poi che se i tre invarianti S, T, U sono costanti le rotazioni del giroscopio devono essere permanenti, si conclude che « *per U costante e per i giroscopi asimmetrici in generale, solo le rotazioni permanenti sono possibili* ».

Un caso particolare di questo teorema fu dimostrato da Hess [1] il quale trovò che « nei giroscopi assiali, per U costante e nell'ipotesi che sia « nulla la costante k dell'integrale delle aree, risulta costante anche l'inva- « riante S ».

Astronomia. — *Osservazioni fotometriche sopra la « Nova Aquilae » e su Giove.* Nota di G. Armellini, presentata dal Corrispondente A. Di Legge [2].

I. — Osservazioni fotometriche sopra la *Nova Aquilae.*

1. La *Nova Aquilae* fu scoperta, da quanto mi risulta, il 7 giugno 1918. Il suo splendore crebbe rapidamente in modo da giungere in pochissimi giorni alla grandezza 0,5 circa; e quindi la stella, con successive oscillazioni, andò lentamente declinando. Le misure fotometriche, che qui riporto, furono da me eseguite nell'Osservatorio della R. Università di Roma, sul Campidoglio, servendomi del fotometro estintore di Toepfer applicato ad un equatoriale di Merz. La costante K del fotometro, cioè il potere estintore

(1) Hess, *Bamberger Programm S. 29-30.* Mathem. Annalen, Bd. 37, S. 166.

(2) Pervenuta all'Accademia il 4 luglio 1919. Correggendo le bozze ho aggiunto le ultime osservazioni.

corrispondente ad una divisione del cuneo, era stato da me precedentemente determinato (1), ottenendo come risultato espresso in grandezze stellari: K = 0,186. Le osservazioni furono compiute estinguendo alternativamente la *Nova* e la stella di confronto, ed il risultato di ogni sera è la media di 20 e più spesso 30 o 40 puntate. Come stella di confronto occorreva scegliere un astro situato prossimamente e di splendore e colore poco differente dalla *Nova*; perciò nella prima parte di queste osservazioni (dal 17 luglio al 12 settembre 1918 incluso) mi sono servito della *β Aquilae*, dal 17 settembre al 13 novembre 1918 della 4 *Aquilae*. Nel presente anno 1919 ho fatto uso simultaneamente della 4 *Aquilae* e della BD + 0 4027. Una serie di osservazioni diretta a controllare la grandezza fotometrica di questa ultima mi ha dato i seguenti risultati:

$$\text{Mag BD} - \text{Mag 4 Aq} = 1{,}37$$

valore poco differente da quello assegnato dal Müller, cioè 1,41.

2. Nella seguente tabella, in cui riporto le osservazioni fotometriche della *Nova*, l'ora è contata dal mezzogiorno medio del meridiano dell'Etna, e si riferisce alla media delle osservazioni della serata; N. P. indica il numero delle puntate, Mag è la grandezza della *Nova* ridotta al zenit correggendola dall'assorbimento atmosferico.

Sarà inutile aggiungere che, per eseguire quest'ultima correzione, ho calcolato le distanze zenitali della *Nova* e della stella di confronto ed ho supposto che l'assorbimento atmosferico a Roma abbia il valore 1,96 rispetto a quello di Potsdam; valore precedentemente determinato nella mia citata Nota. Come grandezze delle due stelle di confronto, *β Aquilae* e 4 *Aquilae*, ho preso rispettivamente i valori 3,82 e 5,11, assegnati dalla Photometrische Durchmusterung di Potsdam (1907): la BD + 0 4027 è stata quindi posta uguale a 6,48.

(1) Cfr. la mia Nota: *Sull'estinzione della luce stellare nell'atmosfera di Roma.* Questi Rendiconti, agosto 1918.

TABELLA I.

DATA	Ora	N. P.	Mag	Colore	*Annotazioni*
1918	h m				
Luglio 17 . . .	10 0	10	3,64	Giallo rossastro	
30 . . .	9 51	10	3,71	Giallo legg. rosso	
31 . . .	9 41	10	3,87	. . .	Cielo ottimo
Agosto 1 . . .	9 43	10	4,14	. . .	
7 . . .	12 28	10	3,87	. . .	
13 . . .	10 57	20	4,70	. . .	Cielo vaporoso
16 . . .	11 7	10	4,08	Giallo chiaro	
19 . . .	11 0	10	4,43	. . .	
20 . . .	10 7	20	4,33	. . .	Luna piena il 21
23 . . .	10 14	20	4,70	. . .	
24 . . .	11 7	20	4,40	. . .	
26 . . .	10 37	20	4,30	. . .	
28 . . .	10 35	20	4,21	. . .	
30 . . .	10 28	20	4,14	. . .	
31 . . .	10 3	20	4,47	. . .	
Settembre 12 . . .	10 31	8	4,44	Giallo chiaro	Cielo vaporoso
17 . . .	11 21	10	5,03	. . .	
20 . . .	7 16	20	5,02	. . .	Luna piena
21 . . .	7 40	20	4,82	. . .	
25 . . .	8 14	20	4,79	. . .	Cielo vaporoso
26 . . .	7 25	20	4,76	. . .	
29 . . .	7 14	20	4,99	. . .	Cielo ottimo
30 . . .	7 45	20	5,05	. . .	» »
Ottobre 1 . . .	7 40	20	5,30	Bianco giallastro	» »
3 . . .	7 37	20	5,34	. . .	» »
7 . . .	7 39	30	5,09	. . .	» »
8 . . .	8 3	20	5,35	. . .	
20 . . .	7 50	10	5,11	. . .	Cielo vaporoso
22 . . .	9 5	20	5,11	. . .	Luna piena il 19
26 . . .	7 12	20	5,33	. . .	Cielo ottimo
Novembre 11 . . .	6 19	30	5,93	Bianco pallido	» »
12 . . .	6 10	30	5,68	. . .	» »
13 . . .	6 12	20	5,47	. . .	Cielo vaporoso
1919					
Giugno 29 . . .	9 56	20	7,10	Bianco pallido tendente al verde	Cielo ottimo
30 . . .	10 55	18	6,94	. . .	Cielo vaporoso
Luglio 3 . . .	9 30	25	6,60	. . .	Cielo ottimo

(*Seguito*)

1919	h m				
Agosto 12 . . .	9 30	20	7,33	. . .	Luna piena 11 ag.
13 . . .	9 15	40	7,33	. . .	Cielo vaporoso
14 . . .	9 5	30	7,41	. . .	
15 . . .	9 50	15	7,35	. . .	
16 . . .	8 55	30	7,33	. . .	Cielo buono
17 . . .	9 10	30	7,48	. . .	
20 . . .	8 50	30	7,30	Bianco giallastro	
21 . . .	8 55	30	7,24	. . .	Cielo buono
22 . . .	8 40	30	7,20	. . .	Cielo vaporoso
24 . . .	8 40	30	7,22	. . .	
27 . . .	9 0	30	7,23	. . .	Cielo vaporoso
28 . . .	8 40	30	7,20	. . .	
29 . . .	9 15	30	7,26	. . .	Cielo buono
30 . . .	8 55	30	7,33	. . .	Cielo vaporoso
Settembre 2 . . .	9 45	30	7,58	. . .	" "
3 . . .	8 25	30	7,66	. . .	Cielo buono
5 . . .	9 10	30	7,69	. . .	" "
7 . . .	8 10	30	7,72	. . .	Cielo vaporoso
9 . . .	9 5	30	7,66	. . .	Luna piena il 10
13 . . .	8 40	30	7,63	. . .	Cielo vaporoso
14 . . .	8 20	20	7,39	. . .	" "
16 . . .	8 40	30	7,33	Giallo chiaro	Cielo buono
17 . . .	9 0	30	7,46	. . .	" "
18 . . .	8 55	30	7 51	. . .	Cielo vaporoso
26 . . .	8 50	30	7,59	. . .	Cielo buono
27 . . .	8 45	30	7,44	. . .	Cielo ottimo
Ottobre 3 . . .	9 5	14	7,45	. . .	Cielo mediocre
6 . . .	8 55	14	7,51	. . .	Cielo ottimo

II. — Osservazioni fotometriche di Giove nell'opposizione del gennaio 1919.

3. Le osservazioni fotometriche dei pianeti sono di grandissima importanza, perchè ci dànno notevoli indicazioni sulla loro natura fisica, e perchè, col confronto di anni differenti, possono essere utili a stabilire eventuali variazioni dello splendore solare. Disgraziatamente le difficoltà che esse presentano, specialmente per i pianeti più luminosi e con notevole diametro apparente (Giove, Venere, Marte) inducono raramente gli astronomi ad occuparsi di queste ricerche.

Il metodo che ho immaginato per Giove, è il seguente. Osservavo il pianeta all'oculare del fotometro, tenendolo fra due stelline artificiali di diametro perfettamente uguali al diametro apparente di Giove; e quindi lo estinguevo *guardando sempre le stelline artificiali* che restavano invariate perchè prodotte da una lampadina situata al di qua del cuneo. Ciò posto esaminavo la stella di confronto (Sirio, *α Aurigae*, ecc.) allontanando però il fotometro dall'obiettivo dell'equatoriale, in modo che essa fosse veduta fuori fuoco, come un dischetto luminoso avente un diametro uguale a quello delle stelline artificiali e quindi a quello di Giove. Poichè l'ingrandimento adoperato era debole, il diametro apparente di Giove risultava assai piccolo; lo sfocamento da darsi alla stella di confronto era quindi molto tenue e perciò essa appariva come un dischetto quasi perfettamente rotondo ed omogeneo. Ciò posto estinguevo la stella di confronto (Sirio ecc.) guardando sempre le stelline artificiali, vale a dire *lasciando invariata l'accomodazione dell'occhio.* Ora ad uguali diametri apparenti di un astro corrispondono uguali superfici illuminate nella retina dell'occhio; e poichè l'accomodazione e la posizione dell'occhio era restata invariata, ne seguiva che i raggi di Giove e quelli della stella di confronto (Sirio, *α Aurigae* ecc.) venivano ad attraversare con grande approssimazione *aree uguali del cuneo estintore.* Ed allora il confronto diveniva possibile come se si trattasse di punti luminosi. Questo metodo, benchè non perfettissimo, mi sembra in pratica più facilmente attuabile di quello proposto dal Müller con l'uso di una sferetta riflettente: cosa che richiede calcoli e prove preliminari.

4. Per diminuire l'inevitabile errore della graduazione del cuneo, sono stato costretto a scegliere come confronto le stelle più luminose, visibili allora nel cielo, e cioè:

1) Sirio	Mag =	—1.2
2) Procione	Mag =	0,72
3) *α Aurigae*	Mag =	0,43
4) *β Geminorum*	Mag =	1.51
5) *α Tauri*	Mag =	1,15

Tutte le grandezze stellari sono tratte dalla *Phot. Durchm*, tranne Sirio per cui ho fatto ricorso all'*Harvard Photometry*, non essendo le stelle australi contenute nella *Durchmusterung*. Una volta anche, astraendo dalla debole e forse incerta variabilità ho fatto uso di (6) *α Orionis* (Mag = 0,94) che tornava particolarmente comoda per la sua posizione in cielo. Le osservazioni furono cominciate il 3 gennaio 1919, cioè il giorno seguente all'opposizione: tralasciando le prime due serate (3 ed 8 gennaio dirette a prendere pratica del metodo) esse sono contenute nella seguente tabella. Disgraziatamente il tempo, spesso nuvoloso, non mi concesse che poche sere di lavoro.

TABELLA II.

DATA	Ora	N.P.	St. Cfr	G	Mag	*Annotazioni*
Gennaio 9	h m 7 10	20	4 . 5	— 2,35	— 2,35	Cielo ottimo
» 11	10 20	15	1	— 2,46	— 2,46	Cielo ottimo
» 12	6 55	20	3 . 4	— 2,39	— 2,39	Cielo ottimo
» 15	10 52	20	2	— 2,08	— 2,09	Luna piena il 16
» 21	7 35	25	2 . 3 . 4	— 2,34	— 2,36	Cielo ottimo
» 30	8 17	25	2 . 4 . 6	— 2,06	— 2,12	Cielo sereno
» 31	8 0	20	4 . 5	— 2,36	— 2,43	Cielo ottimo
Febbraio 2	9 10	25	2 . 4 . 5	— 2,31	— 2,38	Cielo ottimo
» 4	6 16	20	3 . 4	— 2,07	— 2,15	Cielo ottimo

La 4ª colonna ci dà le stelle di confronto adoperate, *G* è la grandezza di Giove risultante dall'osservazione e ridotta al zenit con la correzione atmosferica, Mag indica la grandezza di Giove ridotta all'opposizione media. Per calcolare quest'ultima si è supposto che all'opposizione media le distanze di Giove dal Sole e dalla Terra siano rispettivamente uguali a 5,2028 e 4,2028 e non si è tenuto alcun conto della fase il cui effetto sembra insensibile [1]. La media dei valori della penultima colonna ci dà quindi come grandezza di Giove all'opposizione media:

$$\text{Mag} = -2{,}30$$

valore pochissimo differente da quello trovato dal Müller [2], cioè — 2,23.

Terminando questa Nota mi è grato di ringraziare il ch. prof. A. Di Legge, Direttore dell'Osservatorio, il quale ha gentilmente posto a mia disposizione gli strumenti necessari per l'esecuzione del presente lavoro.

[1] Cfr. Müller, *Die Photometrie der Gestirne*, pag. 382.
[2] Cfr. op. cit., pag. 383.

Fisica. — *Sulla teoria elettronica delle forze elettromagnetiche.* Nota III di ELENA FREDA, presentata dal Socio CORBINO.

§ 5. Si può vedere facilmente che per la maggior parte dei metalli (pei quali come già si è detto non vi è ragione di ammettere che il campo determini una sensibile alterazione di proprietà specifiche), dal fatto che la variazione di resistenza prodotta dal campo **H** e l'effetto Corbino relativo al campo stesso sono molto piccoli, si può dedurre che $\frac{\sigma_0 - K}{\sigma_0}$ ha un valore molto piccolo e che quindi si può ritenere approsimativamente soddisfatta la condizione $\Delta^2 V = 0$.

Poniamo $b_1 = \frac{e^2 N_1 v_1}{\sigma_0}$, $b_2 = \frac{e^2 N_2 v_2}{\sigma_0}$, $\varepsilon = m_1 K_1 - m_2 K_2$, $\gamma = \frac{\varepsilon}{K}$. Secondo la teoria elettronica alla quale finora ci siamo riferiti, l'effetto Corbino, per una data intensità della corrente totale e per date dimensioni del disco, dipende solo da γ; secondo la stessa teoria, il campo magnetico **H** determina un'apparente variazione $\sigma - \sigma_0$ della conducibilità specifica σ_0 che si ha senza il campo; se quest'ultimo non altera le proprietà specifiche del metallo e se il movimento della elettricità avviene perpendicolarmente ad **H**, si ha $\frac{\sigma_0 - \sigma}{\sigma_0} = \frac{\sigma_0 - \frac{K^2 + \varepsilon^2}{K}}{\sigma_0}$ (1). Trascurando le potenze di m_1 ed m_2 dalla quarta in su si ha $\frac{\sigma_0 - \sigma}{\sigma_0} + \gamma^2 = b_1 m_1^2 + b_2 m_2^2$ (2).

Ma, come facilmente si verifica, se si trascurano le potenze di m_1 ed m_2 dalla quarta in su, $b_1 m_1^2 + b_2 m_2^2$ ci dà il valore di $\frac{\sigma_0 - K}{\sigma_0}$; avremo quindi, con la detta approssimazione, $\frac{\sigma_0 - \sigma}{\sigma_0} + \gamma^2 = \frac{\sigma_0 - K}{\sigma_0}$; cioè per un metallo pel quale $\frac{\sigma_0 - \sigma}{\sigma_0}$ e γ^2 siano trascurabili anche $\frac{\sigma_0 - K}{\sigma_0}$ è trascurabile e quindi si può ritenere approssimativamente soddisfatta la condizione $\Delta^2 V = 0$.

Per metalli, come il bismuto, pei quali la variazione di resistenza per effetto del campo e l'effetto Corbino hanno valori più rilevanti, la teoria prevede un $\Delta^2 V$ diverso da zero, e variabile in genere da punto a punto, per ogni distribuzione di correnti permanenti in cui non sia $\frac{\partial j_z}{\partial z} = 0$; più

(1) Freda, Rend. Accad. dei Lincei, 2° sem. 1916, pp. 104 e 142.
(2) Corbino, Rend. Accad. dei Lincei, 1° sem. 1919, pag. 49.

precisamente si ha $\Delta^2 V = \frac{\sigma_0 - K}{\sigma_0 K} \frac{\partial j_z}{\partial z}$. In questo caso non potremo dire che per ogni punto interno al conduttore si ha $e(N_1 - N_2 + N'_1 - N'_2) = 0$. Niente si deve modificare in questo caso di quanto precedentemente si è detto sulle azioni esercitate dagli ioni liberi sulla massa del metallo, ma non possiamo più dare per la risultante delle forze che agiscono sulle cariche fisse contenute nell'unità di volume l'espressione $-e(N_1 - N_2)F$. Dunque pei metalli che si comportano come il bismuto la teoria prevede che vada modificata l'espressione $(j \wedge H)\,dv$, per la forza che agisce sulla massa metallica contenuta nell'elemento di volume dv, quando la distribuzione delle correnti non soddisfi la condizione $\frac{\partial j_z}{\partial z} = 0$. Dobbiamo però osservare che, appunto nei metalli pei quali la variazione di resistenza e l'effetto Corbino sono più rilevanti, sembra si debba ammettere una vera e propria alterazione di proprietà specifiche prodotta dal campo magnetico; se questa alterazione è diversa nelle direzioni che formano angoli differenti con l'asse z, le formule (3) e (4) vanno sostituite con altre già complicate [1] e non è quindi facile dire come si modifichi in realtà l'espressione della forza agente sulla massa contenuta nell'elemento di volume dv.

Nel caso di una lamina disposta trasversalmente nel campo magnetico uniforme H, il movimento della elettricità è determinato dalle prime due delle equazioni (3) [2]; queste equazioni valgono anche se il campo magnetico determina una vera e propria alterazione delle proprietà specifiche del metallo di cui la lamina è costituita: basta in tal caso considerare $N_1 N_2 \tau_1 \tau_2$ come funzioni del valore assoluto di h. Di più, come già si è visto, nel caso in cui una lamina disposta trasversalmente nel campo è percorsa da correnti permanenti si ha rigorosamente $\Delta^2 V = 0$; quindi l'espressione $(j \wedge H)\,dv$ per la forza agente sulla massa metallica contenuta nell'elemento di volume dv vale qualunque sia la natura del metallo. Indichiamo con n la normale, nel piano della lamina, alla direzione l del vettore j; con d e d_n due rette tra loro ortogonali giacenti nel piano della lamina; pur di scegliere convenientemente il senso positivo su d e d_n si avrà $\cos ld = \cos nd_n$ e quindi la componente secondo d_n della forza $(j \wedge H)\,dv$ sarà data da $j_d h\,dv$.

§ 6. Possiamo ora spiegare senz'altro il fatto (cfr. il § 2) che un disco munito al centro ed alla periferia di elettrodi di resistenza trascurabile, posto trasversalmente nel campo magnetico H, è sollecitato a ruotare intorno al proprio asse quando si mandi in esso una corrente permanente. Infatti, siano P e P′ due punti simmetrici rispetto al centro del disco, j_r la

(1) Freda, Rend. Accad. dei Lincei, 2° sem. 1916, pp. 28 e 60.
(2) Corbino, Rend. Accad. dei Lincei, 1° sem. 1915, pag. 213

densità della corrente radiale, tanto in P che in P′; le componenti, normali alla retta PP′, delle forze che agiscono rispettivamente in P e in P′ sulla massa del metallo contenuta nell' unità di volume avranno entrambi, per quanto precedentemente si è detto, il valore assoluto hj_r ma avranno senso opposto. Dunque per due punti qualunque, simmetrici rispetto al centro del disco, abbiamo una coppia che sollecita quest' ultimo a ruotare intorno al suo asse.

Abbiamo supposto finora che i conduttori siano tenuti a temperatura costante, ma si vede facilmente che quanto si è detto precedentemente pel disco vale anche se in questo si lasciano liberamente stabilire delle differenze di temperatura (Come già si è ricordato nel § 2, tali differenze di temperatura non si possono stabilire che nel senso radiale). Osserviamo innanzi tutto che poichè il cerchio, concentrico agli elettrodi, passante per il punto P del disco è una linea equipotenziale, la componente circolare (cioè secondo la tangente al detto cerchio) della forza che in P agisce sulla massa contenuta nell' unità di volume è la somma delle componenti circolari delle quantità di moto che gli ioni positivi e gli ioni negativi contenuti nell'unità di volume cedono coi loro urti, nell'unità di tempo, alla massa del conduttore (La componente circolare della forza elettrica **F**, e quindi la componente circolare della risultante delle forze agenti sulle cariche fisse contenute nell'unità di volume è nulla). Ora, riferendoci a coordinate polari r, θ, tanto se N_1 e N_2 sono costanti quanto se variano con r, la componente circolare della velocità media tra due urti di uno ione positivo è data da $r_1 \overline{\frac{d\theta_1}{dt}} = \frac{e\tau_1 h}{2\mu_1} \overline{\frac{dr_1}{dt}}$; quindi la componente circolare della quantità di moto ceduta, nell'unità di tempo, alla massa metallica dagli N_1 ioni positivi liberi contenuti nell' unità di volume sarà (v. § 3 e § 4): $e N_1 \overline{\frac{dr_1}{dt}} h = j_{1r} h$. Analogo risultato si ha per gli ioni negativi e quindi si trova che la componente circolare della forza che agisce sulla massa metallica contenuta nell'unità di volume è data, per ogni punto del disco, da $j_r h$, tanto se si hanno quanto se non si hanno differenze di temperatura.

Osserviamo che la rotazione del disco intorno al suo asse, pur dipendendo dal fatto che sotto l'azione del campo **H** gli ioni acquistano componenti circolari di velocità, pur dipendendo cioè dall'esistenza dell'effetto Corbino, non dipende, come si è visto, dalla grandezza che questo effetto ha per una data corrente totale.

§ 7. Consideriamo conduttori costituiti da metalli pei quali il campo magnetico determini una sensibile alterazione della distribuzione delle correnti e dei potenziali. Per un conduttore avente forma e dimensioni date, munito di elettrodi aventi forma, dimensioni e posizioni date, attraversato da una corrente di data intensità totale e sottoposto all'azione di un deter-

minato campo magnetico **H**, la distribuzione della densità di corrente, cioè del vettore **j**, dipenderà in genere dalla natura del metallo di cui il conduttore è formato; tale distribuzione muterà, in genere, all'invertire del campo **H**.

Consideriamo la forza risultante ed il momento risultante delle azioni, studiate nei precedenti paragrafi, che gli ioni esercitano sulla massa del metallo. Da quanto precedentemente si è detto, risulta che per due conduttori uguali dal punto di vista geometrico, muniti di elettrodi uguali ed ugualmente disposti, attraversati da uguale corrente totale, ma costituiti da metalli diversi, la detta forza ed il detto momento, corrispondenti ad un dato campo magnetico **H**, non saranno in genere uguali; per un dato conduttore tale forza e tale momento non subiranno, in genere, una semplice inversione all'invertire del campo. (Si potranno avere, in generale, approssimativamente, una risultante e un momento risultante uguali per due conduttori che soddisfino alle condizioni dette ed una semplice inversione della detta risultante e del detto momento risultante all'invertire di **H**, solo adoperando metalli pei quali sia molto piccola l'alterazione della distribuzione delle correnti e dei potenziali che il campo magnetico produce).

La teoria prevede quindi che, limitando opportunamente la libertà di movimento dei conduttori, si possano osservare spostamenti di questi ultimi che non mutano direzione all'invertire di **H**. Sono state effettivamente constatate azioni elettromagnetiche di tale natura [1] ed altre se ne potranno constatare. Per es., è stato osservato che in una lamina rettangolare di bismuto, munita lungo due lati opposti di elettrodi di resistenza trascurabile, sotto l'azione di un campo magnetico trasversale **H**, la densità di corrente acquista una componente parallela agli elettrodi, che ha segno costante in tutti i punti della lamina [2]; poichè tale componente s'invertirà all'invertire di **H**, permettendo alla lamina soltanto traslazioni nella direzione delle linee di corrente corrispondenti al campo nullo, si potranno osservare spostamenti che non s'invertono all'invertire del campo magnetico.

In una lamina munita di elettrodi puntiformi situati al contorno, un campo magnetico trasversale non altera la distribuzione delle correnti, se si mantiene costante l'intensità della corrente totale [3]; se si considerano quindi due lamine uguali dal punto di vista geometrico, munite di elettrodi puntiformi ugualmente disposti al contorno, attraversate dalla stessa corrente totale e situate in campi magnetici trasversali di uguale intensità, per esse la forza risultante e il momento risultante delle azioni esercitate dagli ioni sulla massa metallica saranno uguali, qualunque sia la natura dei metalli

[1] Corbino, Nuovo Cimento, 1911, vol. I, pag. 397; Corbino e Trabacchi, Nuovo Cimento, 1915, vol. IX, pag. 80.

[2] Corbino, Rend. Accad. dei Lincei, 1° sem. 1915, pag. 213.

[3] Volterra. Rend. Accad. dei Lincei, 1° sem. 1915, pag. 294.

di cui le due lamine sono costituite. Per ciascuna di queste lamine la detta forza e il detto momento subiranno soltanto un' inversione all' invertire del campo magnetico.

§ 8. La teoria elettronica delle forze di origine elettromagnetica agenti sulla massa di un conduttore, come si è visto, si presenta semplice nel caso isotermico (N_1 ed N_2 costanti in tutti i punti); come già si è accennato nel § 2, i risultati di tale teoria si potranno in parecchi casi verificare, con una certa approssimazione, senza ricorrere a particolari dispositivi che permettano di tenere il conduttore a temperatura costante, cioè in parecchi casi la variabilità della temperatura T, e quindi di N_1 ed N_2, potrà considerarsi come una causa perturbatrice che non modifica essenzialmente i risultati. Niente c' impedisce, in particolare, di considerare questa causa perturbatrice come trascurabile per la maggior parte dei metalli, nei quali le differenze di temperatura che si stabiliscono sotto l'azione del campo magnetico sono lievissime.

Quando si volesse tener conto anche delle variazioni di T, e quindi di N_1 e N_2, si dovrebbe procedere nel seguente modo: Calcolare, in base alle equazioni che regolano in questo caso il movimento della elettricità (equazioni che ancora non sono state stabilite per un conduttore avente forma arbitraria e munito di elettrodi la cui forma e posizione siano pure arbitrarie), la quantità di moto che gli ioni liberi contenuti nell'elemento di volume dv cedono, coi loro urti, nell' unità di tempo, alla massa del conduttore e calcolare la risultante delle forze elettriche che agiscono sulle cariche fisse contenute nello stesso elemento di volume dv: si potrà così ottenere la risultante delle azioni che gli ioni esercitano sulla massa metallica contenuta in dv.

Bisognerà calcolare inoltre, sempre in base alle equazioni dette, le pressioni che gli ioni liberi esercitano su ogni elemento ds della superficie s che limita il conduttore; queste pressioni non si equilibreranno in genere, come per $H = 0$, appunto perchè sotto l'azione del campo N_1 ed N_2 hann o valori diversi nei diversi punti della superficie s.

La risultante e il momento risultante delle dette forze di massa e delle dette pressioni superficiali potranno determinare, compatibilmente coi vincoli, movimenti del conduttore nel campo magnetico.

Applicando questo procedimento non si giunge a risultati semplici, almeno se non s' introducono nuove ipotesi, nemmeno nel caso molto particolare del parallelepipedo considerato nel § 1.

Matematica. — *Classe derivata di una funzione.* Nota di Gustavo Sannia, presentata dal Socio Enrico D'Ovidio [1].

In una Nota recante lo stesso titolo [2], C. Burali-Forti ha proposto di considerare per ogni funzione $f(x)$, non soltanto i due *numeri derivati*, ma tutta una classe di numeri, che chiama *classe derivata*, in ogni punto a che appartenga al gruppo G ove la funzione è definita e ne sia punto limite.

È costituita da tutti i valori *limiti* (e precisamente dai Lm di G. Peano) della funzione

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{1}$$

nel punto a [3], ossia è la *classe limite* (di Peano) di questa funzione. Come tale, è [4] chiusa ed ha per estremi (massimo e minimo) i *limiti di indeterminazione* di $\varphi(x)$ in a, i quali, come è noto, sono i numeri derivati di $f(x)$ in a.

L'Autore incita allo studio del nuovo ente, stimandolo molto utile ed interessante. E su ciò non v'ha dubbio.

Qui voglio osservare che già preesisteva qualche estensione del concetto di derivata, sebbene sporadica e diversamente concepita; quindi è naturale domandarsi che relazione vi sia tra essa e la classe del Burali-Forti.

A. Khintchine [5] ha considerato il caso in cui esiste in G un sottogruppo S, misurabile e di densità 1 nel punto a, tale che il rapporto incrementale (1) di $f(x)$, *considerata soltanto nei punti di* S, ammetta il limite (ordinario) nel punto a; questo limite ha chiamato *derivata asintotica* di $f(x)$ in a [6].

Generalizzando, si può dire *una derivata* di $f(x)$ in a ogni numero ($+\infty$ e $-\infty$ inclusi) che sia derivata (ordinaria) di $f(x)$ in a allorchè $f(x)$ vien considerata soltanto in un conveniente sottogruppo S di G conte-

[1] Pervenuta all'Accademia il 20 giugno 1919.

[2] Questi Rendiconti, vol. XXVIII, serie 5ª, 1° sem., fasc. 1°.

[3] Un numero l *è un* Lm di $\varphi(x)$ in a se, dato un numero $\varepsilon > 0$, in ogni intorno di a esiste un numero (almeno) x di G tale che risulti $|\varphi(x) - l| < \varepsilon$. Analoga definizione per $+\infty$ (o $-\infty$) *è un* Lm.

[4] Per un teorema di R. Bettazzi che ha chiamato *confini* i Lm (Rend. del Circolo Mat. di Palermo, t. VI, 1892, pag. 173).

[5] C. R, t. 162, 1918, pag. 287.

[6] Ed ha dimostrato che una funzione è la derivata asintotica del suo integrale indefinito di Denjoy.

nente a ed avente a come punto limite; e si può dire *classe derivata* di $f(x)$ in a l'insieme di tali numeri.

Questa classe coincide con quella definita dal Burali-Forti.

Perchè i suoi numeri sono limiti ordinarii di (1) in convenienti sottogruppi di G, ed io ho dimostrato che [1]:

Ogni numero della classe limite (di Peano) di una funzione in un punto limite a *del suo campo* G, *e nessun altro numero, gode della proprietà di essere il limite ordinario della funzione, considerata solo nei punti di un conveniente sottogruppo* S *di* G *avente* a *come punto limite* [2].

Matematica. — *Sopra due classi di curve gobbe.* Nota di Filippo Sibirani, presentata dal Corrisp. G. Peano [3].

1. Delle curve C_1 che hanno per binormali le normali principali di una curva assegnata C si sono occupati di recente T. Hayashi [4] e M. Bottasso [5]: aggiungo qui una proprietà non rilevata dagli Autori predetti, e cioè: lo spigolo di regresso della sviluppabile, luogo degli assi delle eliche circolari osculatrici a C, è una curva C_1. E dimostro che la rigata, luogo degli assi delle dette eliche osculatrici ad una curva C è sviluppabile solo se la C è tale che le sue normali principali siano le binormali di un'altra curva, oppure è un'elica cilindrica.

Se P descrive una curva data, Q è un punto rigidamente connesso al triedro fondamentale in P, perchè Q descriva una curva tale che archi corrispondenti sulle curve P e Q siano proporzionali, occorre che la curva P soddisfi ad una equazione intrinseca della forma

$$a^2/\varrho^2 + b^2/\tau^2 + 2h/\varrho\tau = c^2$$

con $a^2, b^2, c^2, 2h$ costanti e $a^2b^2 \leq h^2$; il caso dell'eguaglianza dà manifestamente una curva di Bertrand. Solo per codeste curve la curvatura ri-

(1) Cfr. il n. 6 della mia Memoria: *I limiti di una funzione in un punto limite del suo campo* (Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino, serie II, vol. LXVI, n. 5).

(2) Giovandomi di questa proprietà, ho potuto fare (nella Memoria citata) uno studio approfondito del comportamento di una funzione, di una o più variabili, intorno a un punto limite del suo campo; in particolare, ho potuto estendere un bel teorema (a prima vista paradossale) di W. H. Young.

(3) Pervenuta all'Accademia il 26 giugno 1919.

(4) T. Hayashi, *On the curve whose principal normals are the binormals of a given curve.* Giornale di Matematiche di Battaglini, vol. LIV (1916).

(5) M. Bottasso, *Problemi sulla determinazione delle linee sghembe.* In « Scritti matematici offerti ad Enrico D'Ovidio in occasione del suo LXXV genetliaco », Torino, Bocca, 1918.

spetto ad una retta rigidamente connessa al triedro fondamentale è costante e la retta è appunto la PQ. Non può essere P rigidamente connesso al triedro fondamentale di Q, salvo il caso che la curva P sia un'elica cilindrica e PQ la sua retta rettificante.

2. Sia C una curva gobba, $P(s)$ un suo punto. L'elica circolare passante per P e che ha ivi lo stesso triedro fondamentale ed ha flessione e torsione uguali a quelle di C in P si dice osculatrice alla C in P [1].

Il raggio r del cilindro circolare sul quale sta l'elica e la sua inclinazione ϑ sono dati da

$$r = \varrho\tau^2/(\tau^2 + \varrho^2) \quad , \quad \varrho/\tau = - \operatorname{cotg} \vartheta \, .$$

Poichè le generatrici del cilindro sono parallele alla retta rettificante dell'elica e questa ha in P la stessa retta rettificante di C, l'asse dell'elica osculatrice sarà dato da

$$Q = P + \mathbf{n}\,\varrho\,\tau^2/(\tau^2 + \varrho^2) + x\,(\mathbf{b}/\varrho - \mathbf{t}/\tau) \tag{1}$$

ove x è una variabile numerica.

La (1), ritenendo variabile s ed x, è l'equazione della rigata luogo degli assi delle eliche osculatrici a C. Perchè codesta rigata sia sviluppabile occorre e basta che sia

$$[P + \mathbf{n}\,\varrho\,\tau^2/(\tau^2 + \varrho^2)]' \times [\mathbf{b}/\varrho - \mathbf{t}/\tau] \wedge [\mathbf{b}/\varrho - \mathbf{t}/\tau]' = 0 \tag{2}$$

indicando con l'accento la derivazione rapporto ad s.

Eseguendo la derivazione (escludendo che la linea sia piana), l'equazione (1) dà

$$[\varrho\tau^2/(\tau^2 + \varrho^2)]' \, [\tau'/\tau^2 - \varrho'/\varrho^2] = 0 \, . \tag{2'}$$

Se è nullo il secondo fattore, la C è un'elica cilindrica; gli assi delle eliche osculatrici formano il cilindro il quale ha per direttrice normale la evoluta della sezione retta S del cilindro su cui sta C. Invero, se ψ è l'inclinazione dell'elica C, è

$$\varrho\tau^2/(\tau^2 + \varrho^2) = \varrho \operatorname{sen}^2 \psi \, ,$$

ed il secondo membro esprime il raggio di curvatura della sezione retta S nel punto che sta sulla generatrice passante per P.

Se è nullo il primo fattore della (2'), sarà allora, denotando con k una costante,

$$s/\varrho = k(s/\varrho^2 + s/\tau^2) \tag{3}$$

[1] Vedi ad es. D'Ocagne, *Cours de Géometrie descriptive et de Géometrie infinitésimale*. Paris, Gauthier-Villars, 1896.

e questa è la condizione a cui deve soddisfare C perchè le sue normali principali possono essere le binormali di un'altra curva [1]; questa è poi

$$Q = P + k\mathbf{n}. \tag{4}$$

Derivando rapporto ad s

$$Q' = \mathbf{t}(\varrho - k)/\varrho - \mathbf{b}\, k/\tau \tag{5}$$

e, per la (3),

$$Q' \wedge (\mathbf{b}\, 1/\varrho - \mathbf{t}\, 1/\tau) = \mathbf{n}\, \{ k/\tau^2 - (\varrho - k)/\varrho^2 \} = 0.$$

Ciò mostra che la tangente alla linea (4) in Q è parallela alla retta rettificante in P alla C; onde la (4) è lo spigolo di regresso della sviluppabile

$$Q = P + k\mathbf{n} + x(\mathbf{b}\, 1/\varrho - \mathbf{t}\, 1/\tau),$$

luogo degli assi delle eliche osculatrici a C.

Che poi la (4) abbia per binormali le normali principali di C risulta dalla Nota di Hayashi; ma si può ritrovare rapidamente. Dalla (5), tenendo conto della (3), si trae

$$\frac{ds_1}{ds} = \sqrt{(1 - k/\varrho)} \quad ; \quad \mathbf{t}_1 = \mathbf{t}\sqrt{1 - k/\varrho} - \mathbf{b}\sqrt{k/\varrho}$$

denotando con l'indice 1 gli elementi relativi alla linea Q. Derivando rapporto ad s_1 la seconda, si ha

$$1/\varrho_1\, \mathbf{n}_1 = \frac{d\varrho}{ds}\sqrt{k}\, [\sqrt{k}\, \mathbf{t} + \sqrt{\varrho - k}\, \mathbf{b}]/2\varrho(\varrho - k)$$

da cui

$$1/\varrho_1 = \sqrt{k/\varrho}\, \frac{d\varrho}{ds}/2(\varrho - k)$$

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{t}\sqrt{k/\varrho} + \mathbf{b}\sqrt{(\varrho - k)/\varrho}$$

onde

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{n}_1 = -\mathbf{n},$$

come si voleva provare.

Derivando l'ultima equazione rapporto ad s_1 si trae

$$\tau_1 = \sqrt{k(\varrho - k)},$$

altro risultato trovato dall'Hayashi, con procedimento assai laborioso.

[1] T. Hayashi, loc. cit.

3. Il punto P descriva una curva C e sia Q un punto rigidamente connesso al triedro fondamentale di P. Se **u** è un vettore unitario rigidamente connesso al detto triedro, r una costante, sarà

$$Q = P + r\mathbf{u}. \tag{6}$$

Indicando con l'indice 1 gli elementi relativi alla curva Q, si ha derivando la (6) rapporto ad s [1]:

$$\mathbf{t}_1 \frac{ds_1}{ds} = \mathbf{t} + r\mathbf{f} \wedge \mathbf{u} \tag{7}$$

se si pone

$$\mathbf{f} = 1/\varrho\, \mathbf{b} - 1/\tau\, \mathbf{t}.$$

Dalla (7) si ricava

$$ds_1^2 = [1 + r^2 (\mathbf{f} \wedge \mathbf{u})^2]\, ds^2.$$

Perchè la curva Q abbia archi proporzionali ai corrispondenti archi di P occorre e basta che sia costante

$$(\mathbf{f} \wedge \mathbf{u})^2 = \mathbf{f}^2 - (\mathbf{u} \times \mathbf{f})^2 = 1/\varrho^2 + 1/\tau^2 - [1/\varrho\, \mathbf{u} \times \mathbf{b} - 1/\tau\, \mathbf{u} \times \mathbf{t}]^2.$$

Il numero $(\mathbf{f} \wedge \mathbf{u})^2$ rappresenta [2] il quadrato della curvatura di C secondo la retta $u \equiv P\mathbf{u}$ rigidamente connessa al triedro fondamentale di C. La curvatura secondo una retta siffatta non coincidente con gli spigoli del triedro fondamentale è nulla solamente se la curva è un'elica cilindrica e la retta u la generatrice del cilindro passante per P. Dunque la curva storta Q può avere arco uguale a quello della curva C solo se C è un'elica cilindrica e Q trovasi sopra la generatrice del cilindro, nel qual caso la curva Q è la curva P che ha subita una traslazione. Prescindendo da questo caso, il rapporto μ fra l'arco s_1 e l'arco s è maggiore di 1.

Nella mia Nota citata ho dimostrato che per le curve C che soddisfano all'equazione intrinseca

$$a^2/\varrho^2 + b^2/\tau^2 + 2h/\tau\varrho = c^2 \tag{8}$$

ove le costanti a, b, h soddisfano alla limitazione

$$a^2 b^2 \leq h^2, \tag{9}$$

esiste una retta u relativamente alla quale la curvatura è costante; il vettore **u** unitario posto su u è definito da

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{b})^2 = 1 - ka^2 \quad , \quad (\mathbf{u} \times \mathbf{t})^2 = 1 - k^2 b^2 \quad , \quad (\mathbf{u} \times \mathbf{t})(\mathbf{u} \times \mathbf{b}) = kh$$

$$k = 2 \left\{ a^2 + b^2 + \sqrt{(a^2 - b^2) + 4h^2} \right\}^{-1}$$

[1] Cfr. F. Sibirani, *Sulla curvatura delle linee gobbe.* Giornale di Battaglini, vol. LII (1914).

[2] F. Sibirani, loc. cit.

ed il quadrato della curvatura secondo u è $c^2 k$. Il rapporto μ è allora

$$\mu = \sqrt{1 + r^2 c^2 k}\,.$$

In particolare, se $a^2 b^2 = h^2$, la C è una curva di Bertrand, essendo il primo membro della (8) un quadrato perfetto. In questo caso $k = (a^2 + b^2)^{-1}$ ed il vettore $\mathbf{u}$ è dato da

$$\mathbf{u} \times \mathbf{t} = a(a^2 + b^2)^{-1/2} \quad , \quad \mathbf{u} \times \mathbf{b} = b(a^2 + b^2)^{-1/2}.$$

Si conclude:

Essendo C una curva storta, se e solo se soddisfa ad un'equazione intrinseca della forma (8), *colla condizione* (9), *od, in particolare, è una curva di Bertrand, esiste un punto Q rigidamente connesso al triedro fondamentale di C che descrive una curva C_1 tale che archi corrispondenti su C e C_1 sono proporzionali; l'eguaglianza si ha solo se C è un'elica cilindrica e Q si trova sulla generatrice del cilindro.*

Moltiplicando scalarmente la (7) per $\mathbf{u}$ si ha

$$\mathbf{t}_1 \times \mathbf{u} \frac{ds_1}{ds} = \mathbf{t} \times \mathbf{u}\,.$$

Se $\mathbf{u}$ appartiene al piano normale di C appartiene anche al piano normale della curva Q; se $\mathbf{u}$ non appartiene al piano normale di C l'angolo che la tangente in Q forma con la retta PQ è costante se e solo se la curva C soddisfa ad una equazione della forma (8). Ma è impossibile che sia $\mathbf{u}$ rigidamente connesso al triedro fondamentale della curva Q; infatti se così fosse il rapporto fra l'arco di P e l'arco corrispondente di Q sarebbe minore di 1 e ciò contraddice ad un risultato precedente.

Chimica. — *Trasformazione di cicloesanoni in pirocatechine* [1]. Nota di Guido Cusmano, presentata dal Socio A. Angeli [2].

In una Nota [3] apparsa nel dicembre 1913 ho fatto conoscere che il composto di-bromurato risultante dall'alogenazione diretta del mentone non corrisponde alla struttura proposta per esso da Beckmann e Eickelberg [4], sì bene a quella espressa dalla formola I scritta qui sotto; e poco tempo dopo, nel marzo 1914, a guisa di riprova, ho dimostrato [5] che il bibro-

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica organica del R. Istituto di Studî superiori di Firenze.

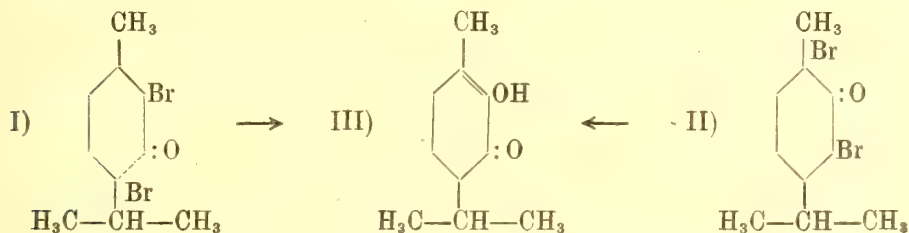
(2) Pervenuta all'Accademia il 21 giugno 1919.

(3) Rendic. Acc. Lincei, vol. XXII, serie 5ª, 2° sem., pag. 569.

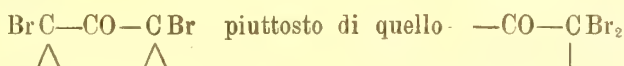
(4) Berichte, *29*, 418 [1896].

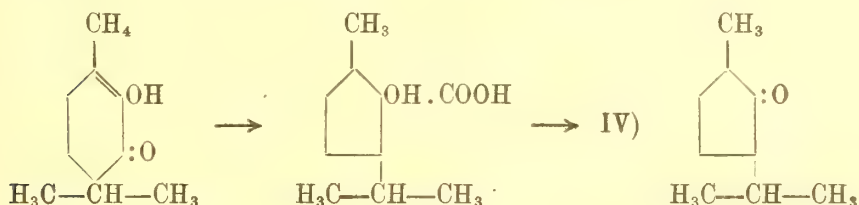
(5) Rendic. Acc. Lincei, vol. XXIII, serie 5ª. 1° sem., pag. 347.

motetraidrocarvone ha una struttura analoga (formola II). Le ricerche in proposito mi condussero all'interessante trasformazione di quei due composti alogenati nella buccocanfora (III):

```
        CH3                        CH3                         CH3
         |                          |                           |Br
        / \Br                      / \OH                       / \:O
I)     |   |        —>    III)    |   |         <—    II)     |   |
        \ /:O                      \ /:O                       \ /Br
         |Br                        |                           |
   H3C—CH—CH3                 H3C—CH—CH3                  H3C—CH—CH3
```

Mi ero proposto di delucidare un tale schema e anzi avevo già reso conto ([1]) di alcuni fatti raccolti, allorchè la guerra mi distolse dal lavoro scientifico.

Intanto nel luglio 1915 O. Wallach ([2]) pubblicò uno studio in cui sono ripetute le stesse mie esperienze e conseguiti i medesimi risultati; però le ricerche sono estese anche al cicloesanone e a numerosi suoi omologhi mono-, bi- e trimetilici. Tutti questi chetoni, per trattamento con bromo, dànno derivati bisostituiti nei quali l'A. ammette la presenza dell'aggruppamento

```
BrC—CO—CBr   piuttosto di quello   —CO—CBr2
 /\      /\                              |
```

basandosi appunto su quanto avviene per il mentone e il tetraidrocarvone. Tutti i composti bromurati, poi, reagendo a freddo con soluzione diluita acquosa d'idrato potassico forniscono chetoli non saturi che si comportano allo stesso modo de la buccocanfora. Questa sostanza, come trovarono Semmler e Mc. Kenzie ([3]) già parecchi anni addietro, si trasforma sotto l'azione degli alcali a caldo, in un α-ossiacido pentaciclico, dal quale è poi facile arrivare al diidrocanforforone (IV):

```
        CH4                     CH3                          CH3
         |                       |                            |
        / \OH                   / \OH.COOH                   / \:O
       |   |        —>         |   |           —>  IV)      |   |
        \ /:O                  |___|                        |___|
         |                       |                            |
   H3C—CH—CH3              H3C—CH—CH3                   H3C—CH—CH3
```

Similmente si comportano i chetoli di O. Wallach; per cui quest'eminente chimico, nel complesso delle reazioni che son venuto qui esponendo,

([1]) Rendic. Accad. Lincei, vol. XXIV, serie 5ª. 2° sem., pag. 521.

([2]) Nachr. K. Ges. Wiss., Göttingen, 1915, 244-63 e Liebig's Ann., *414*, 296-366 (1918). Io però ho letto i riassunti negli Abstracts del Journ. Chem. Society.

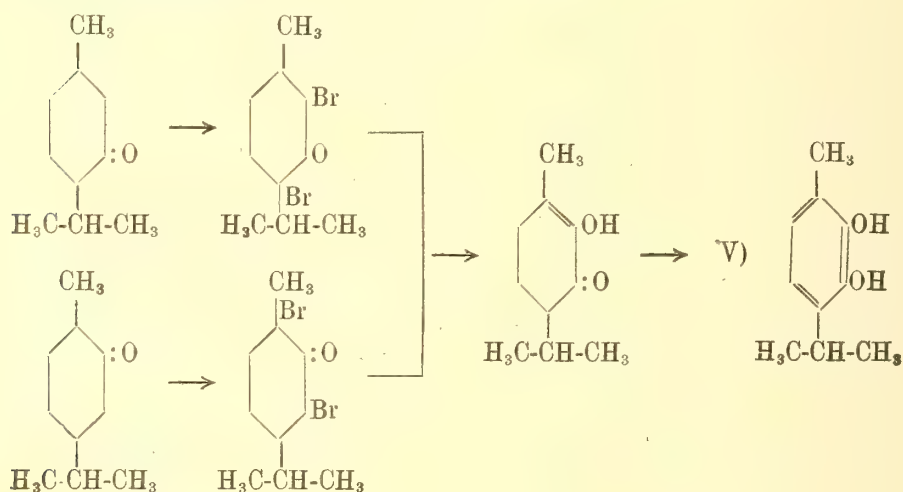
([3]) Berichte, *39*, 1158 [1906].

ha segnalato un metodo per trasformare i chetoni esametilenici in quelli pentametilenici.

Oggetto della presente breve Nota è di porre in evidenza un'altra trasformazione che ho fatto subire alla buccocanfora e che potranno subire i chetoli congeneri. Vi sono stato condotto dall'osservazione che l'una e gli altri posseggono la composizione generale e il carattere chimico, contemporaneamente chetonico e fenolico, dei dichetoni esametilenici. Tra questi sono ben noti i *meta* (diidroresorcine) e i *para*; ma degli *orto* i trattati dànno come unico rappresentante l' 1-metil-2,3-dichetoesametilene descritto nel 1902 da Harries ([1]), e con esso appunto credo si possano unire la buccocanfora e i chetoli di Wallach per formare il gruppo delle *di-idropirocatechine*. Da queste ai composti aromatici corrispondenti il passo è breve: e io per es. ho trasformato la buccocanfora in metil-isopropilpirocatechina (V), dando così compimento alla serie seguente di passaggi che si inizia dal mentone o dal tetraidrocarvone:

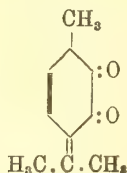
CH_3 / :O / H_3C-CH-CH_3 → CH_3 / Br / O / Br / H_3C-CH-CH_3

CH_3 / :O / H_3C-CH-CH_3 → CH_3 / Br / :O / Br / H_3C-CH-CH_3

→ CH_3 / OH / :O / H_3C-CH-CH_3 → V) CH_3 / OH / OH / H_3C-CH-CH_3

In modo analogo si potranno mettere in relazione con gli o-difenoli moltissimi altri monochetoni esametilenici, mentre sino ad oggi, com'è noto, erasi realizzato il passaggio da questi ai fenoli monovalenti ([2]).

([1]) Berichte, XXXV, 1178 [1902].

([2]) Se la formola attribuita da Bredt (Liebig's, Ann. *314*, 389) al canfoisochinone è vera,

CH_3 / :O / :O / $H_3C.C.CH_3$

da questo composto si dovrebbe poter passare alla buccocanfora e alla metilisopropilpirocatechina — e ciò mi propongo di verificare prossimamente.

Per generare nel nucleo della buccocanfora il nuovo doppio legame necessario per trasformarla in metil-isopropilpirocatechina, ho sottratto, in condizioni opportune, una molecola di acido bromidrico dalla monobromo-buccocanfora che ho descritto nel 1913 (l. c.). Avendo sin d'allora osservato che questo composto, per azione degli idrati di sodio o potassio si trasforma in un ossi-timochinone, ho determinato l'eliminazione dell'idracido alogenico col seguire queste due vie, in cui è evitato l'ambiente alcalino:

1°) In un palloncino da distillazione si riscalda qualche grammo della sostanza al di sopra del punto di fusione. A circa 130° si produce un rapido svolgimento di acido bromidrico che continua anche cessando di riscaldare dall'esterno; terminata la decomposizione se ne fa distillare il prodotto, che passa a circa 270°. Il distillato è un olio denso, ma per sfregamento con una bacchetta si rapprende in una massa cristallina, che tenuta qualche ora su piastra porosa. dà la metil-isopropilpirocatechina allo stato di purezza.

2°) Si riscalda a ricadere, per pochi minuti, la monobromo-buccocanfora con anidride acetica e acetato sodico anidro: in tal modo essa perde acido bromidrico e si trasforma nel derivato di-acetilico della pirocatechina. Il derivato si cambia nel fenolo saponificando con acqua a 150° in tubo chiuso; il prodotto ottenuto si lava bene con acqua, si fa essiccare su solfato sodico anidro, poi si distilla e si procede come nel caso descritto innanzi. Un campione del difenolo così preparato e senz'altro analizzato dette questi numeri:

Sostanza gr. 0,2107: CO_2 gr. 0,5553, H_2O gr. 0,1603: trovato °/₀ C 71,87, H 8,45; calcolato per $C_{10}H_{14}O_2$: C 72,22, H 8,51.

La metil-isopropilpirocatechina non era conosciuta e fra gli omologhi della pirocatechina diviene interessante per lo scheletro del paracimolo, che contiene, così comune fra i terpeni. Essa si scioglie poco nell'acqua fredda; molto nei comuni solventi organici, eccezion fatta per l'etere di petrolio che può servire per cristallizzarla in bei prismi incolori. Il suo p. f. è 48°. Sciolta in alcool dà con cloruro ferrico una bella colorazione verde. Il suo potere riducente si manifesta, fra l'altro, per la facilità con cui si trasforma in soluzione acquosa in un ossi-timochinone; l'ossidazione diviene rapidissima in presenza di alcali acquosi. Le soluzioni acquistano un colore rosso-violaceo e acidificate depongono un ossi-timochinone con il p. f. a 165° circa. Anche le basi organiche favoriscono l'ossidazione: p. es. l'anilina dà con la metil-isopropilpirocatechina e acqua soluzioni d'un bell'azzurro violaceo.

Feniluretano. — La metilisopropilpirocatechina riscaldata a 75-80° oon isocianato di fenile ne addiziona due molecole, formando una sostanza cristallina che fonde a 170°. Analisi: gr. 0,1370 dettero cc. 8,5 d'azoto a 22° e 745 mm., cioè 7,03 °/₀, mentre per $C_{24}H_{24}O_4N_2$ si calcola N °/₀ 6,93.

Fisica. — *Sulla determinazione delle proprietà d'un apparecchio aereo durante il volo in funzione della densità attuale dell'aria.* Nota di MARIO TENANI, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH [1].

1. Molte proprietà di un apparecchio aereo sono, come è subito visto, funzione della densità dell'aria in cui esso si sostiene e si muove: eppure nessuno degli strumenti attualmente in uso per la navigazione tiene conto di questo elemento fondamentale. Ciò può trovare le sue ragioni, secondo il mio modo di vedere, principalmente in questi due fatti: 1° che fin qui il consumo di combustibile, che in particolar modo dipende dalla densità dell'aria, aveva un'importanza tutto affatto secondaria: ciò che importava nelle applicazioni belliche era l'ottenimento del massimo effetto dell'aereo nelle condizioni necessariamente imposte del momento dell'azione, e, per i voli generalmente brevi che erano necessari, il rendimento della macchina non preoccupava affatto; 2° che finora le prove in volo degli aerei hanno attraversato uno stadio preparatorio che mal si prestava a stabilire con precisione tale rendimento nelle varie condizioni.

Le esigenze della sicurezza nella navigazione aerea, quale ora si prospetta, richiedono invece una ricerca accurata delle proprietà degli aerei nelle varie condizioni offerte dall'atmosfera alle varie quote, e una più esatta determinazione del consumo.

2. Ritenendo, secondo i risultati dell'esperienza, che la composizione dell'aria si mantenga costante fino alle più alte quote oggi raggiungibili in volo, la densità dell'aria ϱ_h a una quota h, ove g sia l'accelerazione della gravità, p la pressione, t la temperatura centigrada, f la tensione del vapore d'acqua in mm. di mercurio è, come è noto, espressa dalla formula

$$\varrho_h = 1{,}293 \left(\frac{p}{760} - 0{,}377 \frac{f}{760}\right) \cdot \frac{1}{1+\alpha t} \cdot \frac{g}{g_0}, \tag{1}$$

ove α è il coefficiente di dilatazione dei gas, g_0 l'accelerazione della gravità al livello del mare a 45° di latitudine.

Per quanto può riguardare le attuali applicazioni aeronautiche si può osservare che, essendo $\frac{g}{g_0}$ molto prossimo all'unità (superiore sempre a 0,99682) fino a 10 km, trascurandone l'influenza si commette un errore che, dati i valori intorno cui oscillano le pressioni e le temperature anche alle massime quote, è sempre dell'ordine del grammo per metro cubo d'aria.

[1] Pervenuta all'Accademia il 21 giugno 1919.

Occorre inoltre osservare che il rapporto $\frac{f}{760}$ non può assumere alle alte quote valori molto elevati perchè, diminuendo la temperatura, diminuisce rapidamente la tensione massima f_{max} del vapore d'acqua; sicchè si può facilmente verificare che, trascurando di considerare completamente lo stato igrometrico dell'aria, l'errore che si commette nel calcolo della densità è sempre inferiore a 10 grammi per mc. al suolo, a 5 gr. a 3000 metri, a 2 gr. a 5000 metri e molto meno alle altezze superiori. Trascurando pertanto l'influenza dello stato igrometrico dell'aria e dell'accelerazione della gravità, si avrà come espressione della densità dell'aria ai vari livelli

$$\rho_h = 1{,}293 \cdot \frac{p}{760} \cdot \frac{1}{1+\alpha t} \cdot \tag{2}$$

3. Le seguenti considerazioni meteorologiche daranno un'idea delle variazioni che la densità subisce alle varie quote nei nostri climi.

La formula altimetrica

$$h - h_0 = A \log \frac{p_0}{p} (1 + \alpha t_m)$$

ci dice che al crescere della temperatura media t_m, ad altezza costante h, la pressione p deve pure essa crescere, fin che p_0 rimane costante, sicchè gli effetti della temperatura e della pressione sulla densità secondo la formula precedente, tenderebbero ad elidersi. Siccome però la pressione al suolo p_0 varia essa pure, solo l'esperienza può decidere se alle alte quote p e t variino insieme in modo da rendere l'oscillazione della densità molto piccola, non ostante le grandi variazioni della temperatura, o se si verifichi il caso contrario e quindi le oscillazioni della densità risultino molto forti e importanti per le applicazioni aeronautiche. Ciò è appunto quanto si verifica.

Ecco un quadro dei valori estremi della densità in kg. per mc. osservati in Italia alle varie quote, da me calcolati in base ai risultati dei lanci di pallone sonda effettuati a Pavia (anni 1906-1912):

Altezza km.	0 [1]	1	2	3	4	5	6	7	8
Minimi	1,173	1,073	0,974	0,884	0,800	0,718	0,644	0,575	0,517
Massimi	1,304	1,181	1,034	0,926	0,831	0,760	0,681	0,603	0,539
Differenza	0,131	0,108	0,060	0,042	0,031	0,042	0,037	0,028	0,022

[1] Gli estremi al suolo qui riportati si riferiscono agli istanti in cui furono effettuati lanci di pallone-sonda: la densità al livello del mare durante l'anno può variare nei nostri climi da 1,127 a 1,340 con una differenza di 0,213 equivalente al 18 % della minima e al 17 % della media. I dati della tabella furono calcolati in base alle osservazioni ottenute e pubblicate per cura del prof. P. Gamba negli Annali dell'Uff. Centr. di Meteorologia, vol. 28, 30, 32, 33, 34, 35 e 36, parte I, già da me riassunte nelle Memorie del R. Osserv. al Collegio Romano, ser. III, vol. VII, parte I.

Si può facilmente calcolare, in base ai valori medî annui della densità dell'aria alle varie quote, che queste oscillazioni equivalgono rispettivamente, agli effetti del volo, ai seguenti cambiamenti di quota:

Altezza km.	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Metri	1085	1000	600	500	400	600	500	420	350

Si noti inoltre che i numeri della precedente tabella rappresentano le densità corrispondenti alle condizioni estreme realmente osservate alle varie quote, e che è probabile che a tutte le quote le massime oscillazioni della densità siano anche notevolmente superiori.

I numeri precedenti si prestano poi a un'importante constatazione di indole meteorologica.

Confrontiamo le predette oscillazioni della densità alle varie quote con le corrispondenti oscillazioni della temperatura:

Altezza km.	0 [1]	1	2	3	4	5	6	7	8
Mass. temp. oss.	26°,8	22°,0	15°,8	9°,3	3°,7	-2°,4	-8°,5	-14°,9	-21°,7
Min. temp. oss.	-4°,0	-7°,9	-9°,2	-15°,7	-23°,1	-31°,6	-40°,9	-48°,5	-56°,0
Differenza	30°,8	29°,9	25°,0	25°,0	26°,8	29°,2	32°,4	33°,6	34°,3

e notiamo che, se la pressione fosse rimasta costante alle varie quote non ostante la variazione di temperatura, queste differenze avrebbero dato luogo a una variazione di densità tra il massimo ϱ' e il minimo ϱ espressa da

$$\varrho' - \varrho = \varrho \frac{T - T'}{T},$$

ove T e T' rappresentano gli estremi della temperatura in gradi dallo 0 assoluto, e cioè nel nostro caso alle seguenti variazioni:

Altezza km.	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Oscill. tra gli estr. della dens.	0,149	0,121	0,092	0,086	0,084	0,087	0,090	0,086	0,082

Si vede chiaramente quanto si è detto prima che, nella zona qui considerata, ed astraendo i primi strati prossimi al suolo, alle temperature più alte si accompagnano pressioni più alte e inversamente, per modo che l'oscillazione nella densità viene in effetto considerevolmente diminuita.

4. Si comprende pertanto l'impossibilità di enunciare le proprietà di un aereo in funzione della quota e la necessità di enunciarle invece in funzione della densità dell'aria, o di qualche elemento che le sia univocamente legato, come possono essere, ad esempio, le altezze sul livello del mare alle quali in media durante l'anno si manifestano i singoli valori della densità: così si è effettivamente cominciato a fare nella tecnica.

(1) Id., ib.

Tali altezze risultano leggermente diverse per le singole regioni per le quali è stato potuto effettuare il calcolo delle densità medie e, finchè non si saranno prese opportune convenzioni internazionali, assisteremo a questo fatto imbarazzante e poco compatibile con una scienza che si sviluppa in questi giorni, che uno stesso numero esprimerà secondo i paesi una diversa densità dell'aria.

Durante il volo interesserà dunque al pilota per giudicare delle proprietà della macchina il conoscere il valore della densità dell'aria in cui naviga, oppure, ciò che è equivalente, il valore delle corrispondenti altezze secondo quanto è stato detto; e queste soltanto e non la quota di navigazione sul livello del mare saranno quelle che possono interessarlo per quanto riguarda le proprietà della macchina che sono funzione della densità.

Ad esempio recentemente il Col. Crocco [1] ha definito una quantità, cui ha dato il nome di consumo orario unitario (il consumo di benzina di un'aeronave corrispondente alla velocità di un km. ora), che entro certi limiti comprendenti tutti i casi pratici, è funzione della sola densità dell'aria e che permette facilmente di calcolare il consumo totale per un determinato viaggio, la velocità propria da tenersi, la massima velocità del vento superabile durante tutto il percorso ecc., senza avere pertanto nessuna relazione fissa con la quota contata dal l. d. m. Questa quantità, così importante per la navigazione, si può facilmente determinare alle prove, ma rimane inutilizzata per la pratica se non si ha il modo di conoscere con una certa precisione e prontezza la densità attuale dell'aria o l'altezza corrispondente secondo le accennate convenzioni; non si può infatti ammettere che durante il volo si debba calcolare con la formula precitata o con l'uso di tabelle la densità attuale dell'aria o l'altezza corrispondente.

5. Credo opportuno pertanto descrivere qui una semplice trasformazione che possono subire i barometri aneroidi che servono per i comuni altimetri, atta a trasformarli in strumenti che indichino direttamente la densità dell'aria o l'altezza convenzionale corrispondente o qualunque altro elemento che, come il consumo orario unitario predetto, sia funzione unicamente della densità dell'aria.

L'applicazione ricorda molto da vicino quella da me esposta in questi stessi Rendiconti [2] a proposito della misura delle altezze dal livello del mare, e consiste nel sostituire alla mostra comune dell'altimetro una rappresentazione della formula (2) in coordinate polari.

L'indice dell'aneroide si muove in funzione della pressione: se pertanto si prende la pressione come anomalia della rappresentazione grafica, l'indice segnerà ad ogni istante l'anomalia corrispondente alla pressione del momento.

[1] L'Aeronauta, Roma, anno II (1919). n. 2; vedi pure applicazioni nel n. 4.
[2] Vol. XXVI, s. 5ª, 2° sem., pag. 343, e XXVII, s. 5ª, 1° sem., pag. 51.

Prendiamo poi come raggio vettore della rappresentazione i valori della temperatura. Potremo così disegnare una serie di cerchi concentrici corrispondenti ciascuno a un particolar valore della temperatura. Preso ora un valore qualunque della densità (ad esempio quello corrispondente all'altezza convenzionale 0 m. o a un dato valore del consumo orario unitario ecc.) calcoliamo le coppie di valori p e t a lui corrispondenti. Su ogni cerchio potremo segnare un punto che rappresenta ciascuna di tali coppie di valori e, riunendo i punti così ottenuti, avremo una curva (di densità costante) sulla mostra dell'aneroide.

Tracciando molte di tali curve, ad esempio quelle corrispondenti alle densità di 50 in 50 grammi per mc., oppure corrispondenti in media alle quote di 100 in 100 m., oppure quelle corrispondenti ai vari valori del consumo orario unitario, e contrassegnando tali curve col valore dell'elemento che ha servito a tracciarle, avremo una mostra che ci permetterà senz'altro di determinare, con la conoscenza della temperatura, o la densità dell'aria, o l'altezza convenzionale del momento, o il consumo orario unitario del momento, o qualsiasi altro elemento necessario alla navigazione che sia funzione della densità dell'aria.

Basterà infatti leggere sul cerchio contrassegnato col valore della temperatura attuale dell'aria, sotto l'indice il valore dell'elemento cercato.

Questo semplice strumento, e gli analoghi che si potranno costruire su tale principio, permetteranno al pilota di conoscere con precisione e rapipità durante il viaggio quegli elementi che, come si disse in principio, si tende oggi a determinare con gran cura nelle prove. e potrà offrirgli, molto più precisamente dell'altimetro, le informazioni necessarie per una sicura navigazione.

Il metodo di trasformazione degli attuali strumenti è però generale e si può applicare anche ad altro genere di apparecchi, che indicando indirettamente una determinata quantità, devono poi essere corretti per tener conto della densità variabile del mezzo.

Ne è esempio l'indicatore di velocità che misura la velocità dell'aereo misurando la pressione che il vento relativo all'aereo stesso esercita in un manometro. La velocità corrispondente a una determinata pressione è però funzione della densità dell'aria; sicchè, volendo rilevare direttamente dallo strumento l'indicazione della velocità propria effettivamente tenuta dall'aereo senza laboriose correzioni, si potrà sostituirne la mostra con una rappresentazione grafica, analoga alle precedenti, in cui si prenda per anomalia la pressione direttamente indicata dall'indice dello strumento e per raggio vettore si prenda la densità dell'aria (o qualche altro elemento, come l'altezza convenzionale, il consumo orario unitario ecc., che ne dipenda univocamente). In tale principio rientra una mostra corretta per indicatore di velocità, da me precedentemente descritta [1].

[1] L'Aeronauta, Roma, anno I (1918), n. 6.

Fisiologia. — *A proposito di una comunicazione « Sur l'action hémolytique du sang des jeunes anguilles encore transparentes », di E. Gley* [1]. Nota del dott. G. Buglia, presentata dal Corrisp. V. Aducco [2].

Il Gley, venuto a conoscenza, dalla lettura di un riassunto uscito recentemente nelle « Archives italiennes de biologie » [3], di alcune mie ricerche sulla azione tossica che esercitano sul sangue gli estratti acquosi del corpo di giovani anguille ancora trasparenti, vuole mettere in evidenza che a lui spetta la priorità dell'argomento.

Perciò in una comunicazione, pubblicata nel luglio scorso nei « Comptes rendus des séances de la Société de biologie », ricorda che nel *Rapport annuel*, che sommariamente rende conto delle ricerche intraprese con i fondi della *Caisse des récherches scientifiques*, dell'anno 1914, *ma pubblicato soltanto nel 1917* [4], trovasi scritto sotto il suo nome: « *Mes recherches ont porté cette année (1914) sur deux questions différentes...... La seconde question étudiée est celle de l'apparition de la proprieté toxique chez les tres jeunes anguilles. Or lorsque ces animaux remontent le cours des fleuves, leur sang possède déjà son pouvoir hémolytique. Je me propose de poursuivre cette recherche qui n'a pu cette année être achevée* ».

E più oltre, nella stessa comunicazione, il Gley dice: « ... *Il est très aisé de se procurer à Nantes au printemps, une grande quantité de jeunes anguilles transparentes, ce animaux remontant la Loire à cette epoque en nombre immense. La difficultè est de recuillir du sang, tant l'animal est petit et effilé. Je sui parvenu à en obtenir quelques gouttelettes en coupant la tête d'un membre considérable d'exemplaires. Mais cette faible quantité ne m'a permis que de constater l'action hémolytique « in vitro » de ce sang, à dose très minime, sur des globules rouges de lapin. La détermination exacte du pouvoir hémolytique, telle que nous l'avons pratiquée, L. Camus et moi, dans nos recherches sur le serum*

[1] E. Gley, *Sur l'action hémolytique du sang des jeunes anguilles encore transparentes*. Compt. Rend. de la Soc. de biol. Paris, tom. LXXXII, n. 22, an. 1919, pag. 817.

[2] Pervenuta all'Accademia l'11 agosto 1919.

[3] G. Buglia, *Sur l'action toxique exercée sur le sang par les extraits aqueux du corps des jeunes anguilles encore transparentes*. Archives ital. de biol., tom. LXIX, fasc. II, 1919, pag. 119.

[4] Ministère de l'instruction publique. Caisse des recherches scientifiques. Année 1916. *Rapport annuel adressé*... Melun, Imprimerie administrative, 1917.

d'anguille, n'a pas été possible. C'est justement cette étude que je me proposais de faire dans un nouveau séjour à Nantes ».

Per la verità debbo innanzi tutto rilevare che le mie ricerche, che hanno ora provocata la comunicazione del Gley, non sono di data recente, perchè già le avevo *pubblicate in esteso sino dal 1917* negli Atti della Società toscana di scienze naturali (1). Vennero cioè pubblicate nell'anno stesso in cui veniva resa nota l'intenzione del Gley di intraprendere ricerche sul potere emolitico del sangue delle giovani anguille ancora trasparenti.

Dirò poi che le suddette mie ricerche erano state condotte a termine (non ideate soltanto) sino dalla primavera del 1915, assieme ad altre, sulla vitalità e pressione osmotica delle giovani anguille ancora trasparenti (2).

La pubblicazione venne ritardata per il fatto che nel maggio 1915, essendo stato chiamato a prestar servizio militare, dovetti allontanarmi dalla sede di studio e le vicende della guerra m'impedirono per lungo tempo di occuparmene.

Per questo stesso motivo dovetti anche ritardare sino ad ora la pubblicazione di nuove ricerche sulla tossicità generale dell'estratto acquoso delle giovani anquille ancora trasparenti (3), ricerche iniziate pur esse nel periodo precedente la guerra (1915).

Indipendentemente però da tutto questo, desidero render noto che l'idea di studiare il veleno dell'anguilla, durante i primi periodi dello sviluppo di quest'animale (quando cioè ha ancora il corpo trasparente ed è conosciuta in Toscana col nome di *cieca*, e, se sarà possibile, anche prima, cioè quando si trova allo stato di *Leptocephalus*), da parecchi anni (da quando entrai a far parte dell'Istituto di fisiologia di Pisa) era già stata manifestata a noi, allievi di laboratorio, dal nostro direttore prof. V. Aducco. E non soltanto essa era rivolta all'indagine dell'eventuale potere emolitico del sangue delle giovani anguille ancora trasparenti, ma anche alla ricerca del luogo di origine e della natura del veleno dell'anguilla.

Fu appunto seguendo questa direttiva che agli esperimenti coll'estratto acquoso del corpo di giovani anguille ancora trasparenti, riferiti nelle mie

(1) G. Buglia, *Sull'azione tossica che gli estratti acquosi del corpo delle giovani anguille ancora trasparenti (cieche) esercitano sul sangue.* Atti della Soc. toscana di sc. nat., residente in Pisa. Memorie, vol. XXXI, 1917, pag. 168.

(2) G. Buglia, *Osservazioni intorno alla vitalità ed alla pressione osmotica delle giovani anguille ancora trasparenti (cieche).* Atti della Soc. toscana di sc. nat. residente in Pisa. Memorie vol. XXXI, 1916, pag. 102; Archives ital. de biol., tom. LXVI, fasc. I, 1916, pag. 1.

(3) G. Buglia, *Sulla tossicità degli estratti acquosi del corpo delle giovani anguille ancora trasparenti (cieche).* Atti della Soc. toscana di sc. nat. residente in Pisa. Memorie, vol. XXXII, 1919, pag. 165.

pubblicazioni più sopra ricordate, ne associai altri sull'estratto di pelle di anguilla adulta e sul *liquido filante* secreto esternamente dalle anguille adulte e dalle giovani anguille (*cieche*).

I risultati sino ad ora ottenuti mi spingono a continuare alacremente le ricerche nella speranza di poter portare nuovamente qualche contributo sull'argomento.

Fisiologia. — *Ricerche sulla secrezione spermatica.* V: *Osservazioni sulla secrezione spermatica dell'uomo* (¹). Nota di G. AMANTEA e T. RINALDINI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI (²).

Le nozioni fisiologiche sul comportamento della secrezione spermatica nell'uomo sono assai scarse ed incomplete. Anzi possiamo dire, che esse si riducono a quelle forniteci finora da tre osservatori, gli unici che si trovano perciò ricordati in quasi tutti i trattati più recenti: il Mantegazza (³), il Lode (⁴) e il Guelliot (⁵).

Il primo (1860) in base a osservazioni personali stabilì che la quantità di sperma, che si può ejaculare in ogni singolo atto sessuale, può normalmente oscillare fra cm^3. 0,75 e cm^3. 6; potè inoltre notare la diminuzione progressiva di spermatozoi nelle ejaculazioni che avvengono a brevi intervalli fra loro, e avrebbe calcolato che il riposo necessario al soggetto per eliminare di nuovo la quantità massima di sperma è di 4 giorni.

A. Lode (1891) potè sperimentare su quattro individui sani, rispettivamente di 17, 29, 35 e 40 anni, eseguendo complessivamente 24 osservazioni, e tenendo conto della quantità dell'ejaculato, del suo peso specifico e del numero degli spermatozoi. La quantità media di sperma nelle 24 osservazioni fu di cm^3. 3,375; il numero medio degli spermatozoi di 60.876 per mm^3, e di 226.257.800 per ogni ejaculazione; il peso specifico oscillò fra 1027 e 1046.

Il Guelliot ritiene inferiore al vero le cifre date dal Lode per gli spermatozoi, e colle sue ricerche perviene al numero di 412.500.000.

(¹) Ricerche eseguite nel laboratorio di Fisiologia della R. Università di Roma.
Il piano delle ricerche è del dott. G. Amantea; le ricerche furono eseguite in collaborazione col dott. T. Rinaldini, che ne fece oggetto della sua tesi di laurea. Esse saranno proseguite dal dott. G. Amantea; e il lavoro completo sarà pubblicato successivamente altrove.

(²) Pervenuta all'Accademia il 22 luglio 1919.

(³) Mantegazza P., Gazz. Med. Ital. Lombarda, 1866.

(⁴) Lode A., Pflüger's Arch., Bd. L, pag. 278, 1891.

(⁵) Guelliot, cit. da R. W. Taylor in « Patologia e cura delle funzioni sessuali », Ann. d. Mal. d. Org. gen.-urin., 1892, T. X, pag. 77 seg.

Data la scarsezza delle osservazioni riferite, e data l'importanza dell'argomento, noi abbiamo creduto non solo utile, ma necessario riprendere lo studio del decorso fisiologico della secrezione spermatica nell'uomo, allo scopo di colmare le lacune.

Ci siamo pertanto proposti di esaminare su *molti* soggetti la *quantità dello sperma* eliminato e il *numero degli spermatozoi* corrispondenti a ciascuna ejaculazione, tenendo conto, fino al possibile, di tutte le principali condizioni e di tutti i principali fattori presumibilmente capaci di indurre variazioni apprezzabili.

Abbiamo scelto i nostri soggetti di esame fra persone intelligenti, capaci di valutare la necessità di fornirci dati esatti e completi. Il maggior numero dei nostri soggetti appartiene al gruppo dei professionisti, e di questi i più sono medici. Molti di loro vollero anche seguire le nostre osservazioni da vicino, mostrando per esse vivo interessamento, e cooperandoci molto utilmente colla scrupolosa esecuzione di quanto da loro si esigeva per ragioni di indagine scientifica.

Abbiamo potuto finora sperimentare su novantuno soggetti, eseguendo complessivamente più di 305 osservazioni, i cui risultati saranno oggetto della presente e della successiva Nota.

Per ciascuno dei nostri soggetti furono raccolte le seguenti notizie *generali* (ossia su dati e condizioni relative al soggetto stesso), e *particolari* (ossia su dati e condizioni relative a ciascun atto sessuale):

a) *Notizie generali*: luogo di nascita; età; epoca della pubertà; altezza; colorito della cute e dei capelli; stato generale; stato civile e professione; prolificità nella famiglia; temperamento sessuale; capacità sessuale; abitudini sessuali; passato sessuale; malattie veneree (progresse e attuali); indicazioni relative ai testicoli, e ai vasi scrotali (varicocele); malattie generali e relative cure precedenti e attuali; abitudini personali rispetto ai cibi, al vino, agli alcoolici, al caffè e al tabacco.

b) *Notizie particolari*: modalità dell'atto; riposo sessuale precedente; ora nella quale fu compiuto; durata di esso; grado e decorso dell'eccitamento; indicazioni sul *comportamento* e sull'intensità del piacere durante l'atto e nell'ejaculazione; caratteri del liquido eliminato; ora nella quale avvenne l'ultima ingestione di cibi e bevande; loro qualità e quantità; condizioni generali al momento dell'atto (con speciale riguardo alla stanchezza muscolare e nervosa); condizione sociale della donna e suoi rapporti col soggetto; temperamento sessuale della donna.

Il liquido raccolto in un comune *condom* ci doveva essere portato entro le 24 ore successive all'atto sessuale. A ciascun soggetto si raccomandava di spremere dopo l'atto stesso l'uretra, per raccogliere anche lo sperma in essa rimasto, e così almeno ridurre la perdita di liquido che non sarebbe stato possibile evitare in modo assoluto.

Inoltre si consigliava di far cadere nel *condom*, prima di annodarlo o legarlo accuratamente, un pezzettino di canfora o un cristallino di timolo, allo scopo di impedire o limitare i fenomeni di alterazione da microbî.

L'ejaculato era con cura misurato in un adatto cilindretto di vetro fornito di tappo a smeriglio e graduato in decimi di cm^3. Nella misurazione si tenne sempre conto del liquido che rimaneva aderente alla superfice interna del *condom*, e che, in base alla media di numerose determinazioni all'uopo istituite, è risultato eguale a cm^3. 0,3 (altrove [1] per lo sperma di cane si trovò eguale a cm^3. 0,2); alla quantità di liquido quindi versato nel cilindretto graduato si aggiungevano, come costante, cm^3. 0,3 allo scopo di valutarne più esattamente il volume complessivo.

Trattandosi di quantità molto piccole, si lavava anche il *condom* con una quantità esattamente nota di soluzione fisiologica, tenendone poi conto scrupoloso nel calcolare il volume del liquido e il numero di spermatozoi.

La conta di questi ultimi si è eseguita secondo il metodo già precedentemente descritto da uno di noi [2] per la numerazione degli spermatozoi nello sperma del cane, servendosi dell'apparecchio di Thoma-Zeiss per la conta dei globuli del sangue, e diluendo lo sperma nel mescolatore con soluzione di bisolfato di chinino all'1 % (trattandosi di sperma contenente spermatozoi ancora mobili), o con soluzione fisiologica (trattandosi di spermatozoi immobili).

La diluizione che abbiamo trovato opportuna è quella di 1:10. Nei casi di scarsezza eccessiva di spermatozoi siamo ricorsi a diluizione di 1:3-1:2, e talora persino all'esame diretto dello sperma come tale, ciò che è sempre però reso difficile dalla presenza di troppi granuli di talco o amido, che il liquido porta con sè dalla superfice dei *condoms*. Come risultato definitivo per ciascuna numerazione abbiamo sempre assunto la media di non meno di tre conte successive, eseguite con campioni differenti di sperma e contando gli spermatozoi distribuiti su almeno 200 quadratini dell'apparecchio di Thoma-Zeiss. Per assicurare inoltre alle nostre osservazioni una maggiore uniformità, le numerazioni furono eseguite tutte da uno solo di noi (G. Amantea),

Le numerose osservazioni potute così eseguire, pur concedendoci di completare e di estendere le scarse nozioni esistenti nella letteratura sull'importante argomento, non sono certo sufficienti a permetterci ancora la soluzione di tutti i problemi, che ci eravamo proposti, e che si possono agevolmente desumere dal suesposto piano di lavoro.

Comunque in conformità dei descritti criterî generali seguiti nelle nostre indagini, e partendo dalle condizioni e dai fattori presupposti e considerati

(1) G. Amantea, Atti d. R. Acc. d. Lincei. vol. XXIII, 1° sem., 1914.
(2) G. Amantea, loc. cit.

capaci di influenzare in qualche modo la secrezione spermatica nell'uomo, i risultati da noi finora ottenuti potranno essere distinti in due gruppi, a seconda che si considerino quelli riferibili a condizioni o fattori relativi a ciascun soggetto, ovvero quelli riferibili a condizioni o fattori relativi a ciascun atto sessuale.

All'esposizione di tali risultati (che sarà fatta nella Nota successiva), riteniamo però necessario far qui precedere quella di alcuni fatti di carattere generale, che nettamente si ricavano dal complesso delle nostre osservazioni, e che per la loro evidenza ci sembra che possano costituire la base di altrettante leggi fisiologiche della secrezione spermatica nell'uomo. Faremo inoltre qui seguire i dati più generali raccolti circa i limiti entro cui abbiamo visto oscillare il *volume dello sperma* ejaculato, e il *numero degli spermatozoi*, riferendoci a tutte le nostre osservazioni (più di 300 su 91 soggetti).

In primo luogo ci pare che meriti attenzione il fatto da noi rilevato, che *a parità di ogni altra condizione, il volume dello sperma e il numero di spermatozoi per ciascuna ejaculazione variano col variare dei singoli soggetti esaminati*. Abbiamo accertato infatti che si trovano soggetti, i quali mai raggiungono le cifre, che altri invece abitualmente superano. Il *fattore individuale* assume così, nella fisiologia della secrezione spermatica dell'uomo, particolare valore.

E anche quando per due o più soggetti esista coincidenza per uno dei dati da noi ricercati (volume dello sperma e numero degli spermatozoi eliminati), di solito manca la concidenza per l'altro. Sicchè si può con altre parole affermare, che, *a parità di condizioni, soggetti che eliminano lo stesso volume di sperma, non eliminano di solito lo stesso numero di spermatozoi*, e viceversa.

Nei riguardi poi del rapporto tra volume di sperma e numero di spermatozoi ejaculati, dal complesso delle nostre osservazioni si ricava la regola, che, *per uno stesso soggetto il numero degli spermatozoi, in ejaculazioni successive, non è mai esattamente proporzionale al volume dell'ejaculato.*

Inoltre, quasi come corollario della regola precedente, risulta accertata anche l'altra, per ejaculazioni successive di uno stesso soggetto che, *le variazioni del volume dell'ejaculato mantengono una relativa indipendenza rispetto alle variazioni del numero di spermatozoi con esso eliminati.*

Infine *il volume dell'ejaculato e il numero degli spermatozoi in esso contenuti variano generalmente nello stesso senso, ma qualche volta anche in senso inverso: mai però proporzionalmente.*

Il *volume dell'ejaculato*, riferendoci a tutte le nostre osservazioni su tutti i nostri soggetti, ha presentato variazioni fra cm^3. 0,5 e cm^3. 13,4, come limiti estremi *eccezionali*. Le quantità invece che si son viste più frequentemente ricorrere hanno oscillato fra cm^3. 3-4 e cm^3. 6-7.

Per ciò che concerne il *numero di spermatozoi* che può essere eliminato con una ejaculazione, bisognerà distinguere quello *relativo*, cioè calcolato per mm^3. di sperma, e che esprime la densità dell'ejaculato in spermatozoi, da quello *assoluto*, cioè il totale degli spermatozoi eliminati.

Il numero *relativo*, riferendoci sempre a tutte le nostre osservazioni, ha presentato variazioni fra 0 e 480.000 per mm^3., come limiti estremi *eccezionali*. Mentre le cifre relative, che con maggior frequenza si sono riscontrate hanno oscillato fra 50.000-100.000 e 350.000-400.000 per mm^3.

Il *numero assoluto* di spermatozoi che si può eliminare con una ejaculazione ha variato fra 0 e 2.592.000.000, come limiti rispettivamente minimo e massimo *eccezionali*. Le cifre assolute che sono invece ricorse con maggior frequenza hanno oscillato fra 50.000.000-100.000.000 e 500.000.000-700.000.000.

E. M.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1919.

(Ogni Nota o Memoria porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

Chimica fisica. — *Sopra una dimostrazione termodinamica* [1]. Nota di ARRIGO MAZZUCCHELLI, presentata dal Socio E. PATERNÒ [2].

Nel suo *System of physical Chemistry* [3], W. Mc. C. Lewis richiama l'attenzione sui risultati divergenti a cui giungono due dimostrazioni, ambedue apparentemente ineccepibili, della relazione fra pressione e costante di equilibrio nelle soluzioni diluite. Una di esse è dovuta al Planck il quale, per via analitica, arriva alla formula 220 della 3ª ed. della sua *Thermodynamik*, mentre l'altra dimostrazione, data dal Rice [4], attraverso la descrizione di un ciclo isotermo giunge alla formula

$$\frac{d}{dP}\log K = \frac{V_1 - V_2}{RT},$$

ove K è la costante di equilibrio (costante di formazione del sistema finale, riferita, come usuale, alla concentrazione in volume) e $V_2 - V_1$ la variazione di volume dovuta alla trasformazione integrale del sistema iniziale nel finale. Invece la formula del Planck, dopo fattavi qualche trasformazione per tener conto del diverso significato dei simboli, conduce alla relazione

$$\frac{d}{dP}\log K = \frac{V_1 - V_2}{RT} + \Sigma n \frac{1}{v}\frac{dv}{dP}$$

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico dell'Università di Roma.

[2] Pervenuta all'Accademia il 14 luglio 1919.

[3] 2ª ed., vol. II, pag. 140.

[4] Trans. Faraday Soc., *12*, 1917, (318).

ove Σn simboleggia l'aumento del numero di molecole nel passaggio dal sistema iniziale al finale, e $\frac{1}{v}\frac{dv}{dP}$ è la compressibilità della soluzione.

Il Lewis osserva giustamente che la questione merita ulteriore studio; e la presente Nota vuole appunto indicare quale è la causa di questa divergenza, e il modo di eliminarla. Nella sua dimostrazione il Rice si serve di una modificazione del classico schema, dovuto al van 't Hoff (consistente in grandi serbatoi, di cui ognuno contiene una delle sostanze iniziali o finali a una concentrazione ben definita, e in una « scatola di equilibrio » attraverso cui può compiersi la trasformazione reversibile delle prime nelle seconde), in quanto che egli ammette inoltre che tutto ciò sia immerso in una massa di solvente, sottoposta a una pressione che può variarsi a nostra scelta, e che si trasmette liberamente al contenuto dei serbatoi e della scatola attraverso alcune delle loro pareti, semipermeabili per il solo solvente.

Si ottiene così lo scopo di poter variare liberamente la pressione sotto cui si opera, senza che con ciò variino le concentrazioni in volume delle varie sostanze. Riferendosi allora a una reazione qualsiasi, per es. $\lambda A = \mu B + \nu C$, si compie il seguente ciclo, di cui esporremo le formule algebriche più sotto, insieme colle modificazioni da noi proposte.

I. Trasformazione reversibile da sinistra a destra sotto la pressione costante P.

II. Variazione reversibile della pressione da P a P′.

III. Ritrasformazione reversibile da destra a sinistra sotto tale pressione P′.

IV. Ristabilimento reversibile della pressione da P′ a P.

Si ottiene così una formula che, sottratta da una, del tutto simile, ricavata da un ciclo $P + \delta P$ e P′, dà la espressione sopracitata.

Ora, io propongo di apportare allo schema precedente questa modificazione: invece di considerare tutto il sistema immerso nel solvente, che trasmette la pressione ed entra od esce liberamente dai varî serbatoi a seconda delle variazioni di quella, ammettere che tutti quanti i serbatoi e la scatola sian mantenuti del tutto separati durante le variazioni della pressione, che hanno luogo, per ciascuno di essi, mediante uno stantuffo speciale. Il ciclo allora, ripetendo fedelmente tutti i passaggi del Rice [1], si presenta così.

Col ben noto sistema di cilindri, stantuffi, e pareti semipermeabili, si converte reversibilmente λ moli di A in μ moli di $B + \nu$ moli di C. Se

[1] Notiamo tuttavia che la dimostrazione riuscirebbe assai più spigliata se, invece di due cicli, fra cui si fa poi la differenza, si eseguisse un ciclo solo fra P e $P + \delta P$; ma per rendere i ragionamenti più direttamente paragonabili ho preferito seguire in tutto il Rice.

le concentrazioni di queste sostanze nei varî serbatoi sono risp. a, b, c, il lavoro osmotico ottenuto sarà, come di consueto,

$$RT\left(\log K - \log \frac{b^\mu c^\nu}{a^\lambda}\right).$$

Inoltre, se la reazione da sinistra a destra è connessa con un aumento di volume $V_2 - V_1$ (sotto la pressione P), il sistema compirà pure il lavoro $P(V_2 - V_1)$.

II. Si varii ora reversibilmente la pressione da P a P′, mentre corrispondentemente il volume totale del sistema (i tre serbatoi + la scatola) varia da V_2 a V_2'. Ciò porta con sè un lavoro, da parte del sistema, dato da $\int_{V_2}^{V_2'} p\,dV_2$. D'altra parte questa variazione di pressione e di volume, date le condizioni in cui noi operiamo, ha portato con sè una variazione di concentrazione delle varie sostanze nei serbatoi, la quale, supponendo che tutte le soluzioni abbiano una compressibilità uguale fra loro e uguale a quella del solvente puro (come è giustificato, trattandosi di soluzioni diluite) sarà in ogni caso proporzionale a $\frac{V_2}{V_2'}$, talchè le varie concentrazioni divengono risp. $\frac{aV_2}{V_2'}, \frac{bV_2}{V_2'}, \frac{cV_2}{V_2'}$.

Naturalmente, varia anche la conc. totale del miscuglio nella scatola, ma di questo non occorre tener conto.

III. Successivamente, sotto la pressione costante P′, si fa retrocedere la reazione (decorrere, cioè, da destra a sinistra) ottenendo il lavoro osmotico $RT\left(\log \frac{b^\mu c^\nu}{a^\lambda}\left(\frac{V_2}{V_2'}\right)^{\mu+\nu-\lambda} - \log K_1\right)$ mentre, se a causa della trasformazione avvenuta il volume del sistema varia da V_2' a V_1' (sotto la pressione P′) si otterrà pure il lavoro $P'(V_1' - V_2')$.

IV. Finalmente si riconduce reversibilmente la pressione al valore P, e quindi il volume a V_1, ottenendosi il lavoro $\int_{V_1'}^{V_1} p\,dV_1$.

Pel 2° principio, la somma di tutti questi lavori deve essere zero, ossia deve essere

$$RT\left(\log K + \log\left(\frac{V_2}{V_2'}\right)^{\mu+\nu-\lambda} - \log K_1\right) +$$
$$+ P(V_2 - V_1) - P'(V_2' - V_1') + \int_{V_2}^{V_2'} p\,dV_2 - \int_{V_1}^{V_1'} p\,dV_1 = 0.$$

Integrando per parti:

$$\int_{V_2}^{V_2'} p\,dV_2 = P'V_2' - PV_2 - \int_P^{P'} V_2\,dp \;,\quad \int_{V_1}^{V_1'} p dV_1 = P'V_1' - \int_P^{P'} V_1\,dp \;,$$

e quindi, dopo qualche riduzione,

$$RT\left(\log K + (\mu + \nu - \lambda)\log\frac{V_2}{V'_2} - \log K_1\right) = \int_{P_1}^{P}(V_1 - V_2)\,dp\,.$$

Eseguendo lo stesso ciclo fra le pressioni $P + \delta P$ e P' avremmo avuto

$$RT\left(\log(K + \delta K) + (\mu + \nu - \lambda)\log\frac{V_2 - \delta V_2}{V'_2} - \log K_1\right) =$$

$$= \int_{P'}^{P+\delta P}(V_1 - V_2)\,dP = \int_{P'}^{P}(V_1 - V_2)\,dp + (V_1 - V_2)\,\delta P\,,$$

e, sottraendone la prima espressione,

$$RT\left(\log(K + \delta K) + (\mu + \nu - \lambda)\log\frac{V_2 - \delta V_2}{V_2} - \log K\right) = (V_1 - V_2)\,\delta P,$$

ovvero, al limite,

$$RT\,d\log K - (\mu + \nu - \lambda)\,d\log V_2 = (V_1 - V_2)\,dP\,,$$

cioè

$$\frac{d}{dP}\log K = \frac{V_1 - V_2}{RT} + (\mu + \nu - \lambda)\frac{1}{V_2}\frac{dV_2}{dP}$$

(ove l'indice 2 nel secondo termine a destra può senz'altro omettersi) che è la formula del Planck.

Se per tal modo si è dimostrato che, con la modificazione da noi suggerita, anche il ciclo usato dal Rice conduce alla formula del Planck, non è ancora provato che tale sostituzione sia di per sè giustificata e doverosa. Lo si potrà peraltro riconoscere, considerando che nei cicli termodinamici relativi alla legge di massa occorre assoggettare alle speciali condizioni imposte, caso per caso, dal problema, non solo la scatola di equilibrio, ma anche i serbatoi delle sostanze iniziali e finali. Così, per dimostrare in tal modo le due formule che dànno la variazione colla temperatura della costante di equilibrio a volume o a pressione costante [1], occorre (e basti questo accenno che potrò svolgere in altra occasione) che si compia a volume o risp. a pressione costante il passaggio dall'una all'altra temperatura delle sostanze iniziali e finali. Analogamente qui occorre che dette sostanze sian trattate, per quanto concerne le variazioni di pressione, come lo sono in realtà i sistemi in equilibrio a cui si vuole applicare tale formula. E questi, in tutti i casi finora sperimentati, sono appunto stati compressi in modo che subissero, senza alcun compenso, la diminuzione di volume richiesta

[1] La prima formula ha avuto, come è noto, dal van 't Hoff il nome di isocora, mentre la seconda, che in pratica è la sola usata per gli equilibrî gassosi, non ha nome: ma logicamente dovrebbe chiamarsi *isobara*.

dalla compressibilità delle soluzioni, mentre, per poter loro applicare con rigore la formula del Rice, sarebbe stato necessario che, prima di effettuare la compressione, si fosse aggiunto, caso per caso, tanto solvente che a compressione avvenuta il volume della soluzione fosse lo stesso come sotto la pressione iniziale.

Possiamo anche presentare la questione così: Nei casi finora sperimentati una compressione, oltre a far variare la costante di equilibrio nel senso che favorisce il sistema a volume totale minore, secondo che vuole il principio di Lechatelier-van 't Hoff, viene anche a operare un certo aumento della concentrazione in volume (a causa della compressibilità della soluzione). E questo aumento di concentrazione, pur non avendo influenza diretta sulla costante di equilibrio, favorisce però, come di regola generale, il sistema col numero di molecole minore, di cui aumenta così la quantità relativa, talchè, nella misura sperimentale, tale aumento figura come una ulteriore variazione della costante di equilibrio; onde è logico che la formula teorica, se vuol esser rigorosa, debba pure tenerne conto.

Fisica. — *L'« audion » come rivelatore di azioni elettrostatiche.* Nota del prof. RICCARDO ARNÒ, presentata dal Socio G. COLOMBO [1].

È noto che negli « audion » l'emissione di elettroni (negativi) da parte del filamento incandescente dà luogo ad una vera e propria corrente elettrica (positiva) dall'elettrodo più freddo al più caldo, cioè dalla lamina al filamento stesso incandescente: la cui intensità di regime può essere di qualche milliampère, se si crea artificialmente tra filamento incandescente e lamina una differenza di potenziale elettrico di alcune diecine di volt, mediante, per esempio, una batteria di accumulatori connessa col polo negativo al filamento incandescente.

Tra il filamento e la lamina è situata la cosiddetta griglia, cioè un conduttore a maglie metalliche, isolato; perciò il flusso di elettroni emanante dal filamento resta in un certo qual modo filtrato dalla griglia, e ne consegue che il segno e il valore del potenziale elettrico della griglia hanno influenza sul valore della corrente di ionizzazione.

Le esperienze che seguono [2] mostrano quale grande sensibilità possa

[1] Pervenuta all'Accademia il 26 luglio 1919.

[2] Gli esperimenti descritti nella presente Nota furono ampiamente discussi col chiarissimo prof. Quirino Majorana, al quale porgo vive grazie per il gentile interessamento a questi miei studî, che spero saranno l'inizio di nuove ricerche e tali da portare nuovi contributi sul funzionamento dell'« audion » anche per quanto riguarda la sua pratica applicazione nella telegrafia senza fili.

presentare l'« audion » come rivelatore di azioni elettrostatiche *brusche* agenti sulla griglia.

La disposizione sperimentale è la seguente: un « audion », tipo francese con filamento incandescente rettilineo, griglia costituita da un filo metallico avvolto a solenoide attorno al filamento incandescente, e lamina costituita da un tubetto metallico cilindrico, esterno alla griglia a solenoide e avente anch'esso per asse lo stesso filamento incandescente, è montato su una tavoletta isolante di ebanite in modo da poggiare su essa soltanto per mezzo di tre delle quattro prese di corrente, e cioè le due per la corrente di incandescenza del filamento e quella per la lamina. La presa della griglia conviene che resti sospesa in aria per la più rigorosa isolazione; ad essa viene connessa un'appendice metallica formante una specie di antenna.

Il filamento è portato all'incandescenza mediante un elemento doppio di accumulatore (volt 4, amp. 0,6).

Tra il filamento incandescente (negativo) e la lamina (positiva), si stabilisce un circuito esterno all'« audion », contenente una batteria di accumulatori (80 a 120 volt), un milliamperometro e un telefono. Il milliamperometro segnerà da tre a cinque milliampère.

Ciò posto, se all'antenna di griglia si avvicina *bruscamente* una bacchetta di ebanite elettrizzata, all'atto stesso dell'avvicinamento la corrente di ionizzazione cade istantaneamente a zero. Avvicinando la bacchetta con grande lentezza, non si nota alcun effetto.

Una spiegazione probabile dell'azione è la formazione, per induzione elettrostatica di cariche elettriche positive sul filamento incandescente. Il filamento incandescente rappresenta infatti la parte del circuito (filamento, accumulatori ecc.) più vicina alla griglia, la quale rappresenta alla sua volta la parte più lontana di un conduttore (antenna-griglia) sul quale agisce per induzione la carica elettrica negativa della bacchetta di ebanite elettrizzata. Cosicchè, essendo negativa la carica inducente, è positiva la carica indotta nell'antenna della griglia e negativa quella indotta nella griglia; positiva quella indotta dalla griglia sul filamento e negativa quella indotta da essa sulle parti lontane del circuito di alimentazione.

Una carica positiva del filamento incandescente ha per effetto la neutralizzazione locale, sul filamento stesso, degli elettroni che altrimenti contribuirebbero a formare l'intensità di corrente di regime; tale intensità perciò ne risulta ridotta, e, per sufficiente valore della carica indotta, addirittura annullata.

La spiegazione probabile della non apprezzabile azione nel caso di avvicinamento *lento* della bacchetta di ebanite elettrizzata all'antenna di griglia si ha nella esiguità delle masse elettriche positive, in tal caso generate per induzione elettrostatica in ogni tempuscolo sul filamento incandescente; sicchè tali masse positive possono risultare subito neutralizzate dall'emissione negativa del filamento incandescente e restare praticamente senza azione.

Con una bacchetta di vetro elettrizzata (carica positiva), si ha annullamento della corrente di ionizzazione nell'« audion » all'atto dell'allontanamento, anzichè all'atto dell'avvicinamento: e ciò è in armonia col segno inverso della carica inducente, rispetto a quella dell'ebanite.

Anche in questo caso il fenomeno si constata solo per spostamenti bruschi della carica inducente.

Ma una variazione brusca del potenziale elettrico sulla griglia (la quale, com'è detto, agisce per induzione elettrostatica sul filamento incandescente) si può ottenere anche modificando, anzichè la distanza di una determinata massa elettrica inducente dall'antenna di griglia, la capacità elettrica del sistema induttore: ed infatti l'esperienza consente di dimostrare che mantenendo, per esempio, una bacchetta di ebanite o di vetro elettrizzata in posizione fissa rispetto all'antenna di griglia, basta interporre e togliere *bruscamente* tra la bacchetta di ebanite elettrizzata e l'antenna di griglia, oppure introdurre *bruscamente* tra la bacchetta di vetro elettrizzata e l'antenna di griglia, un corpo conduttore qualsiasi, per esempio una lastrina metallica o una mano, perchè la conseguente variazione nella distribuzione delle linee di forze elettriche, e quindi nel potenziale elettrico del corpo induttore, si ripercuota esattamente sulla corrente di ionizzazione.

L'« audion » rileva piccolissimi spostamenti del corpo induttore o piccolissime variazioni della sua capacità elettrostatica, tanto che è possibile d'influenzarlo anche a distanza di parecchi metri, e seguire per esempio su un milliamperometro a lettura diretta con gli spostamenti dell'indice sulla scala anche i tremolii della mano che regga la bacchetta elettrizzata.

Tutti i fenomeni ora descritti cambiano segno se, invece di agire sull'antenna di griglia, si agisce su una parte qualsiasi dei conduttori connessi col filamento incandescente. Ciò non ha bisogno di spiegazione.

Un particolare interessante dell'esperienza, in favore della spiegazione probabile sopradata, consiste in una specie di isteresi che presenta l'« audion », dopo azioni elettrostatiche energiche, per riprendere il valore di regime nella corrente di ionizzazione. Ciò evidentemente dipende dal tempo necessario al filamento incandescente per saturare, con la limitata emissione di elettroni di cui esso è capace, le cariche positive indotte su esso.

Fisiologia. — *Ricerche sulla natura del veleno dell'anguilla. I: L'ittiotossico è termostabile* [1]. Nota del dott. G. Buglia, presentata dal Corrisp. V. Aducco [2].

Angelo Mosso [3], studiando il veleno dell'anguilla, constatò che il siero del sangue di questo animale perde l'azione tossica, se viene riscaldato a 100° C. Ugolino Mosso [4], nelle ricerche che fece per stabilire la natura di detto veleno, trovò che la temperatura di 70° C è già sufficiente per distruggere l'azione tossica del siero dell'anguilla. Più recentemente Camus e Gley [5] ottennero la scomparsa dell'azione globulicida del siero di anguilla portandolo alla temperatura di 58° C per 15'. Io stesso, riferendo i risultati di alcune mie ricerche sulla tossicità dell'estratto acquoso del corpo delle giovani anguille ancora trasparenti (*cieche*), della pelle di anguilla adulta e del *liquido filante*, secreto esternamente dalle *cieche* e dalle anguille [6], emisi l'opinione che la sostanza tossica, contenuta in detti liquidi, venga alterata o distrutta dal calore.

Da tutte queste ricerche risulterebbe dunque che il veleno dell'anguilla è una sostanza *termolabile.*

Occupandomi di nuovo presentemente dell'azione tossica dell'estratto acquoso del corpo di giovani anguille (*cieche*), ho avuto occasione di fare esperimenti anche col siero di sangue dell'anguilla adulta e studiare gli effetti del riscaldamento su questi liquidi.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di fisiologia della R. Università di Pisa, diretto dal prof. V. Aducco.

(2) Pervenuta all'Accademia il 17 luglio 1919.

(3) A. Mosso, *Un venin dans le sang des murénides.* Arch, it. de biol., tom. X, 1888, pag. 141-169.

(4) U. Mosso, *Recherches sur la nature du venin qui se trouve dans le sang de l'anguille.* Rend. d. R. Acc. dei Lincei, 2 giugno 1889, pag. 804; Arch. it. de biol., tom. XII, 1889, pag. 229-236.

(5) L. Camus et E. Gley, *Recherches sur l'action physiologique du serum d'anguille. Contribution à l'étude de l'immunité naturelle et acquise.* Arch. intern. de pharmacodyn., vol. V, 1898, pag. 247-305; E. Gley, *Travaux du laboratoire,* tom. I, Masson et C. éd., Peris 1912, pag. 18-86.

(6) G. Buglia, *Sull'azione tossica che gli estratti acquosi del corpo delle giovani anguille ancora trasparenti* (*cieche*), *esercitano sul sangue.* Atti d. Soc. Tosc. di Sc. Nat. Vol. XXXI, 1917; Arch. it. de biol., 1919, tom, LXIX, pp. 119-133; G. Buglia, *Sulla tossicità degli estratti acquosi del corpo delle giovani anguille ancora trasparenti* (*cieche*). Atti d. Soc. Tosc. di Sc. Nat., vol. XXXII, 1919; Arch. it. de biol., 1919, tom. LXIX.

I risultati ottenuti dimostrano, contrariamente a quanto risulta dalle ricerche precedenti, che il veleno dell'anguilla è una sostanza *termostabile*.

Il riscaldamento fa scomparire l'azione tossica dell'estratto acquoso del corpo di *cieche* e del siero di sangue di anguilla, non perchè distrugga il veleno, ma perchè provoca fenomeni di adsorbimento da parte delle sostanze albuminose, che sono contenute in questi liquidi e che coagulano sotto l'azione del calore. Infatti con opportuni mezzi si riesce facilmente a ridare al liquido, reso innocuo dall'azione del calore [1], la sua tossicità normale.

Ho ottenuto questo risultato, sottoponendo a disgregazione meccanica (mercè la macinazione in mortaio di vetro, con cristallini di quarzo) il precipitato fioccoso dato dall'estratto di *cieche* e il coagulo gelatinoso formatosi dal siero di anguilla, quando vengono riscaldati per un certo tempo a temperature prossime o superiori a quella di 60° C. Anche con la digestione triptica ho potuto raggiungere effetti analoghi a quelli ottenuti col disgregamento meccanico, però non costantemente e non sempre in modo così manifesto.

Riferisco alcuni esperimenti, in cui sottoposi all'azione del disgregamento meccanico l'estratto acquoso del corpo di *cieche* e il siero del sangue di anguilla, dopo averli tenuti alla temperatura di 70° e 100° C, rispettivamente per 30′ e 15′.

I. — *Esperimenti con estratto acquoso del corpo di* CIECHE:

A) Si prepara l'estratto di *cieche* tritando nel mortaio, con cristalli di quarzo, 10 gr. di *cieche* e aggiungendo alla poltiglia 20 cc. di soluzione di NaCl al 0,9 %. La miscela viene agitata e centrifugata. L'estratto ha reazione neutra; sottoposto all'azione del calore, dà abbondante precipitato fioccoso.

a) Azione tossica generale:

2 cc. di estratto di *cieche*, iniettati nella cavità addominale di una rana, producono la morte (dando i soliti fenomeni di avvelenamento, analoghi a quello del siero di anguilla) in 4 ore.

2 cc. dello stesso estratto, portati alla temperatura di 70° C per 30′, iniettati nella cavità addominale di una rana, non producono fenomeni tossici degni di nota. L'animale muore dopo 3 giorni.

2 cc. dell'estratto, portati a 70° C per 30′, vengono disgregati in mortaio. Si ottiene una miscela di colore grigio giallastro che, dopo averla lasciata sedimentare per qualche minuto, si inietta nella cavità addominale di una

[1] In realtà il calore non rende del tutto innocui l'estratto di *cieche* e il siero di anguilla: infatti l'iniezione di questi liquidi riscaldati produce negli animali, sebbene dopo lungo tempo, fenomeni di intossicamento più o meno gravi, ed anche la morte. La qual cosa si potrebbe spiegare ammettendo che in questi liquidi, pervenuti nell'organismo vivente, si metta in libertà dopo un certo tempo, la sostanza tossica adsorbita.

rana. Un'ora circa dopo l'iniezione, compaiono evidenti fenomeni di avvelenamento (catalessi, paresi, paralisi e contratture fibrillari agli arti posteriori). La morte avviene entro 5 ore.

b) Azione emolitica:

Soluzione di Na Cl 0.9 % cc.	Estratto di cieche gocce	Sangue defibrinato di cane gocce	Dopo 6 ore
1	—	1	niente emolisi
"	2	"	emolisi
"	5	"	emolisi
"	2 a 70° per 30′	"	niente emolisi
"	5 id.	"	niente emolisi
"	2 a 70° per 30′ eppoi disgregato	"	emolisi
"	5 id.	"	emolisi

B) Si prepara l'estratto di *cieche* come precedentemente.

a) Azione tossica generale:

2 cc. di estratto di *cieche*, iniettati nella cavità addominale di una rana, dànno la morte in ore 1 e 45′.

2 cc. dello stesso estratto, portato alla temperatura di 100° C per 15′, iniettati nella cavità addominale di una rana, non producono fenomeni tossici degni di nota. L'animale muore dopo 2 giorni.

2 cc. dell'estratto, portato a 100° C per 15′ eppoi disgregato in mortaio, iniettati nella cavità addominale di una rana, dopo 2 ore dànno fenomeni di avvelenamento consistenti in paralisi degli arti posteriori, tremori, contratture. La morte avviene dopo 7 ore e 30′.

b) Azione emolitica:

Soluzione di Na Cl 0.9 % cc.	Estratto di cieche cc.	Sangue defibrinato di cane	Dopo 12 ore
1	—	1 cc.	niente emolisi
"	1	" "	emolisi
"	1 a 100° C per 15′	" "	niente emolisi
"	1 a 100° C per 15′ eppoi disgregato	1 "	niente emolisi
"	1 id.	1 goccia	lieve emolisi

II. — *Esperimenti con siero di sangue di anguilla*:

A) Il siero venne ottenuto dal sangue raccolto recidendo la coda di 4 grosse anguille del peso medio di 300 grammi. Colore giallo bruno con qualche riflesso verdastro, reazione leggermente alcalina. Riscaldato a 70° C, non precipita in fiocchi ma forma una massa gelatinosa di colore verdastro opaco.

a) Azione tossica generale:

$\frac{1}{2}$ cc. di questo siero, iniettato nella cavità addominale di una rana, ne produce la morte (dando i caratteristici fenomeni di avvelenamento) in ore 3 e 15′.

$\frac{1}{2}$ cc. dello stesso siero, portato alla temperatura di 70° C per 30′ e iniettato in una rana, non produce fenomeni tossici degni di nota. Dopo 2 giorni l'animale è ancora vivo.

$\frac{1}{2}$ cc. del siero, riscaldato a 70° C per 30′, viene disgregato in mortaio. La mescolanza, di colore grigio verdastro, si lascia sedimentare per qualche tempo, eppoi si inietta nella cavità addominale di una rana. Produce la morte dell'animale (dando fenomeni analoghi a quelli prodotti da siero normale), in 5 ore.

b) Azione emolitica:

Soluzione di Na Cl 0.9 % cc.	Estratto di cieche gocce	Sangue defibrinato di cane gocce	Dopo 6 ore
1	—	1	niente emolisi
"	2	"	lieve emolisi
"	5	"	emolisi
"	2 a 70° per 30′	"	niente emolisi
"	5 id.	"	niente emolisi
"	2 a 70° per 30′ eppoi disgregato	"	emolisi
"	5 id.	"	emolisi

B) Siero di sangue ottenuto da 3 grosse anguille. Colore verdastro, reazione leggermente alcalina. Riscaldato a 100° C non fiocchifica, ma dà un coagulo gelatinoso di colore verdastro, opaco.

a) Azione tossica generale:

$\frac{1}{2}$ cc. di questo siero, iniettato nell'addome di una rana, ne produce la morte (dando i caratteristici fenomeni di avvelenamento) in ore 2 e 10′.

$\frac{1}{2}$ cc. dello stesso siero, portato alla temperatura di 100° C per 15′ e iniettato nell'addome di una rana, non produce alcun fenomeno tossico degno di nota. L'animale muore dopo 3 giorni.

$\frac{1}{2}$ cc. del siero, riscaldato a 100° C per 15′ eppoi disgregato in mortaio, iniettato nell'addome di una rana l'uccide, dando i soliti fenomeni del siero normale, in ore 4.

b) Azione emolitica:

Soluzione di Na Cl 0.9 % cc.	Estratto di cieche gocce	Sangue defibrinato di cane gocce	Dopo 6 ore
1	—	1	niente emolisi
»	2	»	emolisi
»	2 a 100° per 15′	»	niente emolisi
»	5 id.	»	lieviss. emolisi
»	2 o 100° per 15′ eppoi disgregato	»	emolisi
»	5 id.	»	emolisi

Una prova indiretta che la tossicità dell'estratto di *cieche* e del siero di anguilla scompare col riscaldamento, perchè il veleno viene adsorbito dalle sostanze albuminose contenute in questi liquidi o che coagulano per l'azione del calore, si può avere sperimentando con la bile di anguilla che è priva, o quasi del tutto, di sostanze albuminose.

La bile di anguilla (come quella di altri animali) conserva inalterata la sua tossicità anche se riscaldata a 100° C; la perde, invece, se si riscalda dopo aggiunta di sostanze albuminose (ad es. estratto di muscoli).

I risultati che ho riferito dimostrano dunque che il veleno dell'anguilla, contrariamente a quanto si riteneva è una sostanza termostabile.

Fisiologia. — *Ricerche sulla secrezione spermatica. VI: Osservazioni sulla secrezione spermatica dell'uomo.* Nota di G. Amantea e T. Rinaldini, presentata dal Corrisp. S. Baglioni [1].

Continuando l'esposizione dei principali fatti osservati nelle nostre ricerche sulla secrezione spermatica dell'uomo, dei quali abbiamo riassunto quelli più generali nella Nota precedente [2], riferiremo in questa i dati raccolti finora, tenendo presenti, secondo il piano e il metodo di indagine descritti, i più importanti fattori, presumibilmente capaci di indurre variazioni apprezzabili nel volume dello sperma e nel numero degli spermatozoi eliminati.

Merita considerazione il fattore dell'*età del soggetto.* Nessuno si era finora proposto di indagare, con metodo fisiologico e assumendo opportuni criterî di misura, l'influenza dell'età sulla secrezione spermatica. Ma avendolo voluto noi tentare, ci siamo trovati di fronte a non lievi difficoltà, quando si è trattato di rivolgere l'attenzione alle età estreme (pubertà e vecchiaia). Abbiamo potuto compiere osservazioni solo su soggetti tra i 19 e i 64 anni; e possiamo affermare che, tenendo conto del volume dell'ejaculato e del numero degli spermatozoi corrispondenti a ciascuna ejaculazione, differenze sostanziali non abbiamo rilevato. Merita tuttavia menzione il caso di un nostro soggetto di 64 anni, che dichiarava di avere oramai incompleta e breve l'erezione da non potere compiere il coito, ed eliminava un numero di spermatozoi superiore a quello raggiunto, a parità di condizioni, da soggetti adulti e giovani.

Da 60 dei nostri soggetti abbiamo potuto ottenere notizie esatte circa la comparsa (quasi sempre in seguito a masturbazione) della *prima ejaculazione* di liquido filante e limpido, riferibile alle glandole accessorie, e seguìta a breve intervallo dall'ejaculazione di vero e proprio sperma: si verificò tra i 9 e i 17 anni, come limiti estremi, e con la maggiore frequenza tra i 12 e i 14 anni.

Pur avendo in generale sperimentato su soggetti in buone *condizioni fisiche,* abbiamo motivi per affermare che lo stato apparentemente florido ovvero quello deperito non trovano spesso diretta corrispondenza nel volume dell'ejaculato e nel numero di spermatozoi eliminati.

[1] Pervenuta all'Accademia il 22 luglio 1919.

[2] G. Amantea e T. Rinaldini. Rendiconti d. R. Acc. d. Lincei, vol., XXVIII, 1° semestre, 1919.

L'avere ricercato anche i dati relativi alla *prolificità nella famiglia*, ci ha permesso di stabilire che i soggetti, i quali ci hanno fornito gli ejaculati più densi di spermatozoi, appartengono in grande maggioranza a famiglie, in cui la prolificità è la regola per gli ascendenti maschili. Riconosciamo però la necessità di un maggior numero di osservazioni in questo senso per poter trarre sicure induzioni.

Il *temperamento sessuale*, dedotto oltre che dalle dichiarazioni del soggetto, anche dalla sua *capacità sessuale* e dalle sue *abitudini sessuali*, influisce sul numero di spermatozoi e sul volume dell'ejaculato, inquantochè ad esso appunto può essere, entro certi limiti, legato il funzionamento più o meno attivo dei testicoli e delle glandole accessorie dell'apparato genitale maschile. Tale influenza si collega, così, intimamente con quella del riposo sessuale, di cui diremo in seguito.

Il temperamento sessuale può inoltre spiegare, il più delle volte, anche il *passato sessuale*. Quantunque individui con passato sessuale molto attivo e laborioso ci si siano dimostrati capaci di ejaculazioni, che per volume di liquido e densità di spermatozoi eguagliavano o superavano altre di soggetti con passato calmo e morigerato, non si può negare che la questione potrebbe convenientemente risolversi solo potendo seguire determinati soggetti durante tutta la loro vita sessuale, ciò che non sarebbe certo realizzabile almeno per l'uomo.

Uno fra i più importanti argomenti che abbiamo dovuto considerare, e che ci ha permesso osservazioni meritevoli di più dettagliata menzione, è quello dell'influenza esercitata sulla secrezione spermatica dalle *malattie veneree* o da *malattie di altra natura dei testicoli, degli epididimi e del cordone*. In nessuno dei nostri soggetti ci è stato possibile di eseguire osservazioni prima e dopo che la malattia fu contratta. Abbiamo perciò potuto solo tener conto della malattia in atto o pregressa, e ciò su molti dei nostri soggetti.

Più precisamente, su un totale di n. 91 soggetti si ebbero:

n. 25 casi di blenorragia pregressa o in atto senza complicazioni;
» 5 » » sifilide pregressa o in atto (dei quali 1 compreso pure fra i blenorragici e 1 fra i varicocelatosi);
» 14 » » epididimite pregressa o in atto da blenorragia;
» 1 » » gomma testicolare in atto (compreso pure fra i blenorragici, fra gli epididimitici e fra i luetici);
» 5 » » orchite pregressa unilaterale da parotite;
» 3 » » orchite pregressa unilaterale da trauma;
» 17 » » varicocele sinistro (dei quali 10 compresi pure fra i blenorragici e 1 fra i luetici).

Tutti gli altri soggetti non avevano mai sofferto malattie veneree e presentavano normali i testicoli e i loro annessi.

Il fatto più saliente, che si ricava dal complesso delle osservazioni eseguite su soggetti con blenorragia pregressa o in atto, è rappresentato dalle cifre sensibilmente più basse, raggiunte per ciò che riguarda il *numero relativo* (per mm^3.) e *assoluto* (per ejaculazione) di spermatozoi eliminati, in confronto con quelle trovate nel complesso delle osservazioni sui soggetti sani. In questi ultimi infatti la densità di spermatozoi per mm^3. ha variato fra 0 e 480.000 (come limiti eccezionali), con una maggior frequenza di cifre oscillanti fra 50.000-100.000 e 350.000-400.000; nei primi invece la densità ha variato fra 0 e 308.000 (come limiti eccezionali), con una maggior frequenza di cifre oscillanti fra 10.000-50.000 e 120.000-190.000.

Il numero assoluto variò nei sani fra 0 e 2.592.000.000 (limiti estremi eccezionali), con una maggiore ricorrenza di cifre oscillanti fra 50.000.000-100.000.000 e 400.000.000-700.000.000; mentre nei blenorragici si ebbero come limiti estremi eccezionali 0 e 862.000.000, con una maggiore ricorrenza di cifre oscillanti fra 5.000.000-40.000.000 e 150.000.000-300.000.000.

La differenza tra i due gruppi è risultata evidente, e il numero delle osservazioni ci sembra che permetta di assumere i dati riferiti a base di una conclusione sicura, indipendentemente dagli altri fattori comuni e compensantisi.

Il *volume dell'ejaculato* ha presentato variazioni nello stesso senso ma meno marcate che non quelle del numero di spermatozoi. Nei riguardi dei rapporti con quest'ultimo, si è però sempre verificata la costanza delle leggi generali esposte nella Nota precedente [1].

Nei casi di epididimite blenorragica, sia bilaterale sia unilaterale, tutti i fatti suesposti sono risultati molto più marcati. Rileviamo ancora che spesso negli epididimitici lo sperma si è presentato più fluido e meno gelatinoso che nei normali. In uno soltanto dei nostri soggetti con pregressa epididimite bilaterale si accertò l'*azoospermia;* ma si tratta precisamente di quello che figura anche tra i luetici e che presentava durante il periodo di osservazione una gomma testicolare in atto. Non ci risulta una diminuzione più accentuata di spermatozoi nei soggetti con epididimite bilaterale rispetto a quelli con epididimite unilaterale. Ma siccome in questi ultimi, a parità di altri fattori, le cifre sono rimaste sempre decisamente al disotto della metà di quelle medie dei soggetti sani, si potrebbe pensare che *dall'epididimo malato, anche se da un solo lato, partono forse stimoli abnormi inibitorii pel trofismo testicolare e per la spermatogenesi.*

Sulla base di analoghe osservazioni, lo stesso possiamo affermare pei casi di varicocele sinistro; mentre pei casi di sifilidé, di orchite da parotite e di orchite traumatica, riteniamo ancora troppo scarso il numero dei dati raccolti per trarre fondate conclusioni.

[1] G. Amantea e T. Rinaldini, loc. cit.

Nei riguardi dell'eventuale influenza, sulla secrezione spermatica, delle *malattie generali e delle relative cure* (*pregresse e attuali*), non risultano particolari rapporti apprezzabili.

Così pure non risulta una decisa influenza da parte delle varie *abitudini personali ai cibi, alle bevande, agli alcoolici, al caffè, al tabacco.* Vedremo nondimeno quale possa essere l'influenza *immediata* dell'ingestione dei cibi, di bevande alcooliche, nervini ecc.

Per uno stesso soggetto non abbiamo osservato differenze notevoli e costanti, nel volume dell'ejaculato e nel numero di spermatozoi, col variare della *modalità dell'atto* sessuale (coito, masturbazione, ecc.). Va eccettuato il solo caso della *polluzione*, per cui, pur non avendo potuto valutare il volume totale del liquido eliminato, del quale si potè avere sempre un'aliquota soltanto, il numero di spermatozoi calcolato per $mm.^3$ è stato trovato costantemente e marcatamente scarso, anche in confronto colle cifre ottenute per gli stessi soggetti in seguito a coiti preceduti da un riposo sessuale più breve che le polluzioni. Se successive osservazioni confermeranno tali risultati, soprattutto nei casi di polluzioni patologiche, potrà rimanerne chiarita la genesi dell'effetto debilitante delle polluzioni stesse, che in base a questi nostri primi risultati sembrerebbe doversi mettere piuttosto in rapporto con l'attività dei centri nervosi, che non con vere e proprie perdite materiali.

La *durata dell'atto* non ci ha permesso di osservare particolari differenze. Interessa tuttavia rilevare che la durata media del coito nei nostri soggetti — a parte ogni influenza della volontà — risultò di 3′ — 10′ (*durata media normale*).

Tenendo conto del *grado e decorso dell'eccitamento* che può precedere l'atto sessuale, conviene distinguere un eccitamento, per così dire, *occasionale*, che insorge sotto forma di eccitamento soprattutto psichico, favorito da condizioni occasionali varie (disoccupazione, noia, ecc.), e determinato da stimoli varii, specialmente visivi; un eccitamento *da euforia*, quale può per es. seguire a un pasto abbondante e succolento; e infine un eccitamento *da vero bisogno sessuale*, che ricorre a intervalli determinati di riposo sessuale e può assumere gradi varî di intensità nei diversi soggetti. Ebbene, mentre nei primi due casi un grado di eccitamento anche marcato può coincidere con una eliminazione anche assai scarsa di sperma e di spermatozoi, nel terzo caso l'eliminazione è per solito corrispondente al periodo di riposo che l'ha preceduta, e di cui vedremo in seguito tutta l'importanza.

Abbiamo accennato che i *cibi* e le *bevande* (alcoolici in dose eccitante, nervini in genere) possono portare a uno stato euforico, che favorisce senza dubbio l'eccitamento sessuale. Per ciò l'effetto in questo senso è massimo nel periodo dell'assorbimento digestivo. Ma l'effetto stesso si esplica in direzione opposta per alimenti o bevande ingerite in quantità eccessiva.

Nessuna osservazione però abbiamo potuto eseguire in condizioni di vero abuso.

Il *lavoro muscolare* e quello *cerebrale*, se di grado rilevante, influiscono più o meno intensamente sul bisogno sessuale, deprimendolo; mentre una vera influenza sul volume dell'ejaculato e sul numero di spermatozoi non abbiamo potuto finora rilevare.

Abbiamo tentato anche di stabilire se esistesse un rapporto tra il *comportamento* e il *grado del piacere* durante l'atto e nell'ejaculazione, e il volume di liquido e il numero di spermatozoi eliminati. Fondandoci all'uopo sui dati riferiti da soggetti intelligenti, capaci di fine autosservazione e di critica, abbiamo accertato che talora ad atti sessuali, decorsi quasi senza vera sensazione di voluttà, corrispondono ejaculati normali per volume e densità di spermatozoi.

Ma il fattore che tra tutti merita speciale attenzione, come quello che ha dimostrato di influenzare in maniera decisa e in tutti i casi la secrezione spermatica, è rappresentato dal *riposo sessuale*, ossia dal periodo più o meno lungo di tempo che intercede fra atti sessuali successivi. L'influenza del riposo sessuale ci è risultata sempre positiva, nel senso che un più lungo riposo porta a un aumento nella quantità dell'ejaculato e nel numero degli spermatozoi, fino a un certo limite massimo e non più superabile, che varia a seconda degli individui. Coll'individuo varia altresì l'ampiezza del periodo di riposo minimo, necessario a raggiungere tale limite massimo. In altre parole, si può affermare che *per ogni soggetto esiste un periodo di riposo sessuale, al quale corrisponde l'ejaculazione della massima quantità di sperma e del massimo numero di spermatozoi.* Cosicchè, per atti sessuali successivi a intervalli corrispondenti a tale periodo, il volume di liquido e il numero di spermatozoi eliminati, a parità di altri fattori, si mantengono pressochè costanti intorno ai rispettivi limiti massimi.

Come poi per ogni soggetto esiste un periodo di riposo sessuale, cui corrisponde il massimo di ejaculato e il massimo di spermatozoi eliminabili, così pure bisogna ammettere che *per ogni soggetto esiste un periodo di riposo sessuale capace di condurre più o meno rapidamente, e sempre nel caso che non intervenga prima esaurimento dei centri nervosi per gli atti sessuali, all'eliminazione della minima quantità di sperma e all'azoospermia.* In uno dei nostri soggetti, capaci di compiere tre o quattro coiti successivi coll'intervallo di mezz'ora, al terzo si arrivava all'*azoospermia*, e al quarto talora anche alla *aspermia.* Un altro invece, di pari capacità sessuale, al quarto eliminava ancora parecchi milioni di spermatozoi.

Nelle ricerche di cui abbiamo sommariamente riassunto i principali risultati non si è potuto tener conto della vitàlità degli spermatozoi, per la difficoltà di avere lo sperma nelle opportune condizioni di tempo e di conservazione a ciò indispensabili.

Si potè invece rivolgere l'attenzione ai caratteri morfologici degli spermatozoi, e accertare che spermatozoi normali, eguali tra loro nella dimensione e nella forma, si eliminano dai soggetti robusti e sani; mentre spermatozoi disuguali tra loro per forma e dimensioni si eliminano dai blenorragici, più ancora dagli epididimitici, e talvolta anche dai soggetti di costituzione gracile.

E. M.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXVIII. (1892-1919). Fasc. 11°-12°, Sem. 1°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXVII. (1862-1918). Fasc. 7°-10°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-10.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. 10; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

P. MAGLIONE & C. STRINI (successori di E. Loescher & C.) — *Roma.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1919.

E. Mancini *Segretario d'ufficio responsabile.*

Pubblicazione bimensile. **N. 3-4.**

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXVIII.° — Fascicoli 3°-4°

2° Semestre.

Comunicazioni pervenute all'Accademia durante le ferie del 1919.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Renpiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili del l'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 9 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a pagine 4 ½.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 30 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta a stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta, pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 50 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 30 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1919.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo)

Matematica. — *Sopra una disuguaglianza fra i generi di una superficie algebrica.* Nota I di ANNIBALE COMESSATTI, presentata dal Corrisp. F. SEVERI [1].

1. Fin dal 1905 Castelnuovo ha dimostrato che una superficie algebrica i cui generi p_g, p_a soddisfano alla disuguaglianza $p_g \geq 2(p_a + 2)$ contiene un fascio irrazionale di curve [2]. Questo importante risultato è stato poi maggiormente precisato da Rosenblatt, il quale ha fatto vedere che, se si eccettuano le superficie contenenti un fascio di curve razionali (rigate) od ellittiche, e le superficie delle coppie di punti di due curve, una delle quali ha il genere 2, la disuguaglianza predetta può essere soddisfatta soltanto in corrispondenza a tipi che posson dirsi banali, e di cui rimane tuttavia dubbia l'esistenza [3].

Già da tempo il prof. Castelnuovo m'aveva cortesemente comunicata la previsione che i risultati ottenuti da Rosenblatt con metodo aritmetico-geometrico procedente da alcune disuguaglianze fondamentali della teoria delle

(1) Pervenuta all'Accademia il 10 settembre 1919.

(2) Castelnuovo, *Sulle superficie aventi il genere aritmetico negativo* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, T. XX (1905), pp. 55-60].

(3) Vedi la Nota di Rosenblatt, *Sur les surfaces irrégulières dont les genres satisfont à l'inégalité $p_g \geq 2(p_a + 2)$* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, T. XXXV (1913), pp. 237-244] dove si trovano le citazioni di altri due lavori del medesimo A.

superficie algebriche, potessero ritrovarsi e maggiormente precisarsi spingendo più in là le conseguenze del procedimento trascendente con cui egli era pervenuto a stabilire l'esistenza del fascio irrazionale sulle superficie in questione.

L'autorevole previsione è stata confermata dalla ricerca, di cui nella presente Nota espongo la linea direttiva, la parte sostanziale dei principali ragionamenti, e le conclusioni, rimandando la parte di dettaglio e gli accessorî non essenziali ad altra pubblicazione.

2. La considerazione d'una superficie algebrica F con $p_g \geq 2(p_a + 2)$ conduce con Castelnuovo a studiare il comportamento di $q = p_g - p_a = n + 1$ funzioni di due variabili

$$u_1(xy)\,,\; u_2(xy)\,, \ldots,\; u_{n+1}(xy)\,,$$

(integrali picardiani di 1ª specie di F), indipendenti nel senso che nessuna loro combinazione lineare a coefficienti costanti può esser costante, fra i cui $\binom{n+1}{2}$ jacobiani $X_{ik} = \frac{D(u_i u_k)}{D(xy)}$ intercedono $m \geq \binom{n-1}{2} + 1$ relazioni lineari omogenee indipendenti, del tipo

$$\sum a_{ik}^{(\nu)} X_{ik} = 0\,, \tag{1}$$

$$(i\,, k = 1\,, 2\,, \ldots, n+1\;;\; i \neq k\;;\; \nu = 1\,, 2\,, \ldots, m)\,,$$

a coefficienti costanti.

La condizione affinchè una combinazione lineare delle (1), cioè una relazione del tipo

$$\sum \varrho_{ik} X_{ik} = 0\,, \tag{2}$$

esprima l'annullarsi dello jacobiano di una combinazione lineare delle u, e quindi l'esistenza di due integrali di 1ª specie di F funzioni uno dell'altro, è che i numeri ϱ_{ik} sian del tipo $\alpha_i \beta_k - \alpha_k \beta_i$, cioè possano interpretarsi in uno spazio $S_d \left[d = \binom{n+1}{2} - 1 \right]$ come coordinate di un punto giacente sulla *grassmanniana* $W_{2(n-1)}$ delle rette di S_n. Ora il punto ϱ_{ik} è arbitrario entro lo spazio T di dimensione $m - 1$ individuato in S_d dagli m punti indipendenti $a_{ik}^{(\nu)}$, e perciò l'esistenza di coppie d'integrali funzionalmente dipendenti è legata a quella di punti comuni a T e alla $W_{2(n-1)}$, punti che esistono certamente, attesa la dimensione di T.

Di qui la conclusione di Castelnuovo; ma di più, la circostanza che lo spazio T e la $W_{2(n-1)}$ non hanno in comune un sol punto, ma un numero

finito >1 (se $n>2$) di punti (distinti o no) [1] o addirittura una varietà di dimensione >0, induce a prevedere che quella conclusione possa, per la stessa via, precisarsi ulteriormente.

3. Per procedere nella nostra indagine, conviene ora introdurre un'altra espressiva interpretazione geometrica. Dette $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ coordinate non omogenee di punto in un S_{n+1}, pongasi

$$y_i = u_i(xy), \qquad (i = 1, 2, \dots, n+1), \tag{3}$$

e si consideri il luogo descritto, al variare di x, y, dal punto y_i. Se quel luogo è una curva, le u_i risultan tutte funzionalmente dipendenti (cioè funzioni di una fra esse) e le relazioni (1) sono in numero di $\binom{n+1}{2}$ perchè ciascun jacobiano X_{ik} è identicamente nullo. Lasciato da parte questo caso, di cui terremo conto nelle conclusioni, il luogo considerato sarà una superficie Φ *appartenente* allo S_{n+1}, e le X_{ik} potranno interpretarsi come coordinate grassmanniane delle rette improprie dei suoi piani tangenti. Si vede poi facilmente che tale interpretazione geometrica è indipendente, sia da un cambiamento delle variabili x, y, come da una sostituzione lineare eseguita sulle u.

Le predette rette improprie formano un sistema K (congruenza o eventualmente rigata) *appartenente* allo S_n improprio di S_{n+1}, e contenuto negli *m complessi lineari* indipendenti rappresentati dalle equazioni (1).

L'annullarsi dello jacobiano d'una combinazione lineare delle u, cioè l'esistenza entro al sistema di relazioni (1) d'una relazione del tipo (2), dà luogo ad un complesso *speciale* del sistema lineare (1), contenente K. Un complesso siffatto è costituito da tutte le rette appoggiate ad un S_{n-2} (singolare); pertanto lo stesso accadrà delle rette di K, e quindi quello S_{n-2} sarà vertice di un cono (di ∞^1 S_{n-1}) contenente Φ. Più in generale, se h combinazioni lineari indipendenti $v_1, v_2, \dots, v_h$ delle u son funzioni di una fra esse, K ammette un S_{n-h} *direttore* vertice di un cono contenente Φ; e viceversa.

Collegando l'interpretazione geometrica ora esposta, colle considerazioni del numero precedente, risulta che gli S_{n-2} direttori di K sono in corrispondenza biunivoca coi punti comuni allo spazio T e alla $W_{2(n-1)}$, e quindi che le rette di K soddisfano a molteplici condizioni d'incidenza. Dall'analisi di esse ci proponiamo di dedurre che *le rette di* K *passano tutte per un punto o sono appoggiate ad una retta e ad un* S_{n-2} *sghembo con essa.* Supporremo $n>3$ riserbandoci di includere per via anche i casi $n=1, 2, 3$.

[1] Se T ha la dimensione $m-1=\binom{n-1}{2}$ ed è in posizione generica rispetto a $W_{2(n-1)}$ il numero dei punti comuni è $\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$ (Schubert).

3. Anzitutto non è difficile provare che fra le intersezioni di T con W si posson sempre trovare due punti infinitamente vicini. E invero, nell'ipotesi contraria, T e W avrebbero in comune $\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} > n$ punti distinti, e quindi esisterebbero altrettante relazioni funzionali fra coppie di combinazioni lineari delle u, cioè altrettanti S_{n-2} *distinti* direttori di K. Si prova allora, senza difficoltà sostanziali, che, se tutte le u non son funzioni di una fra esse (il che si è già escluso, ma d'altronde è inconciliabile coll'ipotesi che la varietà intersezione di T e W abbia dimensione zero), quelli S_{n-2} debbono passare tutti per un S_{n-h} $(h > 2)$ direttore di K. Ma allora posson sempre considerarsi due S_{n-2}, direttori di K, e infinitamente vicini, bastando per ciò che essi passino per lo S_{n-h}; e pertanto risulta assurda l'ipotesi che i punti comuni a T e W siano tutti distinti.

Dimostriamo ora che K ammette uno spazio direttore di dimensione $\leq n-3$. Invero, detti Σ e Σ' due S_{n-2} infinitamente vicini direttori di K, potranno darsi i due casi seguenti:

a) Σ e Σ' si tagliano in un S_{n-3}, e quindi giacciono in un S_{n-1}. Allora le rette di K, dovendo appoggiarsi a Σ e Σ' e non potendo giacere nello S_{n-1} (perchè K *appartiene* allo S_n), si appoggeranno tutte allo S_{n-3} intersezione che sarà quindi direttore per K.

b) Σ e Σ' si tagliano in un S_{n-4}; allora mediante una elementare considerazione di limite si vede che resta stabilita una proiettività fra gli S_{n-1} per Σ e gli S_{n-3} giacenti in Σ e passanti per lo S_{n-4}; e le rette appoggiate a Σ, Σ' son quelle che giacciono negli S_{n-1} suddetti e si appoggiano ai corrispondenti S_{n-3}.

Per le nostre funzioni la cosa s'interpreta nel modo seguente: Esistono quattro combinazioni lineari indipendenti v_1, v_2, v_3, v_4 delle u, tali che

$$(4) \qquad v_2 = f(v_1) \quad , \quad v_4 = f'(v_1)\, v_3 + \varphi(v_1),$$

f e φ essendo simboli di convenienti funzioni.

Adunque sulla superficie algebrica F esisterà un fascio irrazionale di curve di livello costante per gl'integrali v_1, v_2. Detta C una curva del fascio, su cui sia $v_1 = c$, e posto $f'(c) = k$, $\varphi(c) = h$, avremo su C

$$v_4 - kv_3 = h,$$

cioè lungo C sarà costante anche l'integrale $v_4 - kv_3$. Applicando un teorema di de Franchis, se ne deduce che tutte le curve del fascio son di livello costante per l'integrale predetto [1], cioè che si ha $v_4 - kv_3 = \psi(v_1)$. Ma allora i tre integrali $v_1, v_2, v_4 - kv_3$ son funzioni di uno fra essi, e quindi K ammette un S_{n-3} direttore, c. d. d.

[1] De Franchis, *Alcune osservazioni sulle superficie irregolari* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, T. XXXVI (1913), pp. 223-225, n. 3].

Matematica. — *Sui sistemi coniugati permanenti nelle deformazioni di una superficie.* Nota di ALESSANDRO TERRACINI, presentata dal Socio C. SEGRE [1].

È noto che sopra qualunque deformata di una quadrica il sistema coniugato permanente è isotermo coniugato [2]. Esistono altre superficie che godano della medesima proprietà? Rispondere a tale domanda, che mi fu posta dal prof. Bianchi, tale è lo scopo di questa breve Nota. La risposta è negativa [3].

Sia S_0 una superficie (non sviluppabile) cui spetti la proprietà indicata, riferita alle sue asintotiche, reali o immaginarie, u, v; e si consideri col Darboux [4] una famiglia (S) di ∞^1 superficie S, tutte applicabili su S_0, rappresentate in coordinate cartesiane ortogonali X, Y, Z da un'equazione

$$f(X, Y, Z, t) = 0 \tag{1}$$

t essendo un parametro tale che la (1), per $t = 0$, rappresenti S_0. Indicando con x, y, z le coordinate di un punto di S_0 (le quali risulteranno funzioni di u, v), le coordinate X, Y, Z del punto ad esso corrispondente su una superficie (1) si potranno riguardare, pel tramite di x, y, z, come funzioni di u, v, e ulteriormente di t. Si suppone inoltre di scegliere la famiglia (S) in modo che nell'intorno di $t = 0$ [in questo solo intorno si considererà la famiglia (S)] X, Y, Z siano della forma

$$X = x(u, v) + t\bar{x}(u, v) + t^2 f(u, v, t),$$
$$Y = y(u, v) + t\bar{y}(u, v) + t^2 g(u, v, t),$$
$$Z = z(u, v) + t\bar{z}(u, v) + t^2 h(u, v, t),$$

dove le funzioni considerate sono finite e continue colle loro derivate che occorreranno. Allora il punto di coordinate $x + t\bar{x}, y + t\bar{y}, z + t\bar{z}$ descrive una superficie che risulta da S_0 per una deformazione infinitesima; e disponendo opportunamente del sistema (S), quel punto può descrivere ogni superficie derivante in tal modo da S_0.

[1] Pervenuta all'Accademia il 27 luglio 1919.

[2] Cfr. p. es. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. III, § 85.

[3] Sistemi isotermi coniugati si presentano anche in un'altra proprietà caratteristica delle quadriche, relativa alle deformazioni infinitesime: cfr. Bianchi, *Sui sistemi coniugati permanenti nella deformazione delle quadriche*, Rend Lincei (5), t. XXII $(1913)_2$, pp. 3-10; e la mia Nota, *Sulle congruenze* W *di cui una falda focale è una quadrica*, in « Scritti matematici offerti ad Enrico D'Ovidio », Torino, Bocca, 1919, pp. 149-157.

[4] Cfr. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*... IV Partie, Paris 1896, n. 852.

Se

$$\alpha(u, v, t)\, du^2 + 2\beta(u, v, t)\, du\, dv + \gamma(u, v, t)\, dv^2 = 0$$

è l'equazione delle asintotiche di una superficie S [sicchè $\alpha(u, v, o) = \gamma(u, v, o) = 0$], il sistema coniugato comune ad essa e alla S_0 sarà

$$\alpha(u, v, t)\, du^2 - \gamma(u, v, t)\, dv^2 = 0. \tag{2}$$

Ponendo $x_u = \frac{\partial x}{\partial u}$, $x_v = \frac{\partial x}{\partial v}$, $x_{uu} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$, ecc. (una posizione analoga sarà mantenuta anche in seguito per le varie funzioni di u, v che si avranno da considerare), si ha

$$\alpha(u, v, t) = \begin{vmatrix} x_{uu} + t\bar{x}_{uu} + \cdots & x_u + t\bar{x}_u + \cdots & x_v + t\bar{x}_v + \cdots \\ y_{uu} + t\bar{y}_{uu} + \cdots & y_u + t\bar{y}_u + \cdots & y_v + t\bar{y}_v + \cdots \\ z_{uu} + t\bar{z}_{uu} + \cdots & z_u + t\bar{z}_u + \cdots & z_v + t\bar{z}_v + \cdots \end{vmatrix},$$

$$\gamma(u, v, t) = \begin{vmatrix} x_{vv} + t\bar{x}_{vv} + \cdots & x_u + t\bar{x}_u + \cdots & x_v + t\bar{x}_v + \cdots \\ y_{vv} + t\bar{y}_{vv} + \cdots & y_u + t\bar{y}_u + \cdots & y_v + t\bar{y}_v + \cdots \\ z_{vv} + t\bar{z}_{vv} + \cdots & z_u + t\bar{z}_u + \cdots & z_v + t\bar{z}_v + \cdots \end{vmatrix},$$

dove si sono trascurati i termini contenenti a fattore t^2. Per t tendente a zero, il sistema (2) tenderà quindi al sistema

$$A(u, v)\, du^2 - C(u, v)\, dv^2 = 0 \tag{3}$$

dove A, C indicano rispettivamente i coefficienti di t nelle espressioni sopra scritte per α, γ; sistema che in seguito alla ipotesi fatta dovrà risultare isotermo coniugato sopra la superficie S_0: vale a dire, supposto, ciò che si può fare, $C \neq 0$ [v. la nota a pie' della pagina seguente] sarà A/C il prodotto di una funzione della sola u per una della sola v. Sarà perciò

$$C^2(AA_{uv} - A_u A_v) - A^2(CC_{uv} - C_u C_v) = 0. \tag{4}$$

Ora, rappresentata la S_0 con le formole di Lelieuvre

$$\left\{ \begin{aligned} x_u &= -\begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \eta_u & \zeta_u \end{vmatrix}, & x_v &= \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \eta_v & \zeta_v \end{vmatrix}, \\ y_u &= -\begin{vmatrix} \zeta & \xi \\ \zeta_u & \xi_u \end{vmatrix}, & y_v &= \begin{vmatrix} \zeta & \xi \\ \zeta_v & \xi_v \end{vmatrix}, \\ z_u &= -\begin{vmatrix} \xi & \eta \\ \xi_u & \eta_u \end{vmatrix}, & z_v &= \begin{vmatrix} \xi & \eta \\ \xi_v & \eta_v \end{vmatrix}, \end{aligned} \right. \tag{5}$$

dove ξ, η, ζ sono tre soluzioni linearmente indipendenti di una equazione

$$\theta_{uv} = M(u, v)\,\theta, \tag{6}$$

si potrà assumere [1]

$$\left\{\begin{aligned} \bar{x}_u &= \begin{vmatrix} \xi & R \\ \xi_u & R_u \end{vmatrix}, & \bar{x}_v &= -\begin{vmatrix} \xi & R \\ \xi_v & R_v \end{vmatrix}, \\ \bar{y}_u &= \begin{vmatrix} \eta & R \\ \eta_u & R_u \end{vmatrix}, & \bar{y}_v &= -\begin{vmatrix} \eta & R \\ \eta_v & R_v \end{vmatrix}, \\ \bar{z}_u &= \begin{vmatrix} \zeta & R \\ \zeta_u & R_u \end{vmatrix}, & \bar{z}_v &= -\begin{vmatrix} \zeta & R \\ \zeta_v & R_v \end{vmatrix}, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

essendo R una soluzione della (6); e la (4) dovrà sussistere in corrispondenza a ogni soluzione R della (6). Indicando per brevità il determinante

$$\begin{vmatrix} \bar{x}_{uu} & x_u & x_v \\ \bar{y}_{uu} & y_u & y_v \\ \bar{z}_{uu} & z_u & z_v \end{vmatrix}$$

col simbolo

$$|\, \bar{x}_{uu} \,,\, x_u \,,\, x_v \,| \,,$$

e facendo un'analoga convenzione per gli altri determinanti del terzo ordine che avremo a considerare, e ricavando $\bar{x}_{uu}, \bar{y}_{uu}, \bar{z}_{uu}$, $\bar{x}_{vv}, \bar{y}_{vv}, \bar{z}_{vv}$ dalle (7) opportunamente derivate, si ha [2]

$$\begin{aligned} A(u, v) = {} & |\, \xi R_{uu} - \xi_{uu} R \,,\, x_u \,,\, x_v \,| \,+ \\ & + |\, \xi R_u - \xi_u R \,,\, x_v \,,\, x_{uu} \,| + |\, \xi R_v - \xi_v R \,,\, x_u \,,\, x_{uu} \,| \,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(u, v) = {} & -\, |\, \xi R_{vv} - \xi_{vv} R \,,\, x_u \,,\, x_v \,| \,+ \\ & + |\, \xi R_u - \xi_u R \,,\, x_v \,,\, x_{vv} \,| + |\, \xi R_v - \xi_v R \,,\, x_u \,,\, x_{vv} \,| \,. \end{aligned}$$

I termini di A_u e di A_{uv} contenenti R_{uuu} saranno perciò rispettivamente

$$|\, \xi R_{uuu} - \xi_{uuu} R \,,\, x_u \,,\, x_v \,|$$

e

$$\begin{aligned} & |\, \xi_v R_{uuu} - \xi_{uuu} R_v \,,\, x_u \,,\, x_v \,| \,+ \\ & + |\, \xi R_{uuu} - \xi_{uuu} R \,,\, x_{uv} \,,\, x_v \,| + |\, \xi R_{uuu} - \xi_{uuu} R \,,\, x_u \,,\, x_{vv} \,| \,, \end{aligned}$$

[1] Cfr. p. es. Bianchi, op. cit., vol. II, § 226.

[2] Sarà perciò $C = 0$ solo per quelle R soluzioni della (6) che verificano una ulteriore equazione di Laplace, non certo identica giacchè il coefficiente di R_{vv} nella espressione di C non è identicamente nullo.

mentre R_{uuu} non compare in C, C_u, C_v, C_{uv}, A, A_v [le altre derivate terze e quarte di R che compaiono in queste espressioni si esprimono tutte, eccetto R_{vvv}, in funzione di R e delle sue derivate prime e seconde per mezzo della (6)]. Quindi poichè, come si è osservato, la (4) deve sussistere in corrispondenza a ogni soluzione R della (6), dovrà risultare nullo il coefficiente di R_{uuu} in $A A_{uv} - A_u A_v$, cioè dovrà essere

$$(|\xi R_{uu} - \xi_{uu} R, x_u, x_v| + |\xi R_u - \xi_u R, x_v, x_{uu}| + |\xi R_v - \xi_v R, x_u, x_{uu}|) \times$$
$$\times (|\xi_v, x_u, x_v| + |\xi, x_{uv}, x_v| + |\xi, x_u, x_{vv}|) = |\xi, x_u, x_v| A_v .$$

Anche questa relazione fra la R e le sue derivate R_u, R_v, R_{uu}, R_{vv} [la R_{uv} si elimina mediante la (6)] deve sussistere se R è una qualsiasi soluzione della (6) e perciò identicamente: in essa R_{vv} non compare nel primo membro, e, nel secondo, compare solo nel termine

$$|\xi, x_u, x_v| \cdot |\xi R_{vv} - \xi_{vv} R, x_u, x_{uu}| .$$

Perciò dovrà essere

$$|\xi, x_u, x_v| \cdot |\xi, x_u, x_{uu}| = 0 .$$

Ora, poichè x, y, z sono soluzioni di un'equazione

$$\lambda_{uu} = \pi(u, v)\lambda_u + \chi(u, v)\lambda_v ,$$

tale relazione porge

$$\chi(u, v)|\xi, x_u, x_v|^2 = 0 ;$$

e perciò, non essendo identicamente nullo il fattore di χ, sarà $\chi = 0$, e le asintotiche $v = \text{cost.}$ della S_0 saranno rettilinee. Siccome ciò vale anche per le asintotiche $u = \text{cost.}$, si conclude che S_0 è una quadrica.

Fisica. — *Sulla costituzione delle radiazioni catodiche nel tubo Coolidge* [1]. Nota del prof. VIRGILIO POLARA, presentata dal Socio T. LEVI CIVITA [2].

Si ammette generalmente che i raggi catodici consistono di particelle elettrizzate identiche, le quali si susseguono incessantemente sulla traiettoria sensibile del raggio, pur rimanendo abbastanza spaziate da non influenzarsi mutuamente (regime balistico).

Ora, se le esperienze del Perrin hanno definitivamente accertato che i raggi catodici constano di particelle elettrizzate negativamente in movimento, nessun dato sperimentale è ancora intervenuto a mettere fuori di dubbio che si possano realmente trascurare le azioni reciproche dei corpuscoli succedentisi nel raggio, dovendosi in generale invece considerare l'evenienza che tali cariche si succedano con frequenza qualunque, ed in particolare con frequenza così rapida da potere considerare il fenomeno come un flusso continuo (regime idraulico).

Il Levi-Civita [3], prospettando per il primo questa eventualità, ha fatto notare che mentre nel primo caso, com'è intuitivo, l'ampiezza delle deviazioni dovute a campi magnetici esterni deve riuscire indipendente dall'intensità del flusso d'elettroni emanati dal catodo, nel caso invece della non validità del regime balistico tale deviazione deve diminuire al crescere dell'intensità del flusso, dovendo sussistere la legge della proporzionalità inversa nel caso-limite del regime idraulico.

Senza l'ausilio di dati sperimentali in proposito, i fenomeni in questione non si sa se rappresentarli con lo schema stabilito dal Levi-Civita [4] con la sua teoria assintotica delle radiazioni elettriche o con quello prospettato recentemente dal Signorini [5], che rappresenta un notevole progresso sulle precedenti rappresentazioni provvisorie ed incomplete, poggiate su ipotesi ausiliarie di speciali comportamenti cinematici dell'elettrone in moto. Donde la necessità, ad evitare che le teorie ricordate rappresentino mere speculazioni concettuali senza alcun pratico interesse, che esperienze risolutive sag-

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto fisico della R. Università di Catania.

[2] Pervenuta all'Accademia il 14 luglio 1919.

[3] Levi-Civita, N. C., 1909, vol. XVIII.

[4] Levi-Civita, Rend. Acc. Lincei, 1909, 1° semestre.

[5] Signorini, N. C. 1912, vol. IV.

gino il fondamento stesso delle ipotesi ed assicurino che vige nelle emissioni catodiche l'uno o l'altro dei regimi indicati. Non è certamente facile, ideare un dispositivo nel quale si possano generare raggi catodici di intensità variabile, fissi restando tutti gli altri elementi, giacchè, mentre nei tubi Crookes ordinarî la quantità di elettricità emessa dal catodo in un secondo (intensità) può solo essere influenzata dalla differenza di potenziale fra anodo e catodo, che riflettendosi sulla velocità dei corpuscoli altera per conto proprio la deviabilità dei raggi in campo magnetico, nei comuni tubi Whenelt a raggi catodici lenti la intensità della corrente ausiliaria, che porta all'incandescenza il catodo, non può variare che entro limiti ristretti. Più opportuno sarà quindi tentare di trar profitto delle preziose proprietà riscontrate recentemente nei tubi Coolidge per risolvere l'importante questione prospettata dal Levi-Civita.

Secondo le ricerche di Boll e Mallet ([1]) invero l'intensità del flusso catodico in tali tubi cresce col crescere della corrente che alimenta la spirale di tungsteno che ne costituisce il catodo, almeno finchè non si oltrepassi un certo valore della intensità della corrente ausiliaria alimentatrice, mentre la differenza di potenziale fra anodo e catodo può conservare quel valore, invariabile, che meglio risponde alle esigenze della ricerca.

Occorrerà naturalmente dar forma conveniente al tubo Coolidge perchè possa osservarsi la deviazione magnetica dei raggi catodici in esso generati, e credo che sia opportuna, dato l'alto grado di rarefazione, una disposizione analoga a quella ideata dal Lenard ([2]) per la determinazione del rapporto $\frac{e}{m}$ dei corpuscoli emanati dalle lamine battute da raggi ultravioletti nei vuoti spinti: l'anticatodo, forato al centro, dovrà essere messo al suolo perchè funzioni da schermo per la parte residua del tubo, dove un elettrodo piano metallico, disposto nella regione perpendicolare insieme con la direzione del fascio catodico e con quella del campo magnetico adoperato, sarà collegato ad un elettrometro.

L'osservazione della massima deviazione all'elettrometro, dell'intensità di corrente che genera il campo magnetico deviatore e della corrente che alimenta nei varî casi la spirale di tungsteno, potrà fornire gli elementi per la ricerca.

Essa non si presenta a tutta prima molto difficile, per quanto è possibile prevedere, dal lato sperimentale: date però le modeste risorse di questo Laboratorio e le attuali difficoltà di provvedersi all'estero del materiale occorrente (difficoltà rese ancor più gravi dalle autorizzazioni ministeriali ri-

([1]) Boll et Mallet, Journal de physique, 1916, mai-juin, pag. 169.

([2]) Lenard, Ann. d. phys., II, pag. 359, an. 1900; cfr. anche Thomson, Cond. electr. trought. gases, pag. 137.

chieste dalle disposizioni vigenti) non posso nutrire sicura fiducia di avere presto a disposizione un tubo Coolidge che risponda allo scopo.

Credo però che la via indicata sia ben adatta: ed è perciò che l'addito comunque a chi potrà studiare il problema con maggiore ricchezza di mezzi sperimentali.

La non validità del regime balistico a me pare risulti però da altre considerazioni.

Ammesso infatti che sia trascurabile l'azione mutua dei corpuscoli emananti da un catodo riscaldato, il Richardson [1] ha dedotto la relazione

$$I = A\theta^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{b}{\theta}}$$

fra l'intensità I della corrente di ionizzazione (adotteremo questa denominazione per distinguerla dalla corrente che alimenta il catodo) generata e la temperatura assoluta ϑ del filamento che costituisce il catodo, A e b essendo due costanti determinate.

Al crescere della temperatura del filamento, in accordo con i risultati sperimentali ottenuti dal Richardson stesso per il caso di filamenti di carbone, dovrà quindi aumentare indefinitamente la corrente di ionizzazione.

Ma più accurate esperienze eseguite da Pring e Parker [2], con filamenti di carbone preventivamente sottoposti a speciali processi di progressiva purificazione, e disposti in ambienti a pressione variabile da mm 0,001 a mm. 0,027 di mercurio, han messo in evidenza che le variazioni della corrente di ionizzazione con la temperatura del filamento (o anche con la corrente che lo alimenta) diventano sempre meno sensibili a misura che questa si innalza, per modo che già a 1800° circa la corrente di ionizzazione cresce quasi insensibilmente con la temperatura.

Analogo risultato è stato ottenuto da Boll e Mallet [3] nelle spirali di tungsteno dei tubi Coolidge, in cui la corrente di ionizzazione cresce dapprima notevolmente col crescere della corrente alimentatrice della spirale, ma finisce poi per assumere un valore sensibilmente costante.

È quindi da ritenere che le azioni elettriche e magnetiche esercitate su ciascun corpuscolo dall'insieme degli altri non sieno, in tali condizioni, trascurabili, ciò che implica in fondo l'instaurazione d'un regime che, scostandosi notevolmente da quello balistico, si approssimi a quello idraulico.

Nè vale l'importante osservazione di Richardson e Brown [4] che computando il numero di corpuscoli presenti ad ogni istante fra una lamina di platino incandescente ed un'altra lamina parallela distante mm. 2, dedu-

(1) Richardson, Phyl. Trans., a. 1903, vol. CCI, pag. 497.
(2) Pring e Parker, Phyl. Magz., 1912, vol. 23, pag. 199.
(3) Boll et Mallet, loc. cit.
(4) Richardson e Brown, Phyl. Magz., 1908, vol. 16, pag. 375.

cendolo dal massimo di corrente osservata e dall' ipotesi che valga la legge di Maxwell per la distribuzione dei quadrati delle velocità fra gli elettroni emessi, si ottiene un valore così esiguo (cinque appena) da doversi escludere senz'altro l' ipotesi di azioni reciproche fra i corpuscoli presenti, giacchè tale computo si riferisce al caso che fra le due lamine di cm^2 0,1 di superficie non sia stabilita alcuna differenza di potenziale, nel qual caso la corrente di ionizzazione osservata assume solo valori dell'ordine di $4{,}7 \times 10^{-11}$ Ampères.

Si noti invece che nel caso dei filamenti di carbone adoperati da Parker e Pring [1], quando la differenza di potenziale fra anodo e catodo è di 200 Volta circa, la corrente di ionizzazione alla temperatura di 1800° assume valori di $8{,}6 \times 10^{-6}$ Ampères per cm^2 di catodo; e nel caso dei filamenti di tungsteno di cm^2 0,04 di estensione adoperati da Richardson e Bazzoni [2], quando fra anodo e catodo si stabilisce la differenza di potenziale di 20 Volta circa, si nota una corrente che cresce bruscamente, a quel potenziale, da 11×10^{-5} a 11×10^{-4} Amperes. E se la superficie catodica fosse, nelle indicate esperienze di Pring e Parker e di Richardson e Bazzoni, di cm^2 0,1, come nel caso prospettato da Richardson e Brown nel computo di cui mi sto occupando, le correnti assumerebbero rispettivamente i valori di

$$8{,}6 \times 10^{-6} \times 10^{-1} = 8{,}6 \times 10^{-7} \text{ Amperes}$$

$$\frac{11 \times 10^{-5}}{4 \times 10^{-2}} \times 10^{-1} = \frac{11}{4} \times 10^{-4} = 2{,}7 \times 10^{-4} \text{ Amperes},$$

quando in questo secondo caso ci si limiti a considerare la corrente che vige prima del brusco innalzamento.

D'altra parte nelle esperienze di Pring e Parker essendo i due elettrodi disposti alla distanza di cm. 4,8, la differenza di potenziale di 200 Volta = 200×10^8 U. E. M., stabilita fra anodo e catodo, determina un campo d'intensità

$$X = \frac{200 \times 10^8}{4{,}8} = \frac{2}{4{,}8} \times 10^{10} = 4 \times 10^9 \text{ dine per cm.},$$

mentre nelle esperienze di Richardson e Bazzoni, supposto che la distanza fra gli elettrodi sia di cm. 2 (essa non risulta dal lavoro dei citati autori), la differenza di potenziale di 20 Volta = 20×10^8 U. E. M., stabilita fra anodo e catodo, determina un campo d'intensità

$$X' = \frac{20 \times 10^8}{2} = 10^9 \text{ dine per cm.}$$

(1) Parker e Pring, loc. cit., pag. 199.

(2) Richardson e Bazzoni, Phyl. Magz., 1916, vol. 32, pag. 426.

È facile di trovare ora un limite inferiore del numero dei corpuscoli presenti fra due lamine di cm² 0,1 di estensione e fra loro distanti 2 mm., riferendosi al regime di corrente avuto da Pring e Parker e da Richardson e Bazzoni rispettivamente, giacchè il tempo t e t' impiegato da ogni corpuscolo, lanciato dal catodo con la velocità iniziale $u = 1{,}5 \times 10^7$ cm. per secondo [1], a percorrere lo spazio $s = 2 \times 10^{-1}$ cm. sotto l'azione del campo $X = 4 \times 10^9$ dine per cm., ed $X' = 10^9$ dine per cm., sarà fornito rispettivamente dai valori positivi delle radici delle equazioni

$$s = ut + \tfrac{1}{2} f t^2 \quad \text{o} \quad \tfrac{1}{2} f t^2 + ut - s = 0$$

$$s = ut' + \tfrac{1}{2} f' t'^2 \quad \text{o} \quad \tfrac{1}{2} f' t'^2 + ut' - s = 0\,,$$

essendo

$$f = X\, e/m = 4 \times 10^9 \times 1{,}7 \times 10^7 = 6{,}8 \times 10^{16}$$

$$f' = X'\, e/m = \quad 10^9 \times 1{,}7 \times 10^7 = 1{,}7 \times 10^{16}.$$

Sarà quindi

$$t = \frac{-u + \sqrt{u^2 + 2fs}}{f} \quad , \quad t' = \frac{-u + \sqrt{u^2 + 2f's}}{f'}.$$

Ora

$$\sqrt{u^2 + 2fs} > \sqrt{2fs} = \sqrt{2 \times 6{,}8 \times 10^{16} \times 2 \times 10^{-1}} =$$

$$= \sqrt{27 \times 10^{15}} = \sqrt{2{,}7 \times 10^{16}} = 1{,}6 \times 10^8$$

$$-u + \sqrt{u^2 + 2fs} > 1.6 \times 10^8 - 1{,}5 \times 10^7 > 1{,}6 \times 10^8 (1 - 1/10) =$$

$$= 1{,}6 \times 9 \times 10^7 = 14 \times 10^7 = 1{,}4 \times 10^8$$

$$t > \frac{1{,}4 \times 10^8}{6{,}8 \times 10^{16}} = 0{,}2 \times 10^{-8} = 2 \times 10^{-9} \quad (1).$$

Analogamente

$$\sqrt{u^2 + 2f's} > \sqrt{2f's} =$$

$$= \sqrt{2 \times 1{,}7 \times 10^{16} \times 2 \times 10^{-1}} = \sqrt{6{,}8 \times 10^{15}} = 2{,}6 \times 10^{\frac{15}{2}}$$

$$-u + \sqrt{u^2 + 2f's} > 2{,}6 \times 10^{\frac{15}{2}} - 1{,}5 \times 10^7 > 2{,}6 \times$$

$$\times 10^{\frac{15}{2}} \left(1 - 10^{-\frac{1}{2}}\right) > 2{,}6 \times 10^{\frac{15}{2}} (1 - 1/3) = \frac{2{,}6 \times 2}{3} \times 10^{\frac{15}{2}} = 1{,}7 \times 10^{\frac{15}{2}}$$

$$t' > \frac{1{,}7 \times 10^{\frac{15}{2}}}{1{,}7 \times 10^{16}} = 10^{-\frac{17}{2}} \quad (2).$$

[1] Richardson e Brown, loc. cit., pag. 375.

La corrente $i = 8{,}6 \times 10^{-7}$ Ampères $= 8{,}6 \times 10^{-8}$ U. E. M. sarà determinata dalla emissione di

$$N = \frac{i}{e} = \frac{8{,}6 \times 10^{-8}}{10^{-20}} = 8{,}6 \times 10^{12} \text{ corpuscoli per secondo} \quad (3);$$

e la corrente $i' = 2{,}7 \times 10^{-4}$ Ampères $= 2{,}7 \times 10^{-5}$ U. E. M sarà determinata dalla emissione di

$$N' = \frac{i'}{e} = \frac{2{,}7 \times 10^{-5}}{10^{-20}} = 2{,}7 \times 10^{15} \text{ corpuscoli per secondo} \quad (4).$$

Un limite inferiore del numero di corpuscoli presenti fra le due lamine, tenute presenti le relazioni (3) ed (1), (4) e (2) rispettivamente, sarà nei due casi, quindi,

$$Nt = 8{,}6 \times 10^{12} \times 2 \times 10^{-9} = 17 \times 10^{3} = 17000$$

$$N't' = 2{,}7 \times 10^{15-\frac{17}{2}} = 2{,}7 \times 10^{\frac{13}{2}} > 2 \times 10^{6}.$$

Dati i valori elevati così dedotti — che si accrescono ulteriormente per differenze di potenziale più cospicue fra anodo e catodo — è naturale pensare che non possano essere trascurabili gli effetti mutui dei singoli elettroni presenti, condizione essenziale per la validità del regime balistico.

Fisica terrestre. — *Sulla oscillazione barometrica annua.* Nota del prof. F. Vercelli, presentata dal Socio C. Somigliana [1].

Nelle nostre regioni la curva barometrica è principalmente costituita da un complesso di ondulazioni più o meno ampie, di aspetto irregolare, aventi durate comprese fra un giorno ed un mese circa. La caratteristica ondulazione annua, che nelle zone di tipo nettamente continentale od oceanico si presenta con grande ampiezza e regolarità, da noi si presenta invece con piccola ampiezza e con caratteri non ancora bene definiti, variabili da sito a sito e da anno ad anno.

Lo studio di queste lente variazioni del livello medio barometrico ha notevole importanza nelle ricerche climatologiche, nello studio statistico di alcuni fenomeni, come ad esempio dei temporali [2], e nelle ricerche recenti sull'analisi, la sintesi e la previsione della pressione barometrica [3].

(1) Pervenuta all'Accademia il 15 agosto 1919.

(2) E. Oddone, *La frequenza dei temporali in Val Padana.* Boll. Soc. met. italiana, 1917.

(3) F. Vercelli, questi Rend. giugno 1915, vol. XXV, serie V, fasc. 11; Memorie R. Istituto Lombardo, marzo 1916, vol. XII, serie III, fasc. IX.

Varî lavori vennero compiuti su questo argomento, tra cui uno assai lodato di J. Hann [1], ricorrendo a rappresentazioni di valori medî calcolati per lunghe serie di anni, come si usa fare per caratterizzare il medio andamento annuo della temperatura.

Ma se i principî di probabilità giustificano l'uso delle medie nel caso dei fenomeni termici, non così avviene in quelli barometrici. Nel primo caso vi è una curva, con periodicità ben evidente e con lievi perturbazioni; nel secondo le perturbazioni prevalgono di molto sul fenomeno che si vuole mettere in evidenza, e il periodo annuo non ha un carattere ben definito e permanente. I risultati conseguiti nello studio dell'onda annua barometrica restano quindi alquanto dubbî. Essi, ad ogni modo, dànno solo un andamento medio ideale, che molto può differire da quello reale delle singole annate, come ho già avuto occasione di rilevare [2].

Il metodo di analisi e i risultati raggiunti nei lavori citati consentono di compiere in modo diretto e preciso l'esame dell'andamento annuo barometrico di una data stazione, mediante eliminazione delle oscillazioni di minore durata. In questa Nota accennerò sommariamente ad una indagine, fatta con tale procedimento, sulla curva barometrica di Ferrara per il ventennio 1898-1917.

Il lavoro fu compiuto in gran parte a Ferrara, durante l'estate 1918, presso la sede del Comando del Servizio Aerologico militare, a cui esprimo i doverosi ringraziamenti per gli aiuti ed i mezzi posti a mia disposizione; e venne ultimato nell'Osservatorio marittimo di Trieste.

La scelta della stazione fu consigliata sopratutto dalla grande uniformità dei dati, determinati personalmente dal compianto direttore dell'Osservatorio di Ferrara, prof. Bongiovanni.

La curva, tracciata in base alle letture giornaliere delle ore 9-15-21, nella scala di 2 cm. al giorno per le ascisse e 5 mm. per ogni millimetro di pressione per le ordinate, risultò di una lunghezza di circa 146 metri.

Sottoposta ad accurata analisi, la curva risultò costituita in massima parte dalle onde tipiche, già rilevate in moltissimi altri diagrammi, cioè da onde con periodi di circa giorni 1, $2\,^1/_8$, $4\,^1/_4$, 8, 16 e 32. Per cui si ritenne sufficiente di procedere alla eliminazione successiva di queste onde per far risaltare con chiarezza l'onda annua.

L'eliminazione fu compiuta con un apparecchio automatico ideato dall'ing. ten. D. Tavanti, addetto al R. Servizio aerologico; prestarono cura e attenzione somma il personale dirigente e quello subordinato della Sezione aerologica di Ferrara.

[1] J. Hann, *Die Verteilung des Luftdruckes über Mittel. und Sudeuropa*. Wien, ed. Hölzel, 1887.

[2] F. Vercelli, *Presagi meteorici in rapporto alle operazioni di guerra* (campagna 1917). Pubblicazione del Comando 3ª Armata, gennaio 1918.

La curva residua, dopo eliminate le onde accennate, venne ridotta in scala di 1 mm. al giorno, per le ascisse, lasciando inalterata la scala per le ordinate. Su questa curva, lunga circa 7 metri, venne compiuto lo studio delle oscillazioni annue.

Essa presenta ancora numerose perturbazioni, dovute ad onde eliminate solo parzialmente, a causa del rapido smorzamento, oppure ad onde diverse da quelle eliminate, o anche a variazioni del tutto irregolari.

Queste perturbazioni sono però così lievi che non tolgono la possibilità di studiare i caratteri specifici delle fluttuazioni di lunga durata.

L'esame della curva rivela che indubbiamente esiste una relazione fra l'andamento annuo solare e la variazione del livello medio barometrico, per quanto questa relazione risulti piuttosto complessa.

Su venti anni di osservazioni si scorge diciotto volte un massimo invernale, più o meno elevato, ma ben netto, seguìto da una rapida discesa e da un minimo primaverile, a cui succede una lenta e graduale ascesa nell'epoca autunno-invernale (fig. I, *a*). Fanno eccezione i periodi 1914-15 e 1916-17, in cui il massimo invernale risulta molto attenuato e anticipato nella stagione autunnale, e il minimo primaverile spostato in gennaio-febbraio (fig. II).

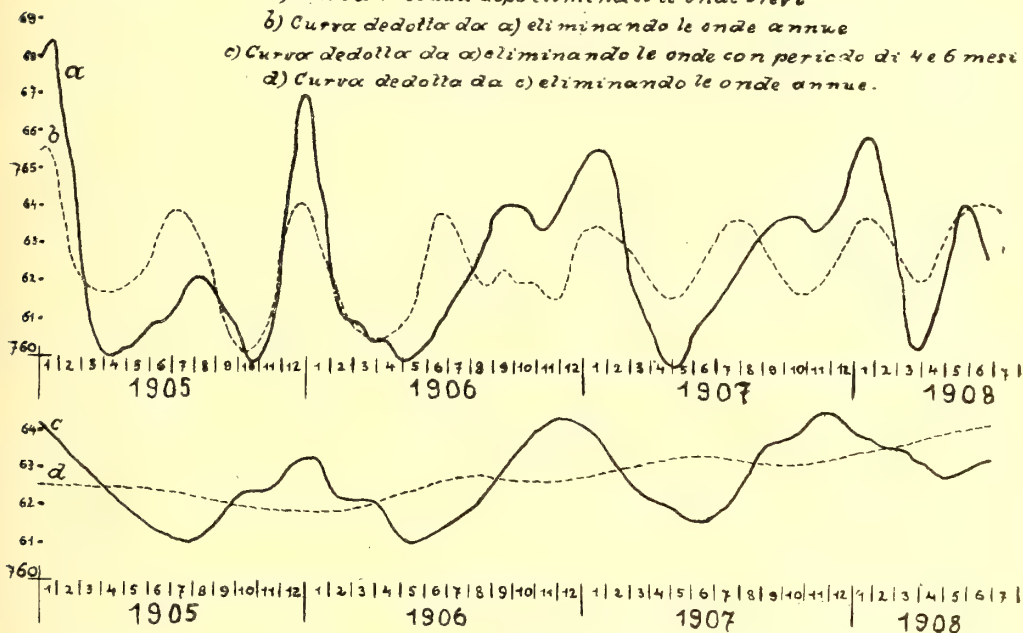
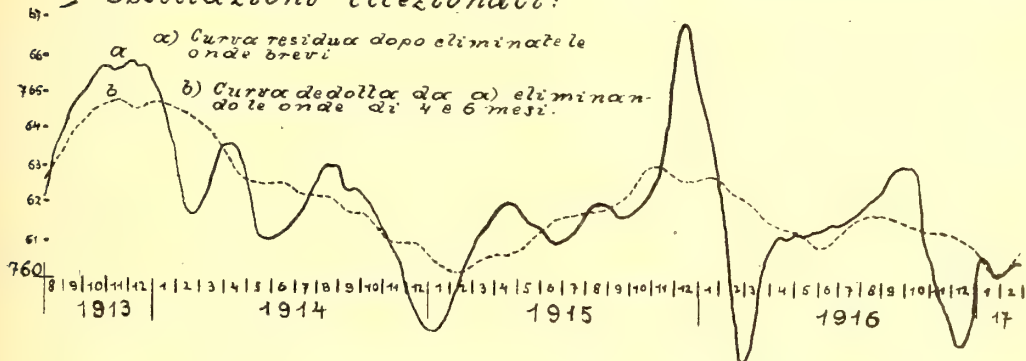
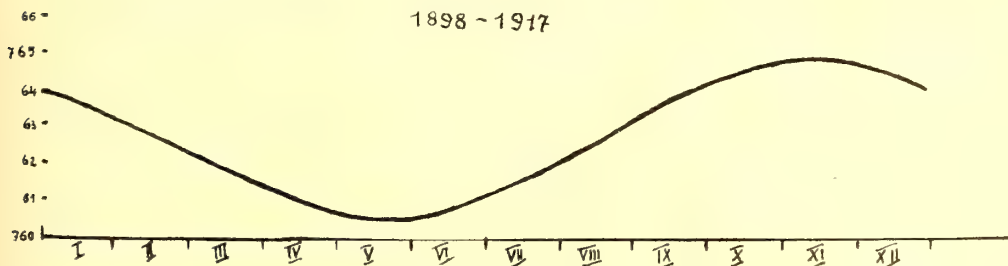
L'ondulazione annua, anche prescindendo dalle piccole perturbazioni sopra accennate, non è pura ma accompagnata da oscillazioni che l'analisi periodale conduce a distinguere in tre gruppi principali, aventi periodi rispettivamente di circa 6, 4 e 2 mesi, e corrispondenti quindi ad armonici superiori (2°, 3°, 5°) di una serie Fourier.

Tra queste ondulazioni secondarie quella semestrale suole prevalere per ampiezza e regolarità (fig. I, *b*), determinando la forma caratteristica della curva annua: massimo invernale molto pronunciato, seguìto da una rapida discesa e da un minimo in marzo-aprile, da un massimo secondario estivo e da un minimo in ottobre novembre. Quando prevale l'onda quadrimestrale (fig. II, *a*), si hanno due massimi e due minimi secondarî.

Dopo eliminazione delle oscillazioni di 2, 4 e 6 mesi, si ottengono isolate le ondulazioni annue (fig. I, *c*). Esse non conservano, da un anno all'altro, gli stessi precisi caratteri. L'ampiezza oscilla fra 3 mm. di mercurio e 8 mm. circa. Il massimo si presenta nell'epoca novembre-dicembre, ed il minimo in maggio-giugno. Fra l'onda annua barometrica e quella termica vi è quindi uno spostamento di fase di circa quattro mesi.

Occorre notare che l'onda annua, se è fattore prevalente nell'andamento della temperatura, è solo fenomeno di secondaria importanza nelle variazioni barometriche, risultando di ampiezza molto minore di quella delle oscillazioni di breve durata.

Dalla curva studiata possiamo ancora eliminare le oscillazioni annue. Per l'ineguaglianza di queste oscillazioni la curva residua non risulta una retta, ma una linea, lievemente ondulata attorno ad un asse di quota 762,6 mm., e non scostantesi da tale asse più di 1 mm. (fig. I, *d*).

Oscillazione barometrica annua.
I. Oscillazioni normali:
a) Curva residua dopo eliminate le onde brevi
b) Curva dedotta da a) eliminando le onde annue
c) Curva dedotta da a) eliminando le onde con periodo di 4 e 6 mesi
d) Curva dedotta da c) eliminando le onde annue.
1905
1906
1907
1908
II. Oscillazioni eccezionali:
a) Curva residua dopo eliminate le onde brevi
b) Curva dedotta da a) eliminando le onde di 4 e 6 mesi.
1913
1914
1915
1916
17
III. Oscillazione annua media nel ventennio
1898 - 1917
I
II
III
IV
V
VI
VII
VIII
IX
X
XI
XII

Il diagramma fra il 1909 e 1917 presenta una ondulazione con un massimo nel 1913. Essa però non ha corrispondenza nel diagramma che precede, e pare costituire un fatto isolato.

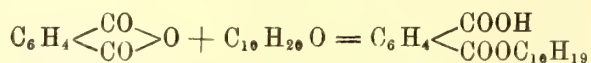
Costruendo una curva che abbia per ordinate le corrispondenti ordinate medie delle singole oscillazioni annue, per il ventennio considerato, si ottiene una curva che presenta solo lievissimi scarti da una linea molto regolare (fig. III), avente il minimo in maggio, il massimo in novembre ed un'ampiezza corrispondente a circa 5 mm. di mercurio.

Escludendo quindi i due anni eccezionali già menzionati, si trova che questo andamento medio corrisponde, con buona approssimazione, all'andamento vero delle singole annate. Nelle previsioni barometriche, basate sulla sintesi delle ondulazioni riconosciute presenti nel periodo che si considera, si possono quindi attribuire all'onda annua i caràtteri ora rilevati. La possibilità di casi eccezionali non è esclusa; ma nelle ricerche sulla previsione barometrica tali casi possono venire riconosciuti con evidenza e in tempo utile per tenere conto delle opportune modificazioni.

Chimica. — *Sui carvomentoli isomeri e sulla scissione del carvomentolo inattivo negli antipodi ottici* [1]. Nota del dott. Vincenzo Paolini, presentata dal Corrisp. A. Peratoner [2].

Gli studî compiuti in questi ultimi anni da Haller e Martine [3], dal Brunel [4], e più recentemente da Pikard e Littlebuy [5], hanno condotto alla conoscenza completa delle diverse forme isomeriche del mentolo, mentan-ol.

Tale risultato si è conseguito, principalmente, individualizzando e separando le singole modificazioni stereoisomere sotto forma dei loro eteri ftalici acidi, ottenuti per azione diretta dell'anidride ftalica sull'alcool:

$$C_6H_4<^{CO}_{CO}>O + C_{10}H_{20}O = C_6H_4<^{COOH}_{COOC_{10}H_{19}}$$

Così, ad esempio, il mentolo officinale venne riconosciuto come un corpo omogeneo, costituito unicamente dall' isomero sinistrogiro con $[\alpha]_D = -49°,44'$.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto chimico-farmaceutico della R. Università di Roma.

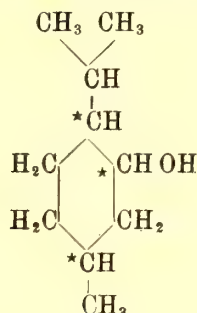
(2) Pervenuta all'Accademia il 6 settembre 1919.

(3) Compt. rend., 140 (1905), 1298.

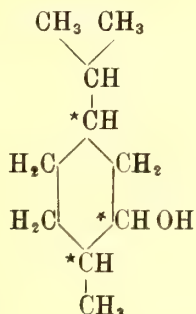
(4) Bulletin, III, 33 (1905) 269.

(5) Journ. chem. Soc., 101 (1912), 109.

Epperò del mentolo, mentan-ol (3), presentando la formula di costitu-

```
CH3 CH3
   \/
   CH
   |
  *CH
H2C/ \*CH OH
  |    |
H2C\  /CH2
  *CH
   |
   CH3
```

zione 3 atomi di carbonio asimetrici, sono teoricamente prevedibili 8 configurazioni otticamente attive che corrispondono ad altrettanti isomeri, difatti isolati nel modo dianzi detto e quasi tutti bene studiati.

Per quel che riguarda invece il mentan-ol (2) o carvomentolo, a mal-

```
CH3 CH3
   \/
   CH
   |
  *CH
H2C/ \CH2
  |    |
H2C\ */CH OH
  *CH
   |
   CH3
```

grado della grande analogia che presenta col mentolo ordinario, quasi nulla può dirsi che sia stato fatto nel senso espresso. Anche la formula del carvomentolo rivela la presenza di 3 atomi di carbonio asimmetrici nella molecola, e quindi la possibilità di esistenza di 8 isomeri otticamente attivi; ma i diversi carvomentoli sino ad oggi preparati da varî prodotti di partenza, mediante processi differenti di riduzione, siano forme racemiche, siano modificazioni attive, non rappresentano corpi omogenei, onde, osserva il Semmler [1], « i rapporti fra i varî carvomentoli non sono bene conosciuti come per il mentolo ordinario ».

In seguito ai buoni risultati che ho conseguito nello studio sugli alcoli terpenici, tanacetilico, linalolico, il sabinolo, ecc. ecc., portando ora il mio esame sul carvomentolo, mi sono anche questa volta avvalso di modificazioni, elaborate caso per caso, che con successo in precedenza avevo apportato al comune metodo di depurazione degli alcooli terpenici.

(1) Die Aetherischen Oele., Bd. III, pag. 712 (1906).

Questo metodo che, come si è accennato, si basa sull'eterificazione degli alcooli con l'anidride ftalica e sulla susseguente saponificazione degli ftalati acidi del tutto depurati, non è invero scevro di difficoltà. Di sovente gli eteri ftalici acidi degli alcooli terpenici; specie se ottenuti col concorso del calore, si presentano come sostanze molli, resinose, appiccicaticce, di non agevole lavorazione, perchè, essendo estremamente solubili in tutti i solventi organici, ben di rado sono da questi cristallizzabili, depositandosi con lo svaporamento per lo più nell'identico stato pastoso di prima.

Tuttavia, operando in modo da escludere ogni riscaldamento, quando sono ricorso alla formazione di ftalati doppî, preparando cioè dallo ftalato acido sali di metallo che ho opportunamente scelto in ogni singolo caso (come il calcio, lo zinco, il magnesio, ed ora anche l'argento) oppure adoperando nello stesso intento diversi alcaloidi (brucina stricnina, chinina, cinconina), quasi sempre sono riuscito a pervenire a sostanze cristallizzabili, le quali, una volta isolate si prestano a tutte le purificazioni ad oltranza, senza ripassare più allo stato pastoso.

Alcune esperienze preliminari istituite sul carvomentolo inattivo, che, partendo dall'essenza di carvi, preparai per riduzione del carvenone con sodio ed alcool etilico assoluto, mi fecero subito accorgere che l'etere acido, ricavato dalla reazione fra il carvomentolo e la anidride ftalica, da per se solo è del tutto restìo ad ogni ulteriore depurazione; il prodotto grezzo è una massa semifluida, appiccicaticcia, solubilissima nella maggior parte dei solventi organici da cui non si riesce ad averlo sotto altra forma.

Dopo varî tentativi per preparare dallo ftalato acido altri sali puri, facilmente cristallizzabili, e adoperando specialmente diversi alcaloidi (quali la stricnina, la brucina, la cinconina) prescelsi la stricnina che si prestava meglio allo scopo, sia per le modalità delle operazioni, sia anche perchè questa base dà, con ciascuno degli stereoisomeri dello ftalato acido da sdoppiare, sali di solubilità marcatamente diverse in alcool-etere.

Dal sale di stricnina meno solubile, per agitazione con acido cloridrico in presenza di alcool, tornai allo ftalato acido di carvomentolo, ormai facilmente cristallizzabile e puro; naturalmente, in questo procedimento di ricristallizzazione mi serviva di criterio non soltanto il punto di fusione dell'etere, ma anche il suo potere rotatorio.

Da questo sale di stricnina meno solubile si perviene ad un etere sinistrogiro dal p. f. 125°, che non solo nella sua composizione corrisponde alla formula di uno ftalato acido di carvomentolo $HOOC \cdot C_6H_4 \cdot COOC_{10}H_{19}$, ma deve inoltre considerarsi come una sostanza unica, perchè comunque ricristallizzata non muta affatto il suo punto di fusione nè il suo potere rotatorio specifico $[\alpha]_D = -3°,80'$.

Per saponificazione di questo etere, si ottiene un carvomentolo liquido, sinistrogiro, con $[\alpha]_D = -1°,82'$, e che possiede i caratteri di una sostanza

unica, perchè, trattato con anidride ftalica, conduce, senza formazione di alcun altro prodotto secondario, direttamente allo ftalato acido descritto, fusibile a 125°.

Le acque madri da cui fu separato il sale di stricnina meno solubile, contengono un composto solubilissimo, derivato da un alcool destrogiro. Però per isolare quest'ultimo è necessario di trasformare il sale solubile, molle sciropposo, e cioè lo ftalato doppio di stricnina e di carvomentolo destrogiro, prima in sale di argento, insolubile in acqua e facilmente cristallizzabile dall'alcool.

Dal sale di argento puro si libera l'etere acido, fusibile costantemente a 109°, con $[\alpha]_D = + 4°,74'$; ed infine, per saponificazione con potassa alcoolica, si ottiene carvomentolo destrogiro che è l'antipodo prima isolato, avendo $[\alpha]_D = + 1°,83'$.

Dati i risultati sovraesposti, si intravede la possibilità di giungere all'isolamento anche di altri stereoisomeri del carvomentolo, teoricamente previsti.

Così, ad esempio, servendosi come materiale di partenza non più del carvomentolo dal carvenone, ma dell'esaidrocarvacrolo inattivo ottenuto da Brunel [1] col metodo Sabatier, si potrà tentare lo sdoppiamento di questo in antipodi ottici che pure devono rappresentare dei carvomentoli.

Sarà interessante inoltre studiare dal punto di vista cennato sia altri prodotti idrogenati otticamente attivi del carvacrolo, che si riscontrano nella letteratura, sia i carvomentoli preparati da Wallach partendo dal fellandrene.

Epperò mi propongo di istituire in proposito ulteriori ricerche.

Chimica biologica. — *Pirrolo e melanuria* [2]. Nota di PIETRO SACCARDI, presentata dal Socio A. ANGELI [3].

Continuando gli studî sul comportamento biologico del pirrolo [4] ho praticato ripetute iniezioni di pirrolo in sospensione acquosa su di un cane del peso di kg. 15 circa, a cui somministrai anche pirrolo per bocca. L'orina del cane, sottoposto a tale trattamento, dette la reazione di Thormählen subito dopo la prima iniezione, ma appena accennato, l'imbrunimento per azione della miscela cromica.

Ho notato che, pur continuando le iniezioni quotidiane a dosi crescenti, l'orina del cane non lascia raccogliere alcun precipitato nè per mezzo della

(1) loc. cit.

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica della R. Università di Camerino.

(3) Pervenuta all'Accademia l'11 agosto 1919.

(4) Questi Rendiconti.

miscela cromica nè previo trattamento col processo Eppinger, e mantiene sempre lievi le reazioni del melanogeno.

Non accadendo questo fenomeno nelle cavie nè nei conigli, sospetto che il cane, animale eminentemente carnivoro, più facilmente sia portato ad ossidare quei prodotti di scissione degli albuminoidi che fanno capo al pirrolo e che gli erbivori ossidano soltanto fino a melanogeno.

Il pirrolo è benissimo tollerato anche dal cane; l'orina non presenta mai il più piccolo accenno patologico quasi che l'organismo fosse in presenza di una sostanza per lui familiare.

Vedendo quindi l'impossibilità di poter ottenere una melanina da l'orina di cane, sono tornato ad esperimentare sul coniglio confrontando con le melanine, da questo ricavate, altre melanine naturali che ho potuto avere a mia disposizione.

Melanina dall'orina di coniglio

Sostanza nera, solubilissima in alcali a freddo; le soluzioni ottenute riprecipitano per acidificare con acidi minerali o con acido acetico. Purificata così per precipitazioni successive, neutralizzata e lavata con alcool in soxhlet fino a liquido incoloro, presentasi sotto forma di polvere bruna che su lamina di platino svolge vapori acri, dipoi brucia con difficoltà senza dar fiamma e senza lasciare residuo. Tali vapori arrossano fortemente un bastoncino d'abete intriso di acido cloridrico. Riscaldata in tubo da saggio, sublima in parte sotto forma di minutissime scagliette lucenti nere.

Dà marcatissima la reazione di Hofmann per le basi piridiche.

Melanina di seppia.

Questa melanina si presenta, allo stato naturale, sotto forma di particelle nerissime enormemente suddivise e legate a mucillagine albuminoidica che le impasta e da cui difficilmente si separa. L'unico mezzo possibile per separare la melanina è quello di sospendere il nero di seppia in alcali diluiti, portare all'ebollizione e filtrare. La mucillagine si scioglie e resta un nero che può esser lavato con molta difficoltà. Tal nero, bollito con potassa, si scioglie solo parzialmente; una parte anzi è del tutto insolubile in alcali dopo prolungata ebollizione con soluzioni concentrate.

Il soluto è bruno e da esso il nero riprecipita completamente per acidificazione nel giro di alcuni giorni. Solo questa porzione si può purificare. Al calore ed alla reazione di Hofmann per le basi più piridiche rivela lo stesso comportamento della melanina ricavata dal coniglio.

Melanina di capelli neri.

La melanina dei capelli si separa agevolmente mantenendo dei capelli in soluzione di soda diluita per 5-7 ore e scaldando dipoi cautamente a ba-

gnomaria. Si ottengono così un filtrato ed un precipitato nerissimo. Il filtrato è giallo e, per acidificazione, precipita la corneina sotto forma di masse plastiche, di odore fortemente solforato le quali, dopo purificazioni successive, lavate, e seccate, si possono ridurre in polvere finissima.

Il residuo su filtro, lavato e seccato, presentasi sotto forma di polvere nerissima, molto fine, solforata e ferruginosa. Tale melanina è parte solubile, parte insolubile in alcali a caldo anche dopo prolungata ebollizione in eccesso di alcali concentrato. Il filtrato è nero e, per acidificazione con acido acetico separa, col tempo, una polvere bruna, che, purificata e seccata, mostra all'esame le identiche reazioni viste per le altre melanine qui descritte. Così pura non contiene più nè solfo nè ferro.

Melanina della coroide.

È stata estratta col solito metodo dalla coroide dell'occhio del bove e presentasi sotto forma di polvere nero-rossastra finissima, sospesa nell'umor vitreo a cui è in contatto. Anche questa melanina si può dividere in due parti: quella solubile e quella insolubile in alcali a caldo. Per purificazione della parte solubile ottenni una melanina di comportamento chimico perfettamente identico a quello delle altre melanine prese a studiare.

Melanina di un tumore melanotico.

Il tumore in esame è nero-marrone e del volume di un'arancia. È stato asportato dalla regione inguino-crurale sinistra di un uomo dell'età di trentacinque anni. Altre porzioni sono state ritagliate da un altro tumore che allo stesso individuo occupava tutta la fossa iliaca interna sinistra ed aderente a' vasi iliaci esterni ed interni. Ambedue rappresentano metastasi di un papilloma melanotico operato sei mesi prima al tallone sinistro.

Scapsulati i tumori e pestate le diverse parti con polvere di vetro, si ottiene una massa bruna a cui l'idrato potassico, dopo macerazione di alcune ore, toglie parte della sostanza sotto forma di liquido nero. Un'altra parte della stessa sostanza è solubile per prolungata ebollizione con alcali concentrati, ne' quali resta ancora della sostanza insolubile bruna, mentre la melanina, ricavata dai liquidi alcalini mediante acidificazione e dopo purificazione, è costituita da polvere finissima e molto nera. Questa presenta gli stessi caratteri chimici delle altre melanine qui studiate e del nero di pirrolo di Angeli che, ottenuto mediante miscela cromica da sospensione acquosa di pirrolo e purificato, ha costituito per me il termine di paragone.

Faccio inoltre notare che tutti i suddetti neri si sciolgono in parte in miscuglio cromico ed ingialliscoono per trattamento con acqua ossigenata alla temperatura del bagnomaria. Uno di essi, il nero dei capelli, cangia assai sollecitamente il suo colore in giallo-oro impartendo ugual colorazione alla soluzione stessa.

Tutti i suddetti neri, bolliti con polvere di zinco in ambiente alcalino, dànno una soluzione che imbrunisce rapidamente all'aria.

Noto infine che il sublimato ottenuto per riscaldamento dei diversi neri in tubo da saggio presentasi al microscopio sotto forma di lamelle cristalline nere ortorombiche. Nessuna differenza cristallografica esiste fra i sublimati dei diversi neri, mentre quelli ottenuti per precipitazione sono costituiti da masserelle amorfe.

Concludo quindi per l'estrema somiglianza delle diverse melanine qui studiate col nero di pirrolo, ottenuto per ossidazione *in vitro* del pirrolo, non ostante che i mezzi di laboratorio non mi abbiano concesso di procedere a delle combustioni organiche.

Per estendere il campo delle mie ricerche e per studiare l'ossidazione ghiandolare *in vitro*, ho spappolato vari organi e tessuti con sospensione acquosa di pirrolo ed alcune gocce di toluolo, mantenendoli in termostato alla temperatura di circa 40°. Noto che il tessuto ghiandolare va gradatamette colorandosi in bruno con lo stesso aspetto di un comune tumore melanotico. Le ghiandole di bove prese in esame furono: mammella, fegato, testicolo, tiroide, rene e milza. Dopo sei giorni la mammella non dette alcun annerimento, anzi putrefece nonostante la presenza del toluolo; massimo annerimento fu dato dal fegato e dalla milza; poi vengono in ordine decrescente il testicolo, il rene e la tiroide. Dopo 15 giorni il liquido di spappolamento del fegato è completamente nero. Lo filtro per cotone, ed il liquido ottenuto lo ripasso per carta. Resta allora sul filtro una polvere nera, analoga a quella ottenuta dal tumore melanotico sopra descritto. Per soluzione in alcali e successive riprecipitazioni per acido cloridrico ebbi una melanina che presenta gli stessi caratteri fisici e chimici della melanina estratta dal tumore melanotico.

Noto inoltre che tenendo in termostato alla temperatura di 40° fegato, rene e milza — spappolati parte con pirrolo, alcune gocce di toluolo e 20 gocce di soluzione all' 1 $^{0}/_{00}$ di adrenalina, e parte con pirrolo e toluolo ma senza adrenalina — si ha rapido annerimento di quegli organi ghiandolari che furono mescolati con adrenalina; lentissimo in quelli senza adrenalina,

Sembrami adunque che l'adrenalina debba favorire l'ossidazione intraorganica dei prodotti di scissione degli albuminoidi; e fors'anche può darsi che sia essa stessa a produrre quell'ossidazione specifica, senza di cui il metabolismo dell'albumina si fermerebbe alla fase pericolosa di melanogeno e quindi di melanina.

Nelle orine dell'individuo operato del tumore melanotico non ho trovato nulla di anormale. In esse è negativa anche la reazione di Thormälhen e la diazoreazione di Erlich; ciò non ostante, continua nel paziente la formazione di nuovi tumori melanotici. L'assenza più assoluta di melanogeno o composti pirrolici nelle orine del paziente dimostra che l'organismo è asso-

lutamente impotente a distruggere le melanine — sostanze chimicamente così poco solubili — una volta formate.

Può darsi quindi che anche in questo caso la mancanza di un potere ossidante specifico o l'alterazione di prodotti specifici conduca parte dei composti di scissione degli albuminoidi a fermarsi a melanina.

Noto inoltre che la pelle del coniglio, sottoposto ad iniezioni di pirrolo, presenta sullo strato inferiore delle macchie nere, che il collega prof. E. Filippi studia dal lato istologico dopo avere eseguite delle accurate preparazioni microscopiche.

Sarà infine interessante estendere lo studio delle suddette ossidazioni specifiche ghiandolari rispetto al pirrolo, ricercare il comportamento di altri animali rispetto al pirrolo stesso e studiare più profondamente l'azione e l'importanza fisiologica dell'adrenalina rispetto al suo potere ossidante intraorganico.

Ricordo intanto che la cavia, erbivora come il coniglio, presenta lo stesso comportamento intraorganico rispetto al pirrolo, cioè lo stesso grado di ossidazione.

Mi è grato di ringraziare il prof. E. Filippi per i consigli largiti, il collega prof. Stoppoloni per i varii organi asetticamente raccolti e copiosamente usati ed il collega prof. Razzaboni per la cortesia con cui mi ha favorito un tumore melanotico e le orine stesse del paziente per un lungo periodo di tempo.

Vulcanologia. — *La catastrofica esplosione dello Stromboli* [1]. Nota di G. Ponte, presentata dal Corrispondente F. Millosevich [2].

Dal 1915 [3] lo Stromboli ha intensificato la sua attività eruttiva, la quale si è manifestata con frequentissimi trabocchi di lava e con esplosioni, che si sono ripetute con varia violenza fino a raggiungere nel giorno 22 maggio scorso, la forma catastrofica. La popolazione dell'isola, che sta addossata con le sue casette sparse sui fianchi NE e SW del vulcano, è ora molto minacciata.

La lava in colata mai è stata di lunga durata e rare volte abbondante; più frequentemente essa si è presentata con piccoli trabocchi rivestita da una crosta semisolida, a sacco, il cui fondo, ad ogni lieve aumento dell'ef-

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di mineralogia e vulcanologia della R. Università di Catania.

[2] Pervenuta all'Accademia l'11 agosto 1919.

[3] G. Ponte, *Lo Stromboli dopo il parossismo del 1915*. Rendiconti R. Accademia dei Lincei in Roma, 5 marzo 1916.

flusso lavico, si sgretola in macigni che, rotolando su l'erto pendìo della Sciara del Fuoco, vanno a tuffarsi fragorosamente nel mare.

Le esplosioni sono continue, di intensità variabile e qualche volta violentissime; intorno alla loro causa è stato da me detto in una Memoria presentata nel 1917 ed ancora in corso di stampa presso il R Comitato geologico d'Italia.

Io ho messo innanzi l'ipotesi che le esplosioni vulcaniche siano dovute all'idrogeno, al metano, all'ossido di carbonio e ad altri gas magmatici i quali, reagendo fra di loro o in mescolanza con l'ossigeno dell'aria, dànno, analogamente alle miscele tonanti, delle esplosioni tanto più formidabili quanto maggiore è la massa gassosa in reazione e quanto più perfette sono le miscele. D'altro canto, a preparare le esplosioni vulcaniche, concorre principalmente la struttura dell'apparato eruttivo. Un cratere aperto come quello del Kilauea non può dare esplosioni violente perchè i gas esalanti dal magma si svolgono rapidamente nell'atmosfera, già prima che essi possano entrare in reazione fra di loro o con l'ossigeno dell'aria. Ciò è avvenuto anche nelle eruzioni laterali dell'Etna ove qualche volta non si sono avute forti esplosioni al primo trabocco di lava, ma dopo, quando i materiali detritici si sono accumulati in forma di grandi coni intorno alle bocche emissive; allora i gas esalanti, risiedendo nei condotti, hanno la possibilità di reagire fra di loro e con l'ossigeno dell'aria determinando esplosioni tanto più violente quanto più larghe e profonde sono le cavità subcrateriche e quanto più perfette le miscele tonanti. Ho avuto occasione di constatare sullo Stromboli e sull'Etna che miscele incomplete di gas vulcanici, cioè quelle che hanno esploso a breve intervallo di tempo da altre precedenti, sono poco rumorose, simili a forti soffii, e ciò evidentemente perchè occorre del tempo a formarsi la miscela perfetta. L'accensione della miscela è provocata dalla lava rovente durante i suoi trabocchi oscillanti nelle cavità subcrateriche.

Delle esperienze di laboratorio dimostrano la semplicità di questo meccanismo delle esplosioni vulcaniche: in un tubo, chiuso ad un estremo e provvisto nel fondo di spinterometro, s'introduca del metano, avendo cura di chiudere il tubo con un lieve tappo di lana di vetro. Facendo scoccare subito una scintilla nel tubo non si ha alcuna reazione; ma essa può avvenire dopo alcuni minuti, cioè quando l'ossigeno dell'aria, penetrando per diffusione attraverso il turacciolo, incomincia a formare miscele tonanti, che dopo un dato tempo possono accendere con violenza.

Nella Fossa dello Stromboli sono sempre aperti parecchi crateri i quali hanno delle cavità sottostanti, probabilmente in comunicazione fra di loro; esse, durante un aumento dell'efflusso lavico, si caricano di gas tonanti e danno delle esplosioni spesso violentissime e tali da sconquassare tutto l'apparato eruttivo proiettando in aria anche della lava fluidissima, cioè quella di recente emissione.

Molti autori, come il De Lapparent ([1]), invece sono d'accordo nel sostenere che la violenza delle esplosioni dipenda dalla fusibilità della lava, e ciò in perfetta antitesi con i fatti osservati allo Stromboli, ove nelle recenti esplosioni si sono avute emissioni di lava fluidissima, filamentosa, tipo havaiano.

Malgrado che E. van den Broeck ([2]) sin dal 1903 abbia messo a conoscenza che l'idrogeno sia causa prima delle esplosioni vulcaniche, pure molti studiosi hanno persistito nel ritenere il vapor d'acqua, ipoteticamente contenuto nel magma, quale causa essenziale delle esplosioni. Ora, però, delle ricerche sperimentali ([3]) hanno provato che i gas magmatici sono anidri e che il vapore d'acqua contenuto nelle esalazioni è un prodotto di reazioni extramagmatiche.

Il Sabatini, in una Nota ([4]) di recente pubblicazione, ammette anche che le esplosioni vulcaniche siano dovute a reazioni gassose con detonazioni, cioè con effetti frantumanti, quasi in accordo con quanto io avevo pubblicato nella Nota su riferita; egli presenta interessanti calcoli balistici sulle esplosioni vulcaniche.

Lo Stromboli dà frequenti occasioni per lo studio dei proietti vulcanici e chi volesse troverebbe nei materiali della recente esplosione moltissimi elementi per i calcoli balistici.

Il Perret, in una relazione pubblicata nei giornali quotidiani ([5]), tende a modificare le sue idee sulla pressione dei gas vulcanici, convinto oramai che « le esplosioni secche e violente delle piccole bocche vuote dello Strom- « boli sono dovute non ad espansione semplice di gas liberati sotto pressione, « bensì a reazioni chimiche, come quella dell'idrogeno con l'aria ad alta « temperatura ». Però egli ha voluto dare una spiegazione diversa della esplosione catastrofica del 22 maggio scorso, immaginando un otturamento perfetto del camino eruttivo per retrocessione della lava viscosa e conseguente esplosione per pressione dei gas magmatici continuati sotto il turacciolo, conformandosi alla ipotesi già sostenuta da molti autori ([6]).

Il Perret non ha evidentemente tenuto presente che, come nel 1916 anche ora, pochi minuti prima dell'esplosione fu osservata della lava in colata sulla Sciara del Fuoco e che nei giorni precedenti il vulcano aveva varie bocche in crescente attività.

([1]) A. De Lapparent, *Volcans et tremblements de terre*. Paris 1912, pag. 138.

([2]) E. van de Broeck, Proc. verb. Bull. soc. belge de géol., XVII.

([3]) G. Ponte, *Ricerche sulle esalazioni dell'Etna*. Rend. R. Acc. Lincei Roma. Nota I, ott. 1914; Nota II, nov. 1914.

([4]) V. Sabatini, *Esplosioni vulcaniche*. Rend. R. Acc. Lincei, genn. 1919.

([5]) Frank A. Perret, *Recente parossismo dello Stromboli*. Corriere di Catania, 28 giugno 1919.

([6]) A. De Lapparent, loc. cit., pag. 135.

Considerando la grande forza che si sviluppa nelle camere di esplosione dei motori a scoppio, microscopiche rispetto alle vaste cavità che possono trovarsi sotto i crateri della Fossa dello Stromboli, non riesce inverosimile la spiegazione data della recente catastrofica esplosione. Vi furono masse di lava pastosa, di parecchi quintali, lanciate con alte traiettorie a tre chilometri dai crateri. La casa di Antonio Famulari, nell'abitato di S. Vincenzo, fu ridotta in macerie da una massa lavica del peso di circa 10 tonn. Molte bombe caddero sull'isola producendo rovine ed incendî. Fortunatamente i grossi massi caddero sparsi su larga superficie, risparmiando vittime e danni maggiori. Le case demolite e sfondate sono una ventina in tutte le frazioni abitate di Stromboli; i morti fra la popolazione quattro ed i feriti parecchi, più per effetto dello scotimento dell'aria che determinò lo sfondamento di porte chiuse e la rottura di vetri alle finestre. Al mare ebbesi una forte sessa che invase la spiaggia per largo tratto. Le bombe cadute si mantennero roventi per più giorni; quella caduta sulla casa del Famulari, che fu rotta a colpi di mazza per la ricerca di un soldato rimasto fra le macerie, era nell'interno, dopo due ore, ancora rovente e pastosa tanto che vi si poteva affondare facilmente il palo di ferro.

Nella Fossetta vicino alla Portella delle Croci, cioè a 400 m. dai crateri, arrivò un masso che cadendo si ruppe in tre blocchi, di cui uno di circa 40 mc. Dopo un mese questi blocchi si mantenevano ad elevata temperatura ed avevano delle fenditure ricoperte di minerali bianchicci e giallastri e dalle quali esalavano gas alla temperatura di 254° con reazione debolmente acida; essi furono accuratamente raccolti per le ricerche di laboratorio.

Il Perret, il quale osservò questi massi 10 giorni prima di me, afferma che la temperatura delle fumarole superava i 400° e che i gas esalanti erano costituiti da acido cloridrico con sublimazioni di cloruri alcalini e di ferro. Dalle ricerche da me fatte in laboratorio risulta invece che i gas erano costituiti da acido solforico e anidride carbonica in prevalenza e con sole tracce di acido cloridrico. I minerali allo stato amorfo e di colore bianchiccio erano esclusivamente dei solfati ferrosi e di alluminio in preponderanza, misti a solfati di Ca, Mg, Na, K, Ti, con tracce minime di sali d'ammonio ed assenza di cloruri. Siccome essi erano impiantati su scorie estremamente alterate, che dietro lavaggio con acqua lasciano un residuo di silice insolubile, è chiaro che i sali derivino dall'alterazione della roccia per azione dell'acido solforico.

Sulla crigna dello Stromboli cadde un masso di tale mole che sfiancò la cresta dal lato nord producendo delle fenditure sulle quali ora si sono riattivate le antiche fumarole solforose, che furono ostruite durante il terremoto calabro-siculo del 1908.

Il materiale più abbondante caduto è costituito da scorie esternamente filamentose, di color grigio-biondo e nell'interno molto bollose e di color

grigio-acciaio. Si tratta di materiale molto vetroso, cioè consolidatosi rapidamente, e contiene abbondanti grossi fenocristalli di augite facilmente isolabili.

Sulla Crigna della Fossa e nella Fossetta si formò un deposito di scorie da 2 a 3 m. di potenza. Il vento forte spinse le scorie più piccole fino alla costa sicula, e molte ne rimasero per più giorni galleggianti sul mare, specialmente dal lato SW di Stromboli, mentre il materiale più pesante, non deviato dal vento, cadde su tutti i versanti del vulcano

Parecchi isolani sono concordi nell'affermare che dapprima s'innalzò sul cratere una enorme nube oscura accompagnata da bagliori rossastri e, dopo circa 10 secondi, si udì la detonazione; i massi caddero sull'abitato più tardi ancora e quasi tutti in contempo.

Gli abitanti della vicina isola di Panaria affermano che un pino con magnifiche e gigantesche volute si sollevò sul cratere raggiungendo circa 10 volte l'altezza del vulcano. Alcuni pescatori, che si trovavano al largo, affermano che l'esplosione fu preceduta da una abbondante colata di lava che scivolò per la Sciara del Fuoco fino al mare.

Lo studio del materiale da me raccolto durante otto giorni di permanenza allo Stromboli ed il nuovo rilievo dei crateri formeranno oggetto di altre pubblicazioni; però sin da ora posso dire che:

1. Probabilmente i crateri della Fossa dello Stromboli prima della esplosione non erano in verticale corrispondenza con il camino eruttivo principale, ma impiantati su di una vôlta di materiale lavico e frammentario sotto la quale scorreva con lieve pendenza verso la Sciara del Fuoco la lava traboccante dal condotto principale.

2. La esplosione fu istantanea e suppongo sia avvenuta per detonazione frantumante di una miscela di gas magmatici ed aria racchiusi nelle cavità subcrateriche della Fossa, presumibilmente abbastanza vaste.

3. I materiali proiettati erano costituiti da masse compatte ipocristalline appartenenti a lava già in via di consolidazione e da scorie vetrose appartenenti a lava fluidissima tipo hawaiano, di più recente emissione, che ingombravano parte delle cavità subcrateriche.

4. La esplosione non fu preceduta ed accompagnata da scuotimenti del suolo. Ciò è in armonia con quanto è stato riscontrato in altri vulcani, che cioè i sismi provenienti da ipocentri superficiali ed elevati, rispetto al livello del mare, come quelli che provengono dal cratere di un vulcano, hanno aree molto ristrette. Terribili invece furono gli effetti dello scotimento dell'aria, registrato dal barografo del semaforo di Stromboli con un ampio spostamento della pennina scrivente [1]. Notevole lo spostamento

[1] Lo spostamento registrato dalla pennina fu di mm. 10,3, cioè quanto nell'esplosione del 1916. Ciò è inverosimile perchè gli effetti dell'attuale esplosione sono di gran

di porte chiuse robustissime e la rottura di vetri. Come nel 1916, il mare si ritirò dapprima ed invase poi la spiaggia, mettendosi in forte librazione. Poichè nessuno scuotimento del suolo fu avvertito, è probabile che il maremoto sia stato provocato dal rapido innalzamento della pressione atmosferica determinato dalla esplosione ed anche dall'urto prodotto dal materiale enorme rotolato per la Sciara del Fuoco fino al mare.

Embriologia vegetale. — *L'Erigeron Karwinskianus var. mucronatus è apogamo.* Nota di E. CARANO, presentata dal Socio R. PIROTTA [1].

In una Nota precedente [2], riferendo sullo sviluppo del sacco embrionale di questa pianta, ponevo in speciale rilievo il fatto che nella cellula madre delle megaspore non si effettua la divisione riduzionale e che perciò nel gametofito femmineo persiste lo stesso numero di cromosomi dello sporofito, a differenza di quanto avviene nelle cellule madri delle microspore in cui una divisione riduzionale si compie benchè non sempre in modo perfettamente normale.

Tale constatazione insieme con l'altra della presenza di un gran numero di granelli di polline abortiti nell'interno dei sacchi pollinici poco prima dell'antesi dei fiori tubulosi, m'induceva a supporre che l'*Erigeron Karwinskianus* var. *mucronatus* dovesse essere una specie apomittica. Epperò promettevo che, essendo allora la specie in parola in piena fioritura, ne avrei tentata la prova sperimentale.

Posso subito dire che l'esperimento ha confermato e convalidato pienamente i risultati dell'indagine microscopica.

Come accennavo nella mia Nota su ricordata, non vi è alcun indizio nella morfologia esterna delle calatidi della nostra pianta che serva a svelare il suo speciale comportamento: le linguette dei fiori del raggio sono bene sviluppate e patenti; gli stimmi delle due sorta di fiori ben conformati; le massoline di polline, se non abbondanti, sempre presenti all'estremità dei tubi delle antere dei fiori tubulosi appena sbocciati. Aggiungasi che non è difficile sorprendere, soprattutto dove sono riuniti numerosi individui come

---

lunga più rilevanti di quelli del 1916, bisogna quindi ritenere che l'arco della registrazione non sia stato segnato completamente per la grande velocità che assunse la pennina.

[1] Pervenuta all'Accademia il 12 agosto 1919.

[2] E. Carano, *Nuovo contributo alla embriologia delle Asteracee.* Atti R. Accad. Lincei, vol. XVIII, 1° sem., 1919, pag. 412.

in bordure o aiuole di questa pianta, degli insetti che si soffermano sulle infiorescenze per parecchio tempo.

Allo scopo dunque di poter isolare e meglio sorvegliare le piante in esperimento, ne preparai parecchi esemplari in vaso, togliendoli da una rigogliosa colonia crescente su una scogliera del nostro Orto.

Allorchè detti esemplari accennarono a fiorire, ne introdussi alcuni in serra; e quando mi sembrò che le giovani calatidi avessero raggiunto uno sviluppo sufficiente, cominciai ad operare su un buon numero di esse la castrazione secondo il metodo altrettanto semplice quanto sicuro del Raunkiaer [1]; cioè con un rasoio ben affilato asportavo tutta la parte superiore della calatide, in modo da allontanare, insieme con la maggior parte del tubo della corolla ancora chiusa, completamente le antere dei fiori tubulosi e di necessità lo stilo e gli stimmi. L'operazione era sempre di facile riuscita, anche quando per un taglio troppo radicale venivano lesi i giovani ovarî dei fiori più centrali, nel qual caso questi finivano col disseccarsi e costituire una zona bruna nel centro, mentre quelli periferici illesi potevano regolarmente continuare a svilupparsi.

Molte delle calatidi così operate furono senz'altro abbandonate a se stesse; altre invece, per maggiore precauzione, venivano racchiuse in borsettine di tela oppure avvolte in ovatta oppure, ciò che costituiva un espediente molto più semplice e di sicura applicazione, coperte soltanto sulla superficie del taglio di paraffina a 45° fusa, che subito si rapprendeva, formando un sottile strato a protezione del taglio medesimo.

In altre calatidi, invece di applicare il metodo del Raunkiaer, asportavo delicatamente con una pinzetta tutti i fiori tubulosi del disco, limitando in tal caso l'osservazione soltanto ai fiori ligulati. Naturalmente anche in questi casi coprivo con cautela per impedire l'impollinazione degli stimmi. Tutti i giorni poi ponevo speciale attenzione ad allontanare le calatidi prossime a fiorire, su cui non operavo in alcun modo.

Con simili precauzioni veniva esclusa qualsiasi possibilità sia di omo-, sia di allo-impollinazione.

Nelle calatidi castrate ma lasciate scoperte potevo seguire agevolmente tutte le modificazioni prodotte in seguito alla castrazione. E così scorgevo dopo breve tempo, quale segno evidente di un ulteriore accrescimento delle parti rimaste, l'allungarsi del moncone del tubo corollino, più tardi l'aumentare in volume delle calatidi e da ultimo lo sporgere, alla superficie del taglio, delle setole del pappo.

Anche nelle calatidi coperte con paraffina era agevole rilevare l'ulteriore accrescimento per ciò che il dischetto di paraffina, che all'inizio aderiva per-

[1] Raunkiaer C., *Kimdannelse uden Befrugtning hos Maelkebotte* (*Taraxacum*). Bot. Tidsskrift, 25 Bd., 1903, pag. 109.

fettamente al taglio, veniva dopo poco sollevato dai monconi delle corolle accrescentisi.

A circa una quindicina di giorni dall'inizio delle esperienze le prime calatidi operate erano già mature e, rovesciando all'infuori le brattee involucrali mozzate, liberavano gli acheni dall'aspetto del tutto normale, cioè ben turgidi e forniti di pappo ben sviluppato.

La prova che gli acheni fossero realmente abboniti mi veniva chiaramente offerta dalla presenza nel loro interno di un embrione che io riuscivo ad asportare intatto in un modo semplicissimo: col taglio di un ago a lancetta nel campo di un microscopio da preparazione allontanavo l'estremità inferiore dell'achenio, determinando una piccola apertura per la quale fuoruscivá facilmente l'embrione, esercitando soltanto una debole pressione sulla estremità opposta dell'achenio. In tal modo ispezionai, sempre con risultato positivo, numerosi acheni.

Come gli acheni delle calatidi scoperte o coperte con paraffina si comportano quelli delle calatidi racchiuse in borsettine di tela o avvolte in ovatta.

Un particolare interessante mi si è mostrato non di rado nelle calatidi quando, per il taglio troppo basso, morivano e si disseccavano, come ho detto più sopra, tutti i fiori del centro. Orbene, alla periferia della regione bruna così determinata spiccavano dei piccoli corpicciuoli bianchi, che esaminati alla lente si vedevano venir fuori da alcuni dei fiori decapitati. Fin da principio ebbi l'impressione che fossero degli ovuli che si accrescessero all'esterno della cavità ovarica rotta dal taglio, come mi fu in seguito confermato dall'esame microscopico.

In uno di tali casi il taglio aveva non solo asportato la parte superiore dell'ovario, ma lesa anche per un buon tratto la base dell'ovulo, il quale nonpertanto aveva continuato ad accrescersi, sporgendo ampiamente dalla cavità dell'achenio e mostrando nell'interno del sacco un embrione in via di sviluppo e abbondante albume.

Gli achenii ottenuti dalle calatidi operate, messi appena raccolti su carta bibula bagnata in scatole Petri, si sono dimostrati atti a germinare senza bisogno di alcun periodo di riposo; infatti, dopo circa una settimana dalla semina le giovani piantine già emettevano la loro radichetta.

L'*Erigeron Karwinskianus* var. *mucronatus* offre dunque un nuovo esempio di apogamia nelle Asteracee: l'embrione in questa pianta proviene da una oosfera il cui nucleo, per la mancata divisione riduzionale, possiede lo stesso numero di cromosomi delle cellule dello sporofito.

Fisiologia. — *Ricerche sulla natura del veleno dell'anguilla. II: Sulla dializzabilità dell'ittiotossico* [1]. Nota del dott. G. Buglia, presentata dal Corrispondente V. Aducco [2].

Continuando le ricerche sulla natura del veleno dell'anguilla, ho fatto alcuni esperimenti di dialisi per stabilire se la sostanza tossica contenuta nel siero di sangue dell'anguilla diffonde a traverso membrane.

U. Mosso [3] aveva trovato che questo siero, dializzato per alcuni giorni, non perde la sua tossicità e che l'acqua di dialisi non acquista proprietà tossiche. Eguale risultato ho ottenuto anch'io dopo aver dializzato siero di anguilla per 23 giorni. Contemporaneamente però a queste prove col siero normale, ne ho fatte altre con siero, sottoposto in precedenza ad accurata macinazione con cristalli di quarzo, e con siero sottoposto a digestione pancreatica. In queste condizioni ho potuto osservare che l'acqua di dialisi contiene una sostanza che, iniettata nelle rane, produce fenomeni di avvelenamento, che ricordano assai da vicino quelli per avvelenamento da siero di anguilla.

Riassumo brevemente i risultati sperimentali:

I esperimento. — Lasciando coagulare spontaneamente il sangue raccolto da tre grosse anguille, si ottengono 8 cc. di siero di colore giallo-verdastro e a reazione leggermente alcalina.

A) 12-VI-1919. 1 cc. di questo siero si diluisce con quattro parti di soluzione fisiol. (Na Cl 0,9 %).

2 cc. del siero così diluito si iniettano nell'addome di una rana. L'animale muore dopo 2 ore, presentando i soliti fenomeni di avvelenamento da siero di anguilla (tremori, contratture, paresi, paralisi).

1 cc. dello stesso siero diluito si aggiunge a 1 cc. di sangue defibrinato di cane. Dopo 12 ore questo si trova emolizzato.

13-VI-919. I 7 cc. di siero rimasti si mettono a dializzare entro un ditale dializzatore [4], in presenza di toluolo e alla temperatura dell'ambiente (20°-25° C.). L'acqua di dialisi viene rinnovata giornalmente.

[1] Pervenuta all'Accademia il 23 luglio 1919.

[2] Lavoro eseguito nell'Istituto di fisiologia della R. Università di Pisa, diretto dal prof. V. Aducco.

[3] U. Mosso, *Recherches sur la nature du venin qui se trouve dans le sang de l'anguille*. Arch ital. de biol., XII, 1889, pagg. 229-236.

[4] C. Schleicher e Schüll.

24-VI-919. 1 cc. del siero, messo a dializzare il giorno 13, si diluisce con quattro parti di soluz. fisiol. e si espone all'aria per qualche tempo sino alla scomparsa dell'odore di toluolo.

2 cc. del siero così diluito si iniettano nell'addome di una rana. L'animale muore, presentando i soliti fenomeni di avvelenamento, dopo ore 8,30′.

1 cc. dello stesso siero diluito, aggiunto ad 1 cc. di sangue defibrinato di cane, dà emolisi.

6-VII-919. 1 cc. del siero, messo a dializzare il giorno 13, si diluisce come precedentemente.

2 cc. del siero diluito si iniettano in una rana, la quale muore in 6 ore.

1 cc., aggiunto a 1 cc. di sangue defibrinato di cane, dà emolisi (osservazione dopo 6 ore).

B) 6-VII-919. 5 cc. del siero, dializzato per 23 giorni (quello stesso usato nelle prove precedenti), vengono macinati accuratamente nel mortaio con cristallini di quarzo. Si ottiene una miscela di colore giallo-verdastro, che si mette a dializzare contro 10 cc. di acqua, in presenza di toluolo. Per tre giorni si raccoglie l'acqua di dialisi (che è perfettamente limpida) e si fa evaporare a bagnomaria sino a secchezza. Il piccolo residuo che si ottiene si scioglie in 2 cc. di soluz. fisiol.

9-VII-919. 1 cc. di questa soluzione si inietta nell'addome di una rana. L'animale muore dopo 17 ore circa, avendo presentato tutti i fenomeni dell'avvelenamento da siero di anguilla (stato catalettico, paresi, paralisi e tremori agli arti posteriori).

1 cc. della stessa soluzione emolizza rapidamente una goccia di sangue defibrinato di cane.

12-VII-919. L'acqua di dialisi, raccolta per altri tre giorni successivi, si evapora come precedentemente. Il residuo si scioglie in 1 cc. di soluz. fisiol. e si inietta in una rana. L'animale presenta tutti i fenomeni tossici dell'avvelenamento lento da siero di anguilla, con prevalenza di fenomeni paralitici. Muore dopo due giorni: la pelle è asciutta, il corpo insecchito.

Si continua la dialisi del siero, rinnovando giornalmente l'acqua.

17-VII-919. 1 cc. di questo siero dializzato si inietta nell'addome di una rana. Dopo due giorni l'animale è vivace; cc. 0,5 di questo stesso siero aggiunti a cc. 0,5 di soluz. fisiol., contenente una goccia di sangue defibrinato di bue, non dànno emolisi.

C) 11-VII-919. A 3 cc. di siero, ottenuto dalla coagulazione spontanea del sangue di due anguille, si aggiungono 20 gocce di estratto pancreatico di bue e si mettono a dializzare in presenza di toluolo, in termostato a 38° C.

Nelle prime 16 ore si rinnova tre volte l'acqua di dialisi (10 cc.) e, riunita, si evapora a bagnomaria sino a secchezza. Si ottiene un piccolo residuo gialliccio che, sciolto in 2 cc. di soluz. fisiol., dà un liquido dello stesso colore, non del tutto limpido.

cc. 1,5 di questo liquido, iniettati in una rana, producono fenomeni catalettici, paresi, paralisi e tremori agli arti posteriori. Dà la morte dell'animale in 24 ore.

cc. 0,5 dello stesso liquido, aggiunti a cc. 0,5 di soluz. fisiol. contenente una goccia di sangue defibrinato di cane, non dànno emolisi.

12-VII-919. L'acqua di dialisi della notte dell'11 e del giorno 12, raccolta ed evaporata, dà un piccolo residuo che si scioglie in cc. 1,5 di soluz. fisiol.

1 cc. di questo liquido, iniettato nell'addome di una rana, produce fenomeni di avvelenamento lento. L'animale muore dopo due giorni, presentando la pelle asciutta e il corpo insecchito.

cc. 0,5 di detto liquido, aggiunti a cc. 0,5 di soluz. fisiol., non emolizzano il sangue defibrinato di cane.

Si continua la dialisi del siero rinnovando giornalmente l'acqua.

17-VII-919. 1 cc. di questo siero dializzato si inietta in una rana. Non si osserva alcun fenomeno tossico e l'animale, dopo due giorni, è ancora vivo e vivace.

Da questo esperimento risulta:

1°) Il siero normale del sangue di anguilla non perde la sua tossicità neppure dopo 23 giorni di dialisi.

2°) L'acqua di dialisi del siero di anguilla, macinato in mortaio con cristalli di quarzo, e quella del siero sottoposto a digestione pancreatica, iniettata nelle rane, è tossica e produce fenomeni che si osservano anche nell'avvelenamento, più o meno rapido, da siero. Non sempre però produce emolisi del sangue di cane.

3° Il siero di sangue di anguilla, sia macinato con cristalli di quarzo, sia sottoposto a digestione pancreatica, perde la sua tossicità se viene dializzato per alcuni giorni.

II esperimento. — 13-VII-919. Da quattro grosse anguille si ottengono 12 cc. di siero (di colore verdastro, non perfettamente limpido e a reazione leggermente alcalina), che si dividono in tre parti di 4 cc. ciascuna.

L'una (*A*) si mette a dializzare a temperat. amb. e in presenza di toluolo, senza sottoporla a speciali trattamenti; l'altra (*B*) si sottopone ad accurata macinazione con cristalli di quarzo eppoi, come la precedente, si mette a dializzare a temperatura amb.; alla terza (*C*) si aggiunge 1 cc. di estratto pancreatico di bue e si mette a dializzare in presenza anch'essa di toluolo, alla temperatura di 38° C.

Per quattro giorni successivi si rinnova due volte al giorno l'acqua di dialisi, raccogliendo separatamente quella dei tre diversi campioni di siero.

17-VII-919. L'acqua di dialisi del siero normale (*A*) è limpida, incolora; evaporata sino a secchezza, dà un piccolo residuo gialliccio, che si scioglie in cc. 1,5 di soluz. fisiol.

1 cc. di questa soluzione si inietta in una rana. L'animale non presenta fenomeni tossici; e dopo due giorni è vivo, vivace.

cc. 0,5 della stessa soluzione, aggiunti a cc. 0,5 di soluz. fisiol. contenente una goccia di sangue defibrinato di bue, non dànno emolisi.

17-VII-919. L'acqua di dialisi del siero sottoposto precedentemente a macinazione (*B*), è limpida, incolora; evaporata, dà un piccolo residuo che, sciolto in cc. 0,5 di soluz. fisiol., dà a questa una reazione alcalina (probabilmente dovuta in parte all'alcalinità stessa del siero, ma in parte anche, come mi è risultato da alcune prove in bianco, al disciogliersi di sostanze del vetro del mortaio dove veniva fatta la macinazione).

1 cc. di questa soluzione si inietta nell'addome di una rana. Poco dopo l'iniezione, compaiono fenomeni di avvelenamento (paresi e paralisi agli arti posteriori); se si affatica l'animale, capovolgendolo due o tre volte, non è più capace di raddrizzarsi spontaneamente. Stimolato, presenta tremori agli arti posteriori. Dopo 3 ore è incapace di raddrizzarsi; tutto il corpo è paralizzato; risponde agli stimoli soltanto con movimenti iodei. Al termine di quattro ore, l'animale muore.

cc. 0,5, della stessa soluzione si aggiungono a cc. 0,5 di soluz. fisiol. contenente una goccia di sangue defibrinato di bue: non si ha emolisi.

17-VII-919. L'acqua di dialisi del siero a cui fu aggiunto estratto pancreatico, come nei casi precedenti, viene evaporata a bagnomaria sino a secchezza. Il piccolo residuo gialliccio si scioglie in cc. 1,5 di soluz. fisiol.

1 cc. di questa soluzione, che ha reazione leggermente acida, si inietta nell'addome di una rana. In 2 ore e 30′ l'animale muore presentando prevalentemente fenomeni paralitici.

cc. 0,5 della stessa soluzione, aggiunti a cc. 0,5 di soluz. fisiol. contenente una goccia di sangue defibrinato di bue, non dànno emolisi.

Da questo esperimento risulta:

1°) L'acqua di dialisi del siero normale di anguilla, iniettata nelle rane, non produce fenomeni tossici. Aggiunta a sangue defibrinato di bue, non dà emolisi.

2°) L'acqua di dialisi del siero di anguilla, macinato con cristalli di quarzo, e quella del siero sottoposto a digestione pancreatica, iniettate nelle rane, sono tossiche. Non hanno però azione emolitica sul sangue defibrinato di bue.

I risultati degli esperimenti che ho riferito dimostrano dunque chiaramente che dal siero di anguilla, sottoposto ad azioni fisiche o chimiche disgregative, dializza una sostanza che, iniettata nella cavità addominale delle rane, produce fenomeni tossici che si osservano anche nell'avvelenamento da siero normale di anguilla.

Attualmente sto facendo indagini per stabilire se questa sostanza sia proprio quella che costituisce l'*ittiotossico* o veleno dell'anguilla, e spero di poterne riferire prossimamente i risultati.

Per ora mi limito a far considerare che, se tale sostanza tossica non dializza dal siero normale di anguilla, ciò probabilmente dipende dal fatto che essa si trova in un legame più o meno labile con sostanze non dializzabili, quali sono le sostanze albuminose [1]. E mentre la dialisi (non eccessivamente prolungata) è un mezzo insufficiente a scindere questo legame, lo sarebbero le azioni disgregative, come ad esempio quelle prodotte da una sufficiente macinazione con cristalli di quarzo, o da un processo fermentativo.

Fisiologia. — *La glicosuria fisiologica nell'uomo sottoposto a rarefazione atmosferica* [2]. Nota preliminare di M. Camis, presentata dal Corrisp. G. Galeotti [3].

Tra le forme di glicosuria transitoria osservate in animali solitamente aglicosurici, ha importanza particolare quella dovuta a disturbi della respirazione interna e dei tessuti. Le nostre conoscenze in proposito — se non vogliamo tener conto di qualche osservazione priva di conforto sperimentale — rimontano a Cl. Bernard e, dopo di lui, a Schiff e ad altri che notarono appunto l'influsso dell'asfissia su forme di diabete passeggero. Ma le prime ricerche veramente sistematiche sono dovute all'Araki [4], il quale, sperimentando sopra cani, conigli e polli accertò che dopo avere respirato in un'atmosfera povera di ossigeno, questi animali presentano nell'orina, insieme con acido lattico e con un'albumina coagulabile al calore, glucosio.

Lo stesso effetto che la scarsità di O_2 nell'atmosfera si ha per avvelenamento da CO. Se gli animali erano stati tenuti a digiuno, la glicosuria non compariva.

La comparsa di glucosio in simili circostanze fu confermata da ricercatori successivi, ma il determinismo di essa non fu interpretato in maniera concorde; così mentre per Araki si tratta di una conseguenza dell'anossiemia, per Edie [5], la glicosuria, che si riscontra dopo asfissia parziale, non è dovuta a mancanza di ossigeno ma all'alta percentuale di anidride carbonica contenuta nell'aria respirata.

[1] Questa opinione sarebbe convalidata dagli esperimenti, che ho riferito nella Nota precedente, e dal risultato di alcune prove in corso, sull'azione tossica della bile dell'anguilla.

[2] Lavoro eseguito nell'Ufficio psico-fisiologico per l'aviazione militare di Torino, diretto dal prof. A. Herlitzka.

[3] Pervenuta all'Accademia il 20 agosto 1919.

[4] Araki Trasaburo, *Ueber die Bildung von Milchsäure und Glycose in Organismus bei Sauerstoffmangel.* (Hoppe-Seyler's Zeitschr. f. physiol. Chemie, 1891, XV, 335-370).

[5] Edie E. S., *On glycosuria caused by excess of carbon dioxide in the respired air* (Bio.-chem. Journ., an 1906, I, 455-673).

Secondo questo autore la presenza di 10-15 % in volume di CO_2 nell'aria respirata determina glicosuria, e questa si manifesta anche se la quantità di ossigeno presente è superiore a quella della normale aria atmosferica. La sola scarsità di ossigeno (meno del 6 %), non accompagnata da eccesso di anidride carbonica, non produrrebbe mai glicosuria. Che la glicosuria dipenda da eccesso di CO_2 e non da mancanza di O_2, è opinione anche di Macleod [1]; ma neanche qui l'accordo è completo, perchè mentre questi ritiene che la CO_2 stimoli la glicogenolisi epatica, l'Edie conclude che essa agisce come un anestetico; e poichè è noto che gli anestetici si combinano con le proteine, ritiene che la glicosuria dipenda dalla combinazione della anidride carbonica con proteine, e da liberazione di molecole di idrati di C che erano prima legate al nucleo proteico.

Henderson e Underhill [2] sostengono che la glicosuria è una conseguenza della mancanza di CO_2: dell'acapnia. Ma forse queste opinioni, per quanto diverse, non sono incompatibili fra loro, perchè la glicosuria è l'espressione di un'alterazione del ricambio, che può dipendere da fattori diversi ed anche opposti fra loro.

Nel cominciare le osservazioni, che qui riferisco e che non poterono, per svariate circostanze, essere condotte al desiderato compimento, mi proponevo anzitutto di accertare se nell'uomo esista una forma di glicosuria paragonabile a quella osservata negli animali, e speravo in secondo luogo di contribuire a metterne in chiaro la causa.

Da soggetto servivano quei candidati aviatori che dovevano, per altri motivi, essere esaminati rispetto alla loro resistenza alle variazioni di pressione.

In un campione di orina del soggetto, raccolta nella mattinata stessa o nello stesso pomeriggio dell'esperimento, ricercavo il glucosio con la reazione di Nylander, eseguita sempre esattamente nello stesso modo, vale a dire: un volume di reattivo per 10 di orina ed immersione per 20 minuti in un bagno-maria in ebullizione.

La stessa ricerca si ripeteva in un altro campione raccolto, appena fosse possibile, dopo la prova. Questa consisteva nel disporre la persona sotto la campana pneumatica di Mosso [3], nell'interno della quale si rarefaceva gradatamente l'aria per mezzo di una pompa. Una corrente d'aria, regolabile a volontà, penetrava nella campana in modo da permettere un ricambio continuo. L'atmosfera in cui respirava il soggetto era così rarefatta

[1] Macleod J. J. R., *Studies in esperimental glycosuria, IV.* Americ. Journ. of Physiol., 1909, XXIII, 278-302.

[2] Henderson e Underhill F. P., *Acapnia and glycosuria.* (Amer. Journ. of Physiol., 1911, XXVIII, 275-289).

[3] A. Mosso, *L'acapnia prodotta nell'uomo dalla diminuita pressione barometrica.* Rend. R. Accad. Lincei, an. 1903, XII, 1° sem., pag. 453-459.

ad arbitrio, ma in essa non avveniva accumulo di CO_2; tanto più che l'apertura da cui penetra l'aria fresca è situata in alto, e quella da cui l'aria viene aspirata è posta in basso. Un manometro permetteva di seguire e regolare l'andamento della esperienza.

Il primo candidato, su cui rivolsi la mia attenzione (S. C.), presentava prima della esperienza un'orina limpida, di reazione acida e densità 1017, priva di albumina e glucosio. Dopo essere stato per venti minuti in un'atmosfera rarefatta a 460 mm., presentò una quantità notevole di zucchero nell'orina.

Altri soggetti esaminati dettero un analogo risultato e cioè:

N. 2. (M. S.). Pressione barom. esterna 744. Temp. 16°. *Orina*: *zucchero assente.* Introdottolo alle ore 15,50′ sotto la campana si arriva dalle 15,55′ alle 16,20′, ad una pressione di 326 mm. corrispondenti ad un'altezza di 6750 m. Non manifesta nessun disturbo e tollera benissimo anche la ricompressione, che incomincia 5 minuti dopo ed avviene gradatamente in 25 minuti. *L'orina, che si raccoglie subito dopo uscito dalla campana, contiene glucosio.*

N. 3. (F. F.). Pressione barom. esterna 743. Temp. 25°. Orina giallo-citrina, acida; densità 1018, albumina assente. *Glucosio assente.* Alle ore 15,35′ è introdotto sotto la campana. Dalle 15,38′ alle 16,13′ si diminuisce la pressione fino a 390 mm. corrispondenti circa ad una altezza di 6000 m. Dopo 5 minuti si ricomincia la ricompressione, che avviene in 15 minuti. Nessun disturbo grave da parte del soggetto. Alla pressione di 390 mostrava una leggera cianosi, ed un'incipiente dispnea, con lieve vertigine. Appena comincia la ricompressione, questi fenomeni scompaiono. L'orina raccolta dopo l'esperimento contiene *traccie di glucosio.*

N. 4. (T. R.) *Orina normale: glucosio assente.* Dalle ore 15,50′ alle 16,15 si arriva ad una pressione di 400 mm., alla quale resta 12 minuti; quindi si comincia la ricompressione che avviene abbastanza rapidamente (in 15 minuti si arriva a 740 mm.). Disturbi da parte del soggetto a partire da un'altezza di 5000 m.: pallore, lievissima iperemia congiuntivale, sbadiglio, leggera cefalea, cianosi alle labbra. Respirazioni 27. Polso 85. Durante la ricompressione ronzìo agli orecchi. L'*orina,* dopo l'uscita del soggetto dalla campana, *contiene glucosio.*

Ripensando alla importante affermazione di Araki che negli animali a digiuno non si ha glicosuria da anossiemia, ho ripetuto l'esperimento il mattino, quando cioè il soggetto non aveva mangiato dalla sera precedente.

N. 5. (D'O. F.). *Orina normale, senza glucosio.* Dalle ore 10,30′ alle 10,50′ si arriva ad una pressione di 430 mm. Il soggetto presenta disturbi notevoli fino da un'altezza di 1000-1200 m. All'altezza massima raggiunta (4900 m.) i disturbi sono abbastanza sensibili: leggera cianosi, edema palpebrale, 30 respiri al minuto. Deglutizione faticosa, dolore agli orecchi. Dopo la prova l'*orina contiene glucosio.*

N. 6. (Di C. C.). *Orina normale, senza glucosio.* Dalle ore 9,35′ alle 10,5′ si arriva ad una pressione di 341 mm. corrispondenti a circa 6400 m. Disturbi abbastanza sensibili con principio di deliquio. La ricompressione avviene senza alcun disturbo da parte del soggetto. Dopo l'esperimento l'orina presenta *lievissime traccie di glucosio.*

Da queste brevi osservazioni appare che l'uomo, quando si trovi in condizioni di anormale chimismo respiratorio. può presentare una glicosuria pas-

seggera. Sul determinismo di questo fenomeno io non posso pronunciarmi con sicurezza; mi sembra di poter escludere completamente che, nelle mie condizioni di esperienza, potesse trattarsi di eccesso di CO_2.

Notevole è che nessun rapporto ho notato fra la maggiore o minore gravità dei disturbi generali causati dalla depressione atmosferica e la glicosuria, come si può vedere, ad esempio, dal n. 6 che presentò *lievissime tracce* pur avendo un principio di deliquio, in confronto al n. 2 che non ebbe il menomo malessere sotto la campana e presentò poi una glicosuria sensibile.

Continuando le mie ricerche mi occorse, in due soggetti giovani, sani e normali, di riscontrare glucosio nell'orina prima dell'esperimento. Questo fatto mi pare che si possa spiegare solo tenendo conto di un altro fattore e cioè dello stato emozionale dell'individuo.

Prescindendo da alcuni casi clinici di forme diabetiche aggravate od insorte per una violenta emozione, il riconoscimento di una glicosuria di origine emotiva trae origine dall'osservazione di animali spaventati e irritati dai preparativi di un esperimento. Recentemente Cannon, in collaborazione con altri [1], studiò più sistematicamente questi fenomeni sostenendo che lo stimolo emotivo e dolorifico provoca la mobilitazione dello zucchero attraverso una eccitazione della secrezione adrenalinica.

Lo stato d'animo di un candidato, che attende d'esser sottoposto a numerose prove di significato mal compreso e di esito incerto, è molto vicino allo stato emozionale di uno studente che debba affrontare un esame rigoroso. Smillie potè in queste condizioni dimostrare zucchero nell'orina di studenti normalmente aglicosurici [2].

D'altra parte, l'essere sottoposti alla prova della campana pneumatica non può essere senza effetto sullo stato emotivo del soggetto. Quindi il fattore *emozione*, che è probabilmente l'unico in quei casi di glicosuria manifestatasi prima dell'esperimento, è quasi certamente presente — anche se associato con altri — nei casi accertati dopo la campana. L'interesse della questione quindi si allarga.

Occorre indagare se l'eccitata secrezione adrenalinica è un fattore della glicosuria da alterato chimismo respiratorio, e se le variazioni della pressione barometrica abbiano qualche influsso sull'attività delle surrenali.

Le esperienze, che avevo in animo di fare, respirando varie miscele gassose ed associando l'impiego della camera pneumatica all'esperienza in volo, furono interrotte al loro inizio da circostanze estranee.

[1] W. B. Cannon e de la Paz, *Emotional stimulation of adrenal secretion* (Amer. Journ., of Physiol. 1911, XXVIII, pag. 64-70); W. B. Cannon e R. G. Hoskins, *The effect of asphyxia, iperpnoea and sensory stimulation on adrenal secretion* (ibid., 1911-12, XXIX, pag. 279-279); W. B. Cannon, Shohl e Wright, *Emotional glycosuria* (ibid., id., pag. 280-287).

[2] Citato da Cannon, *The interrelations of emotions* ecc. (Amer. Journ. of Psychol., 1914, XXV, pag. 263).

Per ora non posso riferire che un'unica esperienza compiuta su me stesso. Il 19 ottobre 1918 salito in velivolo come passeggero, munito di un serbatoio di O_2 con respiratore Garseau per me e per il mio pilota (B.). Quota raggiunta 4650 m. Dai 3000 m. in su feci funzionare il respiratore per il pilota mentre io respiravo l'aria atmosferica. Durata del volo 50 minuti. Appena atterrato, raccolsi un campione di orina e trovai:

orina di (B.), glucosio assente; orina di (C.), glucosio tracce.

Il pilota assicurava di aver sentito gran benessere dalla somministrazione di O_2.

Da questa unica ed incompleta esperienza, data l'assenza completa di emozione da parte mia, apparirebbe che la causa, per cui io ebbi glicosuria e il B. no, sia da ricercare nella sola diversità che correva fra le sue condizioni e le mie: la scarsità di O_2 a mia disposizione. All'altezza raggiunta infatti si può calcolare che la tensione parziale dell'ossigeno nell'atmosfera fosse di 89 mm.

Fisiologia. — *Ricerche sulla secrezione spermatica.* VII: *Considerazioni generali sulla secrezione normale del cane e dell'uomo* [1]. Nota di G. Amantea, presentata dal Corrisp. S. Baglioni [2].

Le osservazioni ormai numerose sul decorso normale della secrezione del cane e dell'uomo, e in parte soltanto riferite nelle precedenti Note [3], permettono rilievi generali, dei quali tratterò nella Nota presente, perchè essi rappresentano una specie di ricapitolazione sintetica e comparativa dei principali risultati finora pubblicati, e dall'altro lato serviranno a costituire una necessaria base a quelli che saranno esposti più tardi.

Le osservazioni sono state iniziate e condotte col proposito essenziale di estenderle soprattutto all'animale (il cane), controllandole solo nei limiti possibili, a mano a mano, anche sull'uomo.

Quelle sul cane rappresentano l'utilizzazione del metodo della vagina artificiale, che permette di tenere conto esatto della durata del coito fittizio, della quantità di liquido eliminato, e del numero relativo (per mmc.) e assoluto (per ejaculazione) di spermatozoi. Tali dati acquistano speciale importanza, se si considera che la durata del c. f. può essere assunta quale indice dell'attività dei centri nervosi per l'erezione e l'ejaculazione; la quan-

[1] Ricerche eseguite nell'Istituto fisiologico della R. Università di Roma.

[2] Pervenuta all'Accademia il 22 luglio 1919.

[3] G. Amantea, Atti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXIII, serie 5ª, 1° sem. 1914; ibidem, vol. XXIV, serie 5ª, 2° sem. 1915; G. Amantea e T. Rinaldini, ibidem, vol. XXVIII, serie 5ª, 1° sem. 1919.

tità di liquido eliminato quale indice dell'attività prostatica (mancando il cane di vescichette seminali e di glandole del Cowper), e infine il numero di spermatozoi quale indice dell'attività testicolare ed epididimale. Dalla partecipazione più o meno completa al c. f., dalla vivacità dei movimenti di coito, ecc., si può inoltre desumere il grado di eccitamento sessuale dell'animale.

Anche per le osservazioni fatte sull'uomo si è cercato di tenere conto di dati corrispondenti, con la differenza di aver dovuto però qui utilizzare necessariamente quelli riferiti dal soggetto nei riguardi della durata del coito e del grado di eccitamento sessuale. Circa il volume dell'ejaculato e il numero di spermatozoi, se non è possibile raggiungere nell'uomo il rigore di osservazione come sperimentando sul cane, si arriva tuttavia a un grado di esattezza sufficiente per la soluzione di determinati problemi; e si può in compenso tener conto anche delle condizioni fisiologiche e psicologiche, in cui l'atto fu compiuto, di eventuali condizioni patologiche pregresse o attuali, ecc.

Con tale indirizzo sperimentale ho potuto raccogliere finora un numero di osservazioni sufficienti per tentare il raffronto tra il comportamento della secrezione spermatica del cane e dell'uomo in condizioni normali, allo scopo di mettere in rilievo i fatti comuni o differenziali più salienti.

La *durata del coito* nell'uomo, entro certi limiti, condizionati dal grado di sensibilità della zona riflessogena per l'erezione e l'ejaculazione ([1]), nonchè dal grado di eccitabilità dei centri spinali corrispondenti, dipende indubbiamente non solo dall'influenza dell'agevolazione e dell'inibizione volontaria, ma anche dall'influenza agevolatrice e inibitrice di eventuali stimoli periferici cutanei, acustici, visivi, ecc.

Nel cane — per cui, come ho già avuto occasione di mettere in evidenza ([2]), la durata del coito varia a seconda dei singoli animali, mantenendosi però costante per uno stesso animale, entro determinati limiti che non sono normalmente mai oltrepassati — il grado di sensibilità della zona riflessogena ([3]) e il grado di eccitabilità dei centri spinali condizionano certo la maggiore o minore prontezza dell'erezione e il più o meno pronto inizio dell'ejaculazione; ma la durata del coito fittizio sembra sottrarsi affatto all'influenza dell'agevolazione e dell'inibizione volontaria. Cosicchè, pur presentando nette variazioni individuali, essa appare quasi come prestabilita e determinata per ogni singolo animale; e se oscillazioni o variazioni anormali si osservano anche nello stesso cane, esse si presentano per solito nel senso di un accorciamento più o meno accentuato, da mettere in rapporto con lo stato dei centri nervosi, come si può desumere, per esempio, dalle esperienze di esaurimento sessuale, provocando il coito fittizio a brevi intervalli.

([1]) S. Baglioni, Pflüger's Arch., Bd. 150, an. 1913.
([2]) G. Amantea, loc. cit.
([3]) G. Amantea, Pflüger's Arch., Bd. 154, 1913.

Quando l'erezione è completa e si inizia l'ejaculazione a getti ritmici accompagnati da ritmiche contrazioni di muscoli perineali, sia durante il coito fittizio sia durante il coito normale, non vale nessuno stimolo molesto o doloroso, portato su qualsiasi parte del corpo dell'animale, ad interrompere l'atto: punzecchiando l'animale, frustandolo, cauterizzandone la cute, fino a provocare guaìti e grida, non mi è mai riuscito di ottenere l'effetto inibitorio; eguale risultato negativo hanno dato gli stimoli gustativi, olfattivi, acustici o visivi di qualsiasi intensità. Efficaci, al contrario, si sono dimostrati solo gli stimoli termici di freddo, se intensi, portati su estesa superficie cutanea, e improvvisi.

L'influenza dei centri superiori (psichici) si esplica senza dubbio, anche nel cane, nel senso di un'agevolazione o di un'inibizione dei riflessi spinali corrispondenti, ma solo fino al periodo di orgasmo propriamente detto, il quale coincide col completarsi dell'erezione e con l'inizio dell'ejaculazione; mentre durante il periodo successivo l'atto sembra procedere indipendentemente da influenze superiori, per l'attività dei soli meccanismi riflessi sottostanti, che saranno meglio analizzati e precisati con ricerche speciali.

Il *volume* del liquido che si elimina coll'ejaculazione è riferibile nel cane in massima parte alla secrezione prostatica, e solo in piccola parte è di provenienza epididimale, mancando, come ho detto, le vescichette seminali e le glandole del Cowper. Nell'uomo invece esso deriva in piccola parte dall'epididimo e in massima parte dalle glandole accessorie (prostata, glandole del Cowper, e vescichette seminali).

Fra lo sperma del cane e quello umano esistono inoltre differenze di natura chimica e chimico-fisica bene apprezzabili, che saranno esaminate altrove.

Comunque, a parte tali diversità di origine e di composizione, si può affermare che il volume dell'ejaculato raggiunge nel cane cifre più alte che non nell'uomo, sia considerandolo in rapporto al peso del corpo, sia indipendentemente da esso. Le cifre massime trovate pel cane non si osservano mai nell'uomo, nemmeno in linea eccezionale.

Restano tuttavia in comune le *variazioni individuali* del volume dell'ejaculato, nonchè le regole delle variazioni reciproche tra quantità di sperma e numero di spermatozoi, che furono enunciate trattando della secrezione spermatica nell'uomo [1], e che valgono anche pel cane.

Si può infatti senz'altro affermare che tanto pel cane come per l'uomo:

a) a parità di ogni altra condizione, il volume dello sperma e il numero di spermatozoi per ciascuna ejaculazione variano col variare dei singoli individui;

[1] G. Amantea e T. Rinaldini, loc. cit.

b) a parità di condizioni, individui che eliminano lo stesso volume di sperma non eliminano di solito lo stesso numero di spermatozoi, e viceversa;

c) per uno stesso individuo, il numero degli spermatozoi, in ejàculazioni successive, non è mai esattamente proporzionale al volume dell'ejaculato;

d) per ejaculazioni successive di uno stesso individuo, le variazioni del volume dell'ejaculato mantengono una relativa indipendenza rispetto alle variazioni del numero di spermatozoi;

e) il volume dell'ejaculato e il numero di spermatozoi in esso contenuti variano generalmente nello stesso senso, ma qualche volta anche in senso inverso; mai però proporzionalmente.

Differenze notevoli invece tra cane e uomo si rilevano nei riguardi delle cifre relative e assolute di spermatozoi: nel cane il numero medio assoluto di spermatozoi eliminabili con un'ejaculazione è più basso che nell'uomo, sia considerandolo in rapporto al peso del corpo, sia indipendentemente da esso. Ciò, insieme col comportamento affatto inverso del volume dell'ejaculato, spiega perchè anche il numero medio relativo di spermatozoi (densità per mmc.) debba risultare, a parità di condizioni, più basso nel cane.

Meccanica. — *Un caso notevole di risonanza torsionale.* Nota dell'ing. P. Ferretti, presentata dal Socio V. Volterra [1].

Su due sommergibili, acquistati in Inghilterra durante il periodo della guerra e venuti in Italia di là con i loro mezzi, si cominciarono a produrre alle linee d'assi, dopo circa 180 ore di moto, gravi inconvenienti che andarono sempre più accentuandosi fino a mettere del tutto fuori servizio i sommergibili stessi.

Si trattava, sostanzialmente, di sopraelevazioni violente ed immediate di temperatura (oltre i 100°) in una zona limitata di linea d'asse tra il motore a combustione interna ed il motore elettrico, con conseguente rottura delle chiavarde del giunto a flange (v. figura) contiguo alla zona incriminata, e persino, se non si arrestava in tempo il motore, sfasciamento della linea d'asse.

Il fenomeno si produceva intorno ad un determinato numero di giri (circa 350) che rappresentava l'andatura normale del battello, ma era possibile ridurlo di intensità allorchè si otteneva un perfetto funzionamento dei varî cilindri del motore a combustione: era sufficiente invece togliere la

[1] Pervenuta all'Accademia nel luglio 1919.

nafta ad uno o due cilindri (consecutivi nell'ordine delle accensioni) perchè esso si verificasse in modo violento.

Escluse, mediante opportune verifiche, quelle che subito furono prospettate come cause probabili dell'avaria (insufficiente proporzionamento degli organi, cattiva qualità del materiale, sollecitazioni eccessive dovute alle punte del momento motore, slivellamento della linea d'asse, ecc.), si fu indotti ad attribuire i fenomeni lamentati allo stabilirsi di una risonanza tra le vibrazioni torsionali libere dell'asse e le irregolarità periodiche del momento torcente.

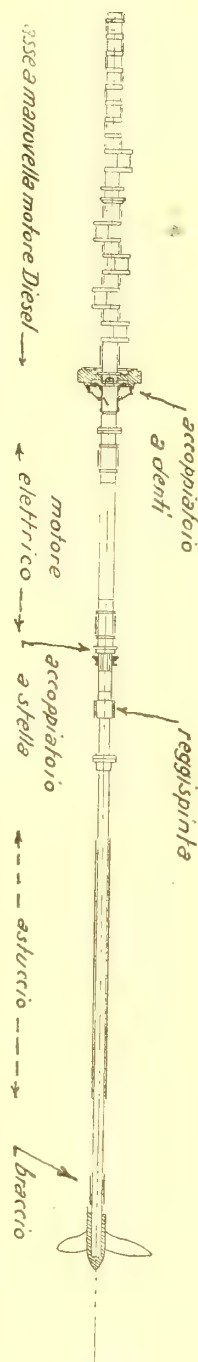
Eseguita però l'analisi armonica della funzione periodica esprimente il momento motore normale, non si rintracciò nessun termine che potesse entrare in risonanza con le oscillazioni torsionali libere della linea d'asse, e ciò neppure considerando il momento motore deformato per l'irregolare funzionamento di qualche cilindro. Sembrava davvero che il problema dovesse rimanere insoluto e che nessun provvedimento potesse valere ad eliminare le cause delle gravi avarie lamentate.

Un fatto accompagnava costantemente il manifestarsi del fenomeno: un battimento ritmico e violento dei denti dell'accoppiatoio esistente tra motore a combustione e motore elettrico.

Parve che il fenomeno potesse essere legato all'esistenza dei giochi della linea d'asse i quali consentivano il prodursi del battimento, per quanto nessuna teoria delle oscillazioni torsionali degli assi permettesse di attribuire *a priori* una certa fiducia a questo rapporto di dipendenza.

Si ritenne perciò interessante di eseguire una prova dopo aver ridotti a zero i giochi esistenti mediante un collegamento rigido del volante del motore Diesel con l'asse del motore elettrico.

I lamentati inconvenienti non si produssero più intorno a 320 giri, per ricomparire soltanto, quando la potenza non era perfettamente equilibrata nei varî cilindri, intorno ai 400 giri, andatura questa abbastanza distante da quella normale del motore Diesel.

Essendosi, durante l'esperienza, per avventura allentato il collegamento rigido della linea d'asse, istantaneamente si osservò che il fenomeno aveva tendenza a prodursi ad un numero di giri minore.

Era quindi evidente che un vero rapporto di dipendenza esisteva tra il manifestarsi del fenomeno e la grandezza dei giochi della linea d'asse.

Era pure lecito di ritenere, per i risultati della esperienza riportata, che, quando i sommergibili vennero costruiti in Inghilterra e quando perciò i laschi esistenti tra le varie parti dell'accoppiatoio erano ancora contenuti entro i limiti di una buona lavorazione, nessun inconveniente si producesse, almeno alle andature normali del battello. E che, col procedere del tempo, aumentandosi a mano a mano per effetto dei continui urti tra le parti i giochi in parola fino a raggiungere i notevoli valori che nelle condizioni attuali si erano constatati, si siano venuti manifestando i fenomeni di riscaldamento della linea d'asse in misura sempre più vistosa ed impressionante.

Pur riservandoci di svolgere in un secondo tempo alcune ricerche teoriche più esaurienti quali, per la sua pratica importanza, merita il problema della valutazione dell'effetto dei giochi sul comportamento delle linee d'assi nei fenomeni di vibrazioni torsionali, riteniamo non privo d'interesse indicare un procedimento che, nel caso in esame, ci ha permesso di sottoporre a calcolo il fenomeno e di ottenere dei risultati veramente notevoli, eliminando ogni causa di avaria.

Se perciò si vuol dare alcuna importanza alla conferma che l'esperienza ha fornito alle conclusioni del metodo adottato, sembra che, quando si tratti di giochi sufficientemente piccoli da non costituire una vera soluzione di continuità e quando la frequenza delle oscillazioni sia sufficientemente grande, sia lecito di ritenere, per le conseguenze pratiche che se ne possono ricavare, che una linea d'assi in cui esistano dei laschi tra le varie parti si comporti nelle sue oscillazioni torsionali libere come se i giochi stessi si potessero tradurre in una maggiore lunghezza del sistema elastico. In altri termini, il modo pratico di tener conto dei giochi consisterebbe semplicemente nell'attribuire all'albero una lunghezza virtuale maggiore dell'effettiva per un tratto tale che la torsione da esso subìta per effetto del momento motore eguagli l'angolo di cui possono ruotare, in conseguenza dei giochi esistenti, una rispetto all'altra le due estremità dell'asse.

Calcolando in tale ipotesi (per mezzo delle formule che la teoria insegna) la frequenza delle oscillazioni torsionali della linea d'asse nel caso in esame, con i giochi effettivamente misurati tra le varie parti dell'accoppiatoio, si riscontrava la esatta coincidenza di tale frequenza con quella di un termine che compariva nelle serie di Fourier esprimente il momento motore, per l'irregolare funzionamento di un cilindro del motore Diesel, intorno ai 300 giri.

Era appunto in tali condizioni che i lamentati fenomeni di riscaldamento si venivano a produrre, ed il nodo delle vibrazioni torsionali, il quale — come la teoria indica — coincide con la sezione in cui si ha la massima sollecitazione del materiale, veniva proprio a corrispondere con la zona dell'asse in cui il fenomeno stesso si verificava in misura più vistosa.

Il calcolo basato sul modo che abbiamo esposto di considerare il fenomeno ci veniva così a fornire una brillante conferma della ragionevolezza della ipotesi fatta.

Si confermava che era naturale che gli inconvenienti non si fossero dovuti manifestare appena costruiti i sommergibili (poichè in tali condizioni abbiamo osservato come non si poteva produrre nessuna risonanza pericolosa alle andature normali dei battelli), ma che essi non dovettero tardare a verificarsi in misura sempre più grave nella zona della linea d'asse corrispondente alla sezione nodale delle vibrazioni.

Si dimostrava che il fenomeno doveva veramente attribuirsi alla risonanza tra le oscillazioni torsionali libere del sistema elastico e le irregolarità periodiche del momento motore.

Si rintracciava la causa determinante la quale era valsa, col procedere del tempo, a modificare così radicalmente il modo di comportarsi della linea d'asse in relazione alle onde di oscillazioni torsionali da rendere pericolose delle condizioni di fatto che prima consentivano un funzionamento abbastanza regolare dei due battelli.

E si potevano perciò additare con sicurezza i mezzi per giungere alla completa soluzione del problema, eliminando ogni ulteriore pericolo di avaria.

Seguendo tali conclusioni, venne provveduto a rimettere i sommergibili in completa efficienza bellica, agendo contemporaneamente sulle tre grandezze che esercitavano la loro influenza sul fenomeno: inerzia delle masse volanti esistenti sull'asse, diametro dell'asse, entità dei giochi tra le varie parti dell'accoppiatoio.

Le condizioni del battello divennero assolutamente regolari: la risonanza tra vibrazioni torsionali libere dell'asse e irregolarità del momento torcente si potevano produrre soltanto, come il calcolo e l'esperienza concordemente dimostrarono, ad andature ben discoste da quelle normali di esercizio: ogni possibilità di inconvenienti od avarie era del tutto eliminata.

In una sistemazione provvisoria, nella quale, per economia di tempo, ci si era limitati a modificare soltanto le masse volanti ed il diametro dell'asse, il funzionamento del battello, per quanto migliorato, permetteva ancora il ripetersi del fenomeno intorno ai 280 giri.

Applicando anche a tale caso il ragionamento sopra esposto della valutazione degli effetti dei giochi, si confermava per tale andatura il prodursi delle risonanze nell'ipotesi di uno squilibrio di potenza nei varî cilindri del motore a combustione.

Sembra perciò che, almeno in relazione alle conclusioni pratiche cui consente di giungere, sia lecito di concedere abbastanza fiducia al procedimento che abbiamo esposto.

Certo è che i giochi esistenti in una linea d'assi influiscono in notevole misura sul comportamento effettivo di essa nei riguardi delle vibrazioni torsio-

nali e non è lecito in nessun caso prescindere da essi, per quanto trascurabile possa sembrare il loro valore. Mentre invece quasi sempre in pratica è ossibile di prescindere, senza alterare di molto i risultati dei calcoli, da fenomeni secondarî, come l'effetto dell'inerzia delle masse dell'asse o l'azione di estinzione dovuta alla natura del momento resistente o all'isteresi elastica del materiale, fenomeni secondarî i quali pure sono stati oggetto di ricerche e di indagini teoriche profonde da parte di tanti studiosi.

La letteratura tecnica tace finora sull'importante problema che i dati di fatto cui abbiamo accennato ci hanno permesso di porre nella sua vera luce e, solo in quanto le numerose esperienze eseguite si sono incaricate di dare una dimostrazione indiretta al modo semplice — ma non per questo meno attendibile — di tradurre in numeri il particolare fenomeno che si presentava, abbiamo ritenuto opportuno dare un cenno del procedimento che, nei casi della pratica, può valere per trarre qualche volta delle conclusioni sicure.

Forse dal punto di vista puramente teorico sarebbe facile obbiettare che l'ipotesi circa il comportamento di una linea d'assi che presenti dei giochi non risulta, per ora, da quanto abbiamo detto, analiticamente così dimostrata da potere su di essa basare un calcolo rigoroso e completo: ma è anche vero che, dal punto di vista pratico, qualche valore bisogna pure attribuire ai risultati dell'esperienza ed alle conferme che da essa derivano.

Mentre la scienza si ribella ad un procedimento di calcolo che non sia rigorosamente dimostrato nelle premesse sulle quali esso si appoggia, l'ingegneria tollera — e ne è piena — un metodo risolutivo che possa anche sembrare ad una critica un poco accurata non del tutto rigoroso ma che le consenta di rintracciare delle soluzioni soddisfacenti al problema che si è proposto.

Nell'esercizio delle linee d'assi, specialmente a bordo delle navi, come osservava fino dal 1903 il Melville, il prodursi delle risonanze torsionali è da temersi più spesso che non venga fatto generalmente di pensare.

Gli è che, molte volte, o i fenomeni secondarî che da essa derivano non si manifestano in così grave misura da diventare oggetto di particolari ricerche e provvedimenti, o, se da essi risulta compromesso il funzionamento della linea d'asse, si è spesso indotti ad attribuirli a cause che con la vera non hanno nulla di comune (come per es. sollecitazioni torsionali periodiche dovute alle punte del momento torcente, difetto di lubrificazione, slivellamento di qualche tronco della linea d'asse).

Bisogna perciò, quando ci si trova a dover decidere su inconvenienti di tal natura, non trascurare di prendere in considerazione la possibilità di risonanza tra gli impulsi periodici del momento motore e le oscillazioni torsionali libere del sistema elastico, tenendo conto però delle effettive condizioni di funzionamento della linea d'asse.

Nel caso che abbiamo illustrato, la risonanza si verificava soltanto per la contemporanea presenza di due circostanze accidentali le quali valevano, ciascuna da parte sua, a modificare profondamente le caratteristiche delle due funzioni periodiche che entravano in risonanza. La esistenza (che del resto in pratica non è mai infrequente) di laschi tra le varie parti della linea d'asse influiva sulle oscillazioni torsionali libere del sistema elastico; e la differente distribuzione della potenza sulle varie manovelle per irregolare funzionamento di qualche cilindro (praticamente inevitabile, trattandosi di motore a combustione) introduceva un nuovo termine nell'espressione del momento torcente.

Se si fossero trascurate queste due particolari circostanze, nessuna risonanza si sarebbe rintracciata e nessun provvedimento sicuro si sarebbe perciò potuto indicare per la soluzione del problema.

Chimica. — *Sulla trasformazione dell'asparagina nel dipeptide dell'acido aspartico* [1]. Nota di C. Ravenna e G. Bosinelli, presentata dal Socio G. Ciamician [2].

È stato dimostrato da Pringsheim [3] che, facendo bollire la soluzione acquosa dell'asparagina ordinaria (levogira), essa viene facilmente in parte racemizzata. Per l'esecuzione di una ricerca che verrà pubblicata a suo tempo, abbiamo avuto occasione di preparare una quantità notevole di asparagina destrogira ed approfittammo, a tal fine, dell'osservazione di Pringsheim.

Siamo partiti da kg. 3.400 di asparagina che a porzioni di 300 gr. si facevano bollire rispettivamente con tre litri d'acqua per un tempo variabile da 18 a 24 ore. Le soluzioni venivano poi concentrate a più riprese; e l'asparagina, che si separava per raffreddamento, si esaminava al polarimetro in soluzione cloridrica al 10 per cento. Da principio si separava la sola asparagina originaria che veniva utilizzata per una nuova ebollizione con acqua, e per ulteriore concentrazione cristallizzavano dei miscugli pressochè inattivi perchè contenenti quantità equimolecolari delle due asparagine antipode. Per separare l'asparagina destrogira, non essendosi dimostrato agevole il metodo meccanico, i cristalli venivano disciolti in acqua nella quantità di 2 gr. per 100 cc. e, dopo aggiunta di un poco di solfato di magnesio e di fosfati acidi di potassio e di calcio, si abbandonava a sè la soluzione in recipiente

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di chimica agraria della R. Università di Bologna. Questa ricerca, iniziata prima della guerra, è stata condotta a termine soltanto ora in causa del nostro richiamo alle armi.

(2) Pervenuta all'Accademia il 26 luglio 1919.

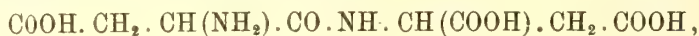
(3) Zeitschrift für physiologische Chemie, LXV, 89 (1910).

aperto, per 15 giorni, alla temperatura del laboratorio. In breve il liquido si ricopre di una patina di muffe che attaccano rapidamente l'asparagina naturale, di modo che per concentrazione della soluzione si separa il composto destrogiro. Abbiamo così ottenuto circa 60 gr. di asparagina destrogira pura.

Le ultime acque madri da cui era stata separata l'asparagina inattiva, per ulteriore concentrazione non forniscono più cristalli, ma soltanto una quantità rilevante di un liquido sciropposo che era stato del resto già osservato anche da Pringsheim.

Lo studio del liquido sciropposo, che contiene dunque i prodotti in cui si trasforma l'asparagina durante l'ebollizione, si presentava interessante: esso venne perciò da noi intrapreso e forma l'oggetto della presente Nota.

Lo sciroppo, trattato con alcool, si trasforma in una massa gommosa, elastica, che difficilmente si può polverizzare. Diluita questa con acqua dà un abbondante precipitato con l'acetato di piombo. Il precipitato, sospeso nell'acqua fornisce, dopo eliminazione del piombo con idrogeno solforato, un liquido che concentrato lascia un denso sciroppo il quale, per trattamento con alcool assoluto o con acetone, si trasforma questa volta in una polvere bianca, soffice, amorfa. La sostanza è solubilissima nell'acqua, e pressochè insolubile in tutti i solventi organici, ha sapore acido; riscaldata non fonde, ma intorno ai 120° si decompone rigonfiandosi. Dà la reazione del biureto. Questi caratteri hanno fatto supporre che il corpo in parola fosse l'acido asparagil-aspartico (dipeptide dell'acido aspartico),

$$COOH.CH_2.CH(NH_2).CO.NH.CH(COOH).CH_2.COOH,$$

preparato per la prima volta da E. Fischer e E. Koenigs [1] dall'acido 2.5-dichetopiperazin-3.6-diacetico.

La determinazione del peso molecolare nell'acqua diede numeri oscillanti fra 182 e 206, cioè inferiori ma abbastanza vicini al teorico (248), tenendo conto che il corpo, in soluzione acquosa, è notevolmente dissociato. Inoltre la sostanza si trasforma per idrolisi soltanto in acido aspartico. L'idrolisi venne eseguita bollendo per 12 ore 5 gr. della sostanza con 30 gr. di acido solforico a 25 per cento. Dal liquido, intensamente colorato in bruno e convenientemente diluito, si precipitò l'acido solforico con carbonato di bario e barite, e nel filtrato dal solfato di bario venne eliminato il bario con la quantità esatta di acido solforico. Il liquido, filtrato e concentrato frazionatamente a tre riprese, lasciò ogni volta separare dei cristalli (cioè gr. 3 nella prima frazione, gr. 1 nella seconda ed una piccola quantità nella terza), tutti uguali nella forma. I cristalli delle due prime fra-

[1] Berichte XL, 2, 2048 (1907).

zioni, analizzati, risultarono, come si disse, costituiti da acido aspartico quelli della terza frazione erano in quantità troppo piccola.

Calcolato per $C_4H_7NO_4$ (in 100 parti)	Trovato	
	1ª frazione	2ª frazione
C 36,09	36,25	36,19
H 5,26	5,51	5,41
N 10,52	10,38	10,67

Sebbene tutti i caratteri menzionati avessero dimostrato sicuri indizi che la sostanza in esame fosse realmente l'acido asparagil-aspartico di Fischer, tuttavia le numerose analisi eseguite dopo molteplici tentativi di purificazione non diedero risultati corrispondenti alla formula indicata. Soltanto la percentuale trovata di azoto confermò che il corpo era in relazione con l'acido aspartico e non con l'asparagina. I mezzi di purificazione consistevano nel ridisciogliere la sostanza e riprecipitarla con acetato di piombo oppure nel sostituire l'acetone all'alcool. Trascriviamo alcune delle molte analisi eseguite nelle quali si osserva sempre una percentuale assai superiore, massime nel carbonio.

Calcolato per $C_8H_{12}N_2O_7$ (in 100 parti)	Trovato		
	I	II	III
C 38,71	42,05	41,50	42,49
H 4,84	5,67	6,12	5,42
N 11,29	11,97	11,67	—

Abbiamo inoltre cercato di purificare la sostanza precipitandola come sale di rame o di argento. Il sale di rame venne preparato trattando la soluzione acquosa con acetato di rame. L'analisi diede numeri non corrispondenti, ma che si avvicinano alla composizione della formula $C_8H_{10}O_7N_2Cu$ dove un atomo di rame sostituisce due atomi di idrogeno dell'acido asparagil-aspartico.

Calcolato per $C_8H_{10}N_2O_7Cu$ (in 100 parti)	Trovato
C 31,01	29,79
H 3,25	3,75
N 9,04	8,82
Cu 20,53	19,72

Il sale d'argento si preparò trattando il sale di calcio della sostanza con nitrato d'argento. L'analisi diede numeri che si avvicinano a quelli indicati dalla formula $C_8H_{10}O_7N_2Ag_2$.

Calcolato (in 100 parti)	Trovato
C 20,79	21,01
H 2,18	2,24
N 6,07	6,61
Ag 46,72	46,14

La formazione di un sale biargentico dell'acido asparagil-aspartico tricarbossilico si può spiegare ammettendo che uno dei carbossili salifichi il gruppo aminico.

Falliti dunque tutti i tentativi per purificare l'acido asparagil-aspartico, abbiamo cercato di prepararne un'anidride, nella speranza di poter giungere per questa via a riottenere il dipeptide allo stato di purezza. A questo scopo la sostanza (5 gr.) venne riscaldata in tubo aperto, con bagno d'olio per alcune ore alla temperatura di 210°. Con questo trattamento si trasforma in una massa facilmente friabile (gr. 3,8 dai 5 impiegati), anch'essa amorfa, pressochè insolubile nell'acqua fredda e poco solubile a caldo. La sostanza si scioglie invece facilmente nell'acido cloridrico concentrato anche a freddo, e dalla soluzione riprecipita inalterata per diluizione con acqua. Per questa via è possibile la purificazione. Riscaldata fino a 320°, non fonde e non si decompone. Per l'analisi la sostanza venne disciolta in acido cloridrico concentrato, precipitata per diluizione, separata centrifugando, lavata ripetutamente con acqua e seccata nel vuoto su acido solforico. Infine venne nuovamente scaldata a 210° fino a peso costante.

L'analisi diede i numeri richiesti dalla formula minima $C_4H_3NO_2$ che corrisponde a una molecola di acido aspartico meno due molecole di acqua.

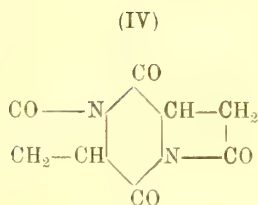
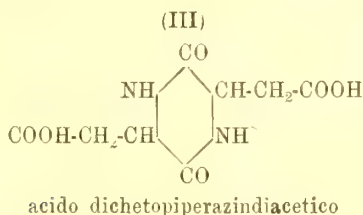
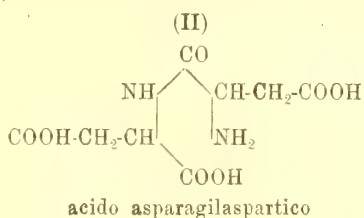
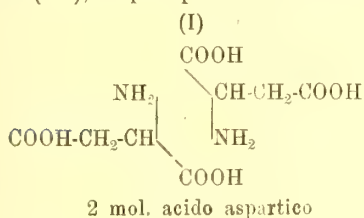
Calcolato per $C_4H_3NO_2$ (in 100 parti)		Trovato
C	49,48	49,15
H	3,09	3,39
N	14,43	14,22

Era però da supporre che l'anidride in parola avesse la formula dimera di quella indicata e cioè che stesse in relazione con l'acido asparagil-aspartico da cui presumibilmente eravamo partiti. Così è in realtà. Lasciando infatti in contatto per 15 ore la detta anidride con un piccolo eccesso di acqua di barite a freddo (gr. 1,5 di anidride e cc. 90 di barite $^1/_3$ normale) ed eliminando successivamente il bario con la quantità esatta di acido solforico, abbiamo ottenuto un liquido che decolorato con carbone e concentrato nel vuoto, lascia un residuo sciropposo il quale a sua volta, per contatto con l'alcool, fornisce una polvere bianca, solubilissima nell'acqua e che analizzata diede finalmente i numeri esatti, richiesti dalla formula $C_8H_{12}N_2O_7$, cioè dall'acido asparagil-aspartico.

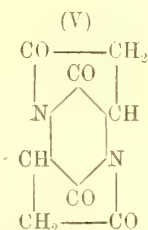
Calcolato per $C_8H_{12}N_2O_7$ (in 100 parti)		Trovato
C	38,71	38,81
H	4,84	5,08
N	11,29	11,23

Questa sostanza si è dimostrata per tutti i suoi caratteri uguale a quella primitivamente estratta dalle acque madri dell'asparagina; rimane perciò

accertata la formazione dell'acido asparagil-aspartico per semplice ebollizione della soluzione acquosa di asparagina.

Da quanto si è detto testè, risulta anche confermata la supposizione fatta più sopra, che all'anidride della composizione $C_4H_3NO_2$ debba assegnarsi la formula dimera. Poichè infatti essa fornisce per trattamento con barite l'acido asparagil-aspartico, $C_8H_{12}N_2O_7$, essa deve considerarsi come un'anidride dell'acido stesso ed avrà per conseguenza la formula empirica $C_8H_6N_2O_4$. Inoltre, ammessa per l'acido asparagil-aspartico la struttura del dipeptide (II), che è dedotta dal suo modo di formazione (¹), la detta anidride è da ritenersi come una ulteriore anidride dell'acido dichetopiperazindiacetico (III) e si potrà ad essa assegnare la struttura indicata dalla formula (IV), o più probabilmente dalla (V).

```
                 (I)                                        (II)
                COOH                                         CO
        NH2     \CH-CH2-COOH                          NH/ \CH-CH2-COOH
COOH-CH2-CH\     NH2                       COOH-CH2-CH\    NH2
             \COOH                                    \COOH
       2 mol. acido aspartico                  acido asparagilaspartico

                              (III)
                               CO
                         NH/ \CH-CH2-COOH
              COOH-CH2-CH\  /NH
                           CO
                  acido dichetopiperazindiacetico

              (IV)                                   (V)
                                                 CO ——— CH2
                CO                               |  CO   |
     CO ——N/ \CH—CH2                             N/ \CH
              |     |                            |    |
     CH2—CH\  /N——CO                             CH\ /N
                CO                               |  CO   |
                                                 CH2 ——— CO
              anidride dell'acido dichetopiperazindiacetico
```

Dalle esperienze riassunte in questa Nota è dunque risultato che per semplice ebollizione dell'asparagina, e cioè senza intervento di reattivi energici, si forma il dipeptide dell'acido aspartico di Fischer. Questo risultato appare di notevole interesse anche dal punto di vista del metabolismo vegetale, qualora si consideri la grande diffusione dell'asparagina nelle piante e l'importanza dei polipeptidi la cui formazione è in stretto rapporto con la sintesi delle sostanze proteiche.

(¹) E. Fischer e E Koenigs, luogo citato.

Chimica fisiologica. — *Dispositivo per la determinazione volumetrica di piccole quantità di anidride carbonica, spostandola dai liquidi, mediante una forte corrente di aria, a temperatura e pressione ordinarie* [1]. Nota di A. Costantino, presentata dal Corrisp. V. Aducco [2].

Il dosaggio dell'anidride carbonica libera e combinata, mediante la fissazione di essa con una soluzione titolata di idrato di bario e la successiva titolazione dell'eccesso di barite con un acido, rende, per la sua semplicità ed esattezza, non pochi servizi nel campo della chimica analitica e particolarmente nelle ricerche di biochimica.

Il metodo tuttavia richiede alle volte condizioni, specialmente per i liquidi di origine animale, che rendono poco spedita tale determinazione.

Nella determinazione globale dell'anidride carbonica libera e combinata, contenuta nei liquidi, occorre operare in ambiente acido e a temperatura fra i 70°-80° C. Di più, affinchè la soluzione di barite possa trattenere totalmente l'CO_2, bisogna che la corrente di aria, da cui questa è spostata, sia lentissima (circa 1800 cc. all'ora) e passi attraverso un lungo strato di soluzione di barite.

Nelle esperienze del Pettenkofer riscontriamo appunto l'uso di tubi speciali lunghi un metro. O. Warburg [3] sostituì ai tubi di Pettenkofer una bevuta alla Volhard a due bolle. Essendo lo strato di barite inferiore a quello usato dal Pettenkofer, l'autore consiglia di riscaldare, verso i 60°-70° C., il recipiente ad assorbimento dell'CO_2. Anche con tale variante la corrente di aria deve essere lenta e, data la lentezza, il pallone, ove si svolge dai liquidi l'CO_2, deve essere riscaldato fra i 70°-80° C.

Non solo, ma per il dosaggio di piccole quantità di CO_2, occorre che il recipiente ad assorbimento, contenente la barite, non ceda al liquido riscaldato fra i 60°-70° C., alcali o acidi. L'A. consiglia l'uso di recipienti di vetro di Iena o di quarzo.

A lato di tali dispositivi ne sono descritti nella letteratura altri, che permettono di fare una rarefazione di aria nel sistema a sviluppo e ad assorbimento dell'CO_2. In tal caso si può portare il liquido in esame ad ebol-

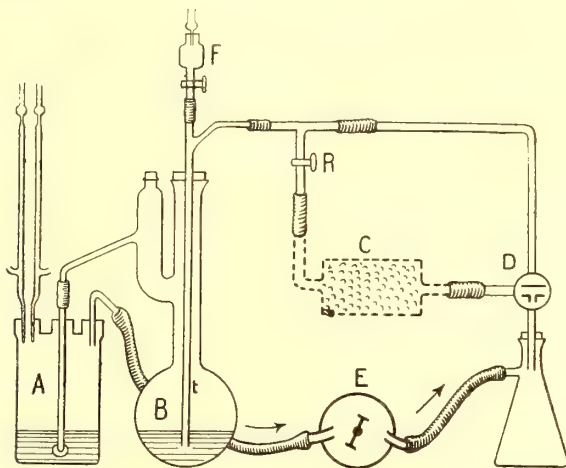
[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di fisiologia della R. Università di Pisa, luglio 1919.

[2] Pervenuta all'Accademia il 30 luglio 1919.

[3] Warburg, *Massanalytische Bestimmung kleiner Köhlensäuremengen*, Zeit. f. physiol. Chem., vol. 61, pag. 261, 1908.

lizione, senza elevare di molto la temperatnra (circa 40° C.). Anche con quest'ultimi mezzi l'assorbimento da parte della barite avviene lentamente e, non poco tempo è richiesto per condurre a termine l'esperimento.

Ricordo i lavori di W. Dibbet [1], Vesterberg [2] e di Quagliariello-D'Agostino [3].

Essendomi proposto di dosare a temperatura e pressione ordinarie, per via volumetrica, piccole quantità di CO_2 libera e combinata, contenuta nei liquidi, adoperando *una forte corrente d'aria*, mi sono valso di un dispositivo molto semplice, che permette di usare, per l'assorbimento dell' CO_2, un solo recipiente, fatto di vetro comune, contenente uno strato di barite di pochi centimetri.

Riassumo brevemente il funzionamento del dispositivo da me adottato e lo riproduco schematicamente in una figura.

Si pongono nel pallone di Classen (B), della capacità di circa 700 cc., 20-25 cc. di acqua distillata, in modo da ricoprire l'estremità del tubo (*t*), e 1 cc. di H_2SO_4 concentrato, per liquidi contenenti anidride carbonica combinata. Indi si versano nella bottiglia (A) di Woulf a tre vie, della capacità di circa 850 cc., per la determinazione volumetrica dell' CO_2, 100 cc. di acqua distillata, gr. 5 di Ba Cl_2 e alcune goccie di una soluzione idroalcoolica di fenolftaleina. Il tubo di afflusso di detta bottiglia porta nella parte inferiore un rigonfiamento, munito di parecchi fori. Si uniscono i due recipienti (A) e (B), mediante un tubo di gomma [4], e vi s'inizia la purificazione dell'aria e dei liquidi facendo

(1) W. Dibbet, *Zur Methodik der Kölensäurebestimmung in Blut*, Arbeit aus den Pathol. Inst. zu Tubingen, vol. 6, pag. 228, 1908.

(2) Vesterberg, Zeit. f. Physik.-Chem., vol. 70, pag. 551, 1901.

(3) Quagliariello e D'Agostino, Atti R. Accad. dei Lincei, vol. 23, pag. 884, 1914. Gli autori seguirono il metodo di Vesterberg, con leggere modificazioni.

(4) Le diverse parti del sistema sono congiunte tra loro con tubo di gomma a pressione.

circolare l'aria in sistema chiuso [1] e obbligandola a percorrere la via indicata dalle lettere E-D-C-R-B-A-E. Si tiene quindi aperto il rubinetto (R) e si manovra il rubinetto a tre vie (D), in modo, come risulta dalla figura, da escludere il tratto sovrastante a (C).

L'aria passando più volte attraverso il tratto intercalato (C), costituito da tre bottiglie ad idrato di potassio e calce sodata, viene privata dell'anidride carbonica. Dopo dieci minuti tutta l'aria e il liquido sono privi di CO_2. La piccola quantità di aria, contenuta nel breve tratto sovrastante a (C), viene pure essa messa in circolo e purificata. Al termine dei dieci minuti si manovra, quindi, il rubinetto a tre vie (D), in modo da escludere momentaneamente il tratto D-C-R, obbligando l'aria a passare da (D) per l'altra derivazione.

Dopo alcuni secondi si riporta la corrente di aria a passare di nuovo per gli apparecchi purificatori (C). Ripetendo due o tre volte questa operazione, tutto il sistema viene privato dell' CO_2. Necessitano non più di 15 minuti per poter iniziare l'analisi. Si arresta la circolazione dell'aria; si esclude durante la ricerca, dal sistema chiuso, il tratto D-C-R, mediante la chiusura del rubinetto (R) e quello a tre vie (D), volgendo quest'ultimo dalla parte sovrastante al tratto D-C-R.

Indi dalla buretta contenente idrato di bario si fa pervenire nella bottiglia (A), pel dosaggio volumetrico dell' CO_2, una determinata quantità di soluzione.

Dopo si introduce dalla parte (F) del pallone di Classen il liquido in esame. Eseguita quest'ultima operazione, si incomincia di nuovo a far circolare l'aria.

La forte corrente d'aria, circolante in sistema chiuso, scaccia a freddo dal pallone (B) l' CO_2 e, col ripassare più volte [2] attraverso lo strato di barite contenuto nella bottiglia (A), viene a cedere totalmente, dopo un tempo relativamente breve (30 minuti), l' CO_2 alla soluzione di idrato di bario.

La titolazione dell'eccesso di barite si può eseguire nella bottiglia stessa di Woulf, con un dispositivo a tutti noto e che è rappresentato schematicamente nella figura.

Riporto alcune determinazioni fatte.

Prove in bianco.

Titolazione della soluzione di barite con una soluzione titolata di HCl, nella bottiglia di Woulf, contenente 100 cc. di acqua distillata.

	A — Dopo avere purificato dall'CO_2 l'aria e i liquidi (ved. metodo):		B — Dopo aver fatto circolare l'aria purificata per:	
	I.	II.	60 minuti I.	30 minuti II.
$\frac{Ba(OH)_2}{50}$	cc. 14.1	cc. 16.4	cc. 14.1	cc. 16.4
$\frac{HCl}{50}$	cc. 14.1	cc. 16.4	cc. 14.0	cc. 16.3

[1] Serve all'uopo una pompa rotativa ad olio minerale, di Grandis. Nella figura è contrassegnata con la lettera (E). Dalla parte aspirante della pompa porre una bottiglia a $CaCl_2$ privo di ossido di calcio. Egualmente bene può servire, invece della pompa Grandis un piccolo aspiratore del tipo di quelli che si adoperano per il gas illuminante.

[2] Il volume dell'aria circolante contenuta nel sistema chiuso, prescindendo da quella contenuta nella parte intercalata (C), che si elimina durante la ricerca, è di circa litri 2.2. Al minuto primo passano per la bottiglia di Woulf (A) litri 5.7. Cioè ogni minuto primo il volume di aria racchiuso nel sistema ripassa circa 2 $^1/_2$ volte per la Woulf; in 30′, durata dell'esperimento, circa 75 volte.

Determinazione dell'CO_2 contenuta nel carbonato sodico. Soluzione acquosa contenente gr. 0.10368 di Na_2CO_3 °/₀ cc.

Calcolata mmgr CO_2	Trovata mmgr. CO_2	Durata della corrente d'aria in minuti primi
6.4	6.38	30
10.6	10.5	30
8.6	8.5	30
21.0	20.8	35

Risulta che il sistema chiuso a circolazione di aria, privata dell'CO_2, mediante una serie di apparecchi intercalati solo all' inizio dell'esperimento, trova nelle analisi chimiche per via volumetrica una ottima applicazione, permettendo di dosare piccole quantità di CO_2, sia libera, sia combinata, allontanando quest'ultima dai liquidi, in presenza di acidi forti, alla temperatura e pressione ordinarie.

L'operare a temperatura ordinaria evita il pericolo, particolarmente per liquidi contenenti sostanze organiche, di occasionare a più alte temperature scissioni, con produzione di CO_2.

L'insieme del dispositivo su descritto, per la sua semplicità, per la sua esattezza e per la rapidità con cui si può eseguire un'analisi (durata complessiva circa $^3/_4$ d'ora), si presta per determinare quantità di CO_2 superiori ai 10 mmgr., richiedendo pure in questi casi pochissimo tempo (ved. tabella).

L'operatore, inoltre, è posto al sicuro da inconvenienti che possono accadere durante l'andamento dell'analisi. Ad esempio qualora si analizzino liquidi a contenuto oscillante di CO_2, ad es. orina, non si corre il rischio di perdere l'esperimento, se nell'apparecchio ad assorbimento (A) si è posto un quantitativo di barite, insufficiente a trattenere tutta l' CO_2 che si libera dal liquido in esame. Infatti, operando in sistema chiuso, l' CO_2 non va perduta e, quindi, basterà un'ulteriore aggiunta di barite per legare integralmente la parte rimasta libera.

Tale procedimento potrà, credo, trovare applicazione per altre sostanze, come mi propongo di verificare con ulteriori ricerche.

E. M.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1919.

(Ogni Nota o Memoria porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

Matematica. — *Sopra una disuguaglianza fra i generi di una superficie algebrica.* Nota II di ANNIBALE COMESSATTI, presentata dal Corrisp. F. SEVERI [1]

4. Pertanto le rette di K sono tutte appoggiate ad un S_{n-t} con $t \geq 3$. Supposto per semplicità (e come del resto è lecito a meno di una sostituzione lineare sulle u) che si tratti dello spazio $y_1 = y_2 = \cdots = y_t = 0$, avremo anzitutto

$$u_2 = f_2(u_1)\,,\ u_3 = f_3(u_1)\,, \ldots,\ u_t = f_t(u_1)\,,$$

e quindi

$$X_{2i} = f'_2(u_1)\, X_{1i}\ ,\ X_{3i} = f'_3(u_1)\, X_{1i}\,, \ldots,\ X_{ti} = f'_t(u_1)\, X_{1i}\,, \quad (i = 2\,,3\,, \ldots, n+1)\,. \tag{5}$$

Delle relazioni (1), le prime $\binom{t}{2}$ possono identificarsi con quelle che esprimono la mutua dipendenza delle $u_1, u_2, \ldots, u_t$, cioè colle

$$X_{12} = X_{13} = \cdots = X_{1t} = X_{23} = \cdots = X_{t-1,t} = 0\,,$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 10 settembre 1919.

e le altre $m - \binom{t}{2}$ possono scriversi sotto la forma

$$(6) \qquad \sum_{i=t+1}^{n+1} X_{1i}\left(a_{1i}^{(\nu)} + a_{2i}^{(\nu)} f'_2(u_1) + \cdots + a_{ti}^{(\nu)} f'_t(u_1)\right) + \sum b_{rs}^{(\nu)} X_{rs} = 0 ,$$

dove gli indici r, s sono ambedue maggiori od eguali a $t+1$. Il numero dei termini del secondo sommatorio è dunque $\binom{n-t+1}{2}$; e siccome la differenza fra il numero delle equazioni (6) e il numero di quei termini $\left[\text{tenuto conto che } m > \binom{n-1}{2}\right]$ risulta $\geq (t-2)(n-1-t)$, così, finchè $2 < t < n-1$, si potranno dalle (6) eliminare linearmente le X_{rs} del secondo sommatorio, giungendo ad almeno una relazione lineare del tipo

$$(7) \qquad \sum_{i=t+1}^{n+1} X_{1i}\left(c_{1i} + c_{2i} f'_2(u_1) + \cdots + c_{ti} f'_t(u_1)\right) = 0 ,$$

nella quale le c son costanti. È da notare che la (7) è una effettiva relazione fra le X_{1i} giacchè, se tutte le c fossero nulle, le relazioni (6) risulterebbero linearmente dipendenti; e se fossero identicamente nulli i coefficienti delle X_{1i}, se ne dedurrebbe per integrazione la dipendenza lineare degli integrali $u_1, u_2, \ldots, u_t$.

Ora, con semplici calcoli formali, si vede che la (7) esprime l'annullarsi dello jacobiano delle due funzioni

$$u_1 \quad \text{e} \quad \sum_{i=t+1}^{n+1}\left[c_{1i} + c_{2i} f'_2(u_1) + \cdots + c_{ti} f'_t(u_1)\right] u_i ,$$

e quindi se ne ricava che

$$(8) \qquad \sum_{i=t+1}^{n+1}\left[c_{1i} + c_{2i} f'_2(u_1) + \cdots + c_{ti} f'_t(u_1)\right] u_i = F(u_1) ,$$

F essendo simbolo di funzione.

Qui basta ragionare come al numero precedente. Detta C una curva del fascio irrazionale a cui *appartengono* gl'integrali $u_1, u_2, \ldots, u_t$; detto c il valore di u_1 lungo C, e posto ancora

$$c_{1i} + c_{2i} f'_2(c) + \cdots + c_{ti} f'_t(c) = k_i \quad , \quad F(c) = h ,$$

si deduce dalla (8) che, lungo C,

$$\sum_{i=t+1}^{n+1} k_i u_i = h .$$

e quindi, pel teorema citato di de Franchis, che l'integrale del 1° membro *il quale è indipendente da* $u_1, u_2, \ldots, u_t$, è costante lungo le curve del fascio, cioè è funzione di u_1.

Ma allora, aggregando alle t funzioni $u_1, u_2, \ldots, u_t$ la $(t+1)^a$ ora trovata, si deduce che le rette di K sono appoggiate ad un S_{n-t-1} contenuto nello S_{n-t} da cui siamo partiti; e poichè il ragionamento può seguitarsi finchè $t < n-1$, così si conclude che tutte le rette di K sono appoggiate ad una retta o passano per un punto. E si vede facilmente, bastando perciò fermarsi all'esistenza di un S_{n-2} singolare, che a tal conclusione conducono anche i casi $n=2, 3$; se poi $n=1$, il risultato è evidente.

Proviamo ora che se le rette di K si appoggiano ad una retta e non passano per un punto, esse si appoggiano di conseguenza ad un S_{n-2} sghembo con essa. E invero se $t=n-1$ le relazioni (6) si riducono ad una sola, la quale è del tipo

$$(9)\quad X_{1n}\Big(a_1+a_2 f'_2(u_1)+\cdots+a_{n-1} f'_{n-1}(u_1)\Big)+ \\ +X_{1n+1}\Big(b_1+b_2 f'_2(u_1)+\cdots+b_{n-1} f'_{n-1}(u_1)\Big)+cX_{nn+1}=0.$$

Se ora si pone

$$v_1=a_1 u_1+a_2 u_2+\cdots+a_{n-1} u_{n-1}\,,\quad v_2=b_1 u_1+b_2 u_2+\cdots+b_{n-1} u_{n-1}\,,$$
$$v_3=u_3\,,\ldots,\,v_{n+1}=u_{n+1}\,.$$

e si conservano per gli jacobiani delle v le stesse notazioni che per quelli delle u, la (9) assume la forma

$$X_{1n}+X_{2n+1}+cX_{nn+1}=0\,,$$

e, presa insieme alla $X_{12}=0$, ci riporta al caso $n=3$ per le quattro funzioni v_1, v_2, v_n, v_{n+1}.

Ora, se $n=3$, lo spazio T è una retta, e la $W_{2(n-1)}$ una quadrica di S_5; e dei due punti comuni, uno corrisponde alla relazione $X_{12}=0$. Se T è tangente a W, si ha $c=0$; e allora il ragionamento fatto sopra è valido anche per $t=n-1$, conducendo alla conclusione che le rette di K passano tutte per un punto; se T non è tangente a W, l'altra sua intersezione dà un'ulteriore relazione funzionale fra due combinazioni lineari di v_1, v_2, v_n, v_{n+1} che si potrà supporre ridotta alla forma $v_{n+1}=f(v_n)$, e dimostra la verità dell'asserto.

Si conclude dunque in definitiva che *le superficie algebriche d'irregolarità* $q=p_g-p_a>0$, *per cui* $p_g \geq 2(p_a+2)$ *possiedono un fascio irrazionale di genere* $p=q-\varepsilon$ $(\varepsilon=0,1,2)$ *e un altro fascio di genere* $q-p$.

5. Vediamo ora di precisare maggiormente il risultato ottenuto. Perciò osserviamo che, se $p_a < 0$, la diseguaglianza $p_g \geq 2(p_a + 2)$ è verificata dalle rigate di genere > 1 ($p_a < -1$, $p = q$) e dalle superficie ellittiche con $p_g > 1$ ($p_a = -1$, $p = q - 1$); e soltanto in questi casi.

Supposto dunque $p_a \geq 0$ ed escluso il caso delle superficie con un fascio di curve ellittiche [$p^{(1)} = 1$, $p = q$ (Enriques)], avremo $p_g \geq 4$, e sulla F esisterà il sistema canonico *irriducibile* di dimensione ≥ 3. Applicando la formula di Zeuthen alla $\gamma^1_{2\pi-2}$ segata sopra una curva canonica dalle curve, di genere π, del fascio di genere p, avremo $p^{(1)} \geq 2(p-1)$. $(\pi - 1) + 1$, e, per la nota formula di Castelnuovo-Enriques

$$I \geq 4(p-1)(\pi-1) - 4 .$$

In virtù della relazione di Nöther $p^{(1)} + I = 12\, p_a + 9$, se ne ricava

$$p_a \geq (p-1)\frac{\pi-1}{2} - 1,$$

e infine, tenendo conto che

$$p_g \geq 2(p_a + 2) \ , \ p = q - \varepsilon,$$

viene

$$(p-1)\frac{\pi-3}{2} + 2 - \varepsilon \leq 0 ,$$

cioè $\pi \leq 2$; ovvero, se $\pi = 3$ o $p = 1$, $\varepsilon = 2$. Ma questi ultimi casi si escludono rapidamente in varî modi [1]; e poichè le ipotesi $\pi = 0, 1$ conducono ai casi già considerati, potremo soltanto supporre $\pi = 2$. Allora un ragionamento esposto da Rosenblatt al n. 7 della sua citata Nota di Palermo permette rapidamente di concludere che dev'essere $\varepsilon = 2$, e quindi si cade sulla superficie delle coppie di punti di due curve di generi $p_a + 2, 2$ [2].

In definitiva le conclusioni a cui siam pervenuti possono riassumersi negli enunciati seguenti:

I. *Il genere geometrico d'una superficie algebrica di genere arîtmetico* $p_a \geq 0$, *non contenente fasci di curve ellittiche* ($p^{(1)} \geq 1$), *non può*

[1] Per esempio si osservi che, se $\pi = 3$ o $p = 1$, in tutte le formule precedenti vale il segno $=$ e quindi $p_a = p - 2$, $I = 4(p-1)(\pi-1) - 4$. Ne segue che le curve del fascio di genere p non hanno punti doppî: e quindi, se $p > 1$, hanno tutte il genere 3. Su esse le curve dell'altro fascio, che ha il genere 2, debbono segare una γ^1_2 priva di punti doppî e quindi la nostra superficie è rappresentabile doppiamente *senza curva di diramazione* sulla superficie delle coppie di punti di due curve di generi p, 2. Ma allora dalle formule di Severi segue $p_a = 2p - 3 = p - 2$, quindi $p = 1$, $p_a = -1$: il che è assurdo, perchè in tal caso è $\varepsilon = 1$. L'ipotesi $p = 1$ conduce analogamente a $p_a = -1$ e quindi alla stessa conclusione.

[2] Il procedimento di Rosenblatt è stato da me modificato, ma la tirannia dello spazio mi vieta di entrare nei particolari di tale variante.

superare $2(p_a+2)$, *e il limite superiore è raggiunto per ogni valore di* p_a *dalla superficie delle coppie di punti di due curve di generi* $p_a+2,2$.

II. *Le superficie algebriche per cui* $p_g \geq 2(p_a+2)$ *appartengono ai tipi seguenti:*

a) *rigate di genere* >1 $(p_g=0, p_a<-1, p=p_g-p_a)$;

b) *superficie ellittiche di genere geometrico* $p_g>1$ $(p_a=-1, p=p_g-p_a-1=p_g)$;

c) *superficie delle coppie di punti di due curve di generi* $p_a+2,2$ $(p_g=2(p_a+2), p=p_g-p_a-2=p_a+4)$;

d) *superficie di genere lineare* $p^{(1)}=1$ $(p=p_g-p_a)$.

In quest'ultimo caso la disuguaglianza $p_g \geq 2(p_a+2)$ non è però necessariamente verificata, come nei casi precedenti.

Meccanica. — *Le equazioni alle variazioni, per cause perturbatrici variabili, nel concetto di Volterra di variazione prima per una funzione di linea.* Nota di MAURO PICONE, presentata dal Socio GIAN ANTONIO MAGGI [1].

Si abbia la funzione di linea

$$x = x\,|\,[t\,, \overset{\mathrm{T}}{\underset{0}{\varphi_1(t)}}\,, \overset{\mathrm{T}}{\underset{0}{\varphi_2(t)}}\,, \dots, \overset{\mathrm{T}}{\underset{0}{\varphi_\nu(t)}}]\,|\,;$$

le funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\nu$ ricevano gli incrementi $\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_\nu(t)$. Si ponga, per un fissato valore di t,

$$\mathrm{X}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\nu) = x\,|\,[t\,, \varphi_1(t)+\sigma_1\psi_1(t)\,, \dots, \varphi_\nu(t)+\sigma_\nu\psi_\nu(t)]\,|\,,$$

ove $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\nu$ sono dei parametri arbitrarî. Per le ricerche compiute dal Volterra [2], fin dal 1887, sulle funzioni di linea, parmi lecita l'*induzione* che si possa sempre in pratica riguardare come prima approssimazione dell'incremento della funzione x la sua *variazione prima*

$$\delta x = \left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \sigma_1}\right)_0 + \left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \sigma_2}\right)_0 + \cdots + \left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \sigma_\nu}\right)_0,$$

ove con $\left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \sigma_i}\right)_0$ abbiamo indicato il valore della derivata $\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \sigma_i}$ per

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_\nu = 0\,.$$

In questo concetto di variazione prima per una funzione di linea è possibile, *mediante sole quadrature*, approssimare le perturbazioni di un moto,

[1] Pervenuta il 30 settembre 1919.

[2] Volterra, *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni* [questi Rendiconti, 2° semestre 1887, pp. 97-105].

dovute a cause perturbatrici che siano assegnate funzioni del tempo, del posto e di talune velocità, non appena sia noto un sistema di perturbazioni relative ad un certo sistema di parametri del moto, dovute cioè a cause perturbatrici che dirò *parametriche.*

Ciò mostrerò in questa Nota.

In Note ulteriori poi applicherò la teoria generale al calcolo delle perturbazioni del moto dei proietti d'artiglieria, dovute a cause perturbatrici e variabili da punto a punto lungo la traiettoria e parametriche [1]. Queste applicazioni saranno esposte qui quasi solamente nei loro risultati, mentre la loro completa esposizione, particolareggiata anche nei riguardi delle pratiche approssimazioni numeriche, trovasi in lavori che usciranno nella Rivista d'Artiglieria e Genio del Ministero della Guerra [2].

Si riesce, in particolare, al calcolo delle perturbazioni nel moto del proietto, provocate da vento comunque variabile lungo la traiettoria. Con tale risultato viene per la prima volta risoluto razionalmente il problema, posto dalla pratica del tiro in guerra, del calcolo delle correzioni da apportare al tiro, a causa del vento. Si riconosce facilmente, dopo ciò (cfr. i citati lavori nella Rivista d'Artiglieria e Genio), che la soluzione empirica di questo problema, adottata durante la guerra dalle artiglierie francesi [3] ed inglesi e proposta dal Borel, è fondata sopra due ipotesi in contradizione.

1. Le quantità $x_1, x_2, \dots, x_n$ siano costituite dai parametri da cui univocamente dipende la posizione di un sistema materiale S e da talune velocità. Siano poi $\varphi_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_\nu(t, x_1, \dots, x_n)$, ν assegnate funzioni del tempo t e delle quantità $x_1, x_2, \dots, x_n$.

L'indice i prenderà in seguito sempre i valori $1, 2, \dots, n$; gl'indici l e r i valori $1, 2, \dots, \nu$.

Il moto di S sia definito dal seguente sistema di equazioni differenziali e di condizioni iniziali:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = f_i[t, x_1, \dots, x_n; \dots, \varphi_l(t, x_1, \dots, x_n), \dots], \\ x_i(0) = x_i^{(0)}, \end{cases}$$

dove le f_i sono note funzioni degli $n + \nu + 1$ argomenti t, x_i, φ_l.

Per l'intervento di cause perturbatrici variabili, assegnate in funzione del tempo, del posto e di talune velocità, le funzioni φ_l ricevano gli incre-

(1) Il calcolo delle perturbazioni dovute a cause perturbatrici parametriche fu già da me trattato nella Nota: *Formole razionali per la correzione del tiro* [Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, febbraio 1917].

(2) Una prima esposizione meno completa di ciò ho già fatto nelle mie Tavole di tiro da montagna [Fascicolo IB, *Teoria e metodi di compilazione*] pubblicate dal Comando della 6ª Armata e adottate da questa e dal I e V Corpo d'Armata.

(3) Cfr. la pubblicazione del Ministero della Guerra francese: *Instruction sur le tir d'artillerie*, 2me fascicule p. 19 [Paris, Imprimérie nationale, novembre 1917].

menti ψ_l, noti in funzione di t e delle x_i; si tratta di calcolare, in funzione di t, le corrispondenti variazioni prime delle x_i, di calcolare cioè le perturbazioni del moto di S. Indichiamo con X_i la funzione x_i, corrispondente allo stesso valore del tempo e alle funzioni $\chi_l = \varphi_l + \sigma_l \psi_l$, ove le σ_l sono ν parametri arbitrarî. Le X_i riescono definite dal seguente sistema di equazioni differenziali e di condizioni iniziali:

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dX_i}{dt} = f_i[t, X_1, \dots, X_n; \dots, \varphi_l(t, X_1, \dots, X_n) + \sigma_l \psi_l(t, X_1, \dots, X_n), \dots], \\ X_i(0) = x_i^{(0)}. \end{cases}$$

Poniamo $\left(\dfrac{\partial X_i}{\partial \sigma_r}\right)_0 = \xi_{ir}(t)$; le variazioni prime delle quantità x_i, che ci proponiamo di calcolare, sono date da

$$\delta x_i = \xi_{i1}(t) + \xi_{i2}(t) + \cdots + \xi_{i\nu}(t).$$

Deriviamo rispetto a σ_r (¹) ambo i membri delle equazioni (2), si ha

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial X_i}{\partial \sigma_r} = \sum_{k=1}^{k=n}\left[\frac{\partial f_i}{\partial X_k} + \sum_{l=1}^{l=\nu}\frac{\partial f_i}{\partial \chi_l}\left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial X_k} + \sigma_l \frac{\partial \psi_l}{\partial X_k}\right)\right]\frac{\partial X_k}{\partial \sigma_r} + \frac{\partial f_i}{\partial \chi_r}\psi_r,$$

$$\left[\frac{\partial X_i}{\partial \sigma_r}\right]_{t=0} = 0.$$

Se in queste equazioni facciamo $\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots \sigma_r = 0$, osservando che, posto

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_k} + \sum_{l=1}^{l=\nu}\frac{\partial f_i}{\partial \chi_l}\frac{\partial \varphi_l}{\partial X_k}\right)_0 = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{l=1}^{l=\nu}\frac{\partial f_i}{\partial \varphi_l}\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_k}\right)_0 = \alpha_{ik}(t),$$

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial \chi_r}\psi_r\right)_0 = \left(\frac{\partial f_i}{\partial \varphi_r}\psi_r\right)_0 = \beta_{ir}(t),$$

le funzioni $\alpha_{ik}(t)$, $\beta_{ir}(t)$ riescono note funzioni di t, si trova che le funzioni $\xi_{ir}(t)$ soddisfano, ciò che le definisce completamente, al seguente sistema di equazioni differenziali lineari e di condizioni iniziali:

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{d\xi_{1r}}{dt} = \alpha_{11}\xi_{1r} + \cdots + \alpha_{1n}\xi_{nr} + \beta_{1r}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{d\xi_{nr}}{dt} = \alpha_{n1}\xi_{1r} + \cdots + \alpha_{nn}\xi_{nr} + \beta_{nr}, \\ \xi_{1r}(0) = \cdots = \xi_{nr}(0) = 0. \end{cases}$$

(¹) È ben noto (cfr., per esempio, Goursat, *Cours d'Analyse*, t. III), che se, come supponiamo, le funzioni f_i e le loro derivate $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}$, $\dfrac{\partial f_i}{\partial \varphi_l}$ sono continue nel dominio che occorre considerare, le funzioni X_i definite dalle (2) sono continue e possiedono le derivate $\dfrac{\partial X_i}{\partial \sigma_r}$ continue, in un dominio nel quale basta rimanere perchè sia legittimo il procedimento del testo.

Questo sistema è appunto quello delle *equazioni alle variazioni per le cause variabili, perturbanti il moto di* S (*assegnate funzioni del tempo, del posto e di talune velocità*), *alle quali competono gli incrementi* ψ_i *delle funzioni* φ_i.

Il sistema (3), ridotto omogeneo,

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \alpha_{i1}\xi_1 + \alpha_{i2}\xi_2 + \cdots + \alpha_{in}\xi_n, \tag{4}$$

è quello delle equazioni alle variazioni ([1]) relative a variazioni di parametri del moto che non compaiono esplicitamente nelle equazioni differenziali (1). Onde il teorema:

Noto un sistema di n perturbazioni del moto, linearmente indipendenti, dovute a variazioni di n parametri che non compaiono esplicitamente nelle equazioni differenziali del moto, si calcolano mediante sole quadrature le perturbazioni dovute a cause perturbatrici variabili, che siano cioè assegnate funzioni del tempo, del posto e di talune velocità.

2. Nelle equazioni differenziali dei moti della meccanica celeste, ed in generale della meccanica applicata, è raro che i parametri $x_i^{(0)}$, che fissano le condizioni iniziali, compaiano esplicitamente nelle equazioni differenziali. Se ci mettiamo in questa ipotesi, il sistema di derivate

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_i^{(0)}}, \frac{\partial x_2}{\partial x_i^{(0)}}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial x_i^{(0)}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

costituisce appunto un sistema completo di integrali fondamentali per il sistema omogeneo (4), il cui determinante, per $t = 0$, ha gli elementi della diagonale principale eguali ad *uno*, e gli altri nulli. Si ha dunque che:

Se nelle equazioni differenziali del moto non compaiono esplicitamente i parametri che fissano le condizioni iniziali, noto il sistema delle n perturbazioni dovute, ciascuna, alla variazione di uno solo degli indicati parametri, si calcola mediante sole quadrature la perturbazione dovuta ad una qualunque causa perturbatrice variabile.

3. A proposito delle equazioni alle variazioni (4) è interessante un'osservazione che mi sembra sfuggita al Poincaré. Supponiamo che nei secondi membri delle (1) non compaia esplicitamente il tempo, e indichiamo con $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ questi secondi membri. Si ha:

Questi secondi membri stessi $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *costituiscono un particolare sistema di integrali delle equazioni alle variazioni* (5).

([1]) Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la Mécanique celeste* (Paris, Gauthiers-Villars), t. I, p. 162.

Ne segue che:

Gli integrali del sistema

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \ , \ x_i(0) = x_i^{(0)} \, ,$$

come funzioni dei loro valori iniziali, soddisfano alle equazioni lineari alle derivate parziali seguenti:

$$\sum_{k=1}^{k=n} F_k(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \frac{\partial x_i}{\partial x_k^{(0)}} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \, .$$

Matematica applicata. — *Della volgarizzazione ed applicazione della fisica-matematica in medicina* [1]. Nota I del professore S. Sàlaghi, presentata dal Socio A. Ruffini [2].

La linea della consonanza e la serie armonica.

In un precedente studio di acustica fisiologica sottoposi gli accordi musicali alla analisi geometrica [3]. Presi come ordinate le altezze dei suoni secondo la frequenza delle vibrazioni; come ascissa il tempo, la durata *musicale* dei medesimi, durante la quale le note sono tenute.

Procedendo dagli accordi semplici ai complessi, osservai che la congiungente la sommità delle ordinate, da principio rettilinea, va poi gradatamente incurvandosi nella parte superiore: dà origine ad archi di conica in ordine crescente di schiacciamento: prima rami di iperbole, quindi parabola ed infine ellisse. Al limite, col sovrapporsi della parte destra e sinistra della conica, termina in un segmento rettilineo (conica degenerata) [4].

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di terapia fisica della R. Università di Bologna.

[2] Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1919.

[3] Questi Rendiconti, Note I e II, vol. XXVII, serie 5ª, 2° sem., fascicoli 3° e 4°. Roma, agosto 1918.

[4] Dal lato sperimentale, acustico-musicale, potei verificare che, quando da principio la congiungente è rettilinea, l'accordo è consonante (triade mg.). Proseguendo, la congiungente cessa di essere rettilinea, per incurvarsi, presentando la convessità verso l'alto; allora comincia la dissonanza, e cresce poi di asprezza di pari passo col grado di incurvamento dell'arco. La linea retta sarebbe quindi l'immagine grafica della consonanza.

Trovai inoltre che la dissonanza non può crescere indefinitamente. Ad un certo momento (al limite, corrispondente alla conica degenerata in un segmento rettilineo) si ricade nella consonanza. Questa però perde allora il carattere, che ha comunemente, di accordo di posa ed acquista il carattere di accordo di moto.

Ora mi propongo di esaminare il decorso ulteriore di questa congiungente lungo il campo uditivo.

La si prolunghi pertanto, oltre l'accordo perfetto maggiore, verso gli acuti, e prosegua rettilinea a raffigurare la linea della consonanza [1].

Nella nuova rappresentazione si osserva che, ad intervallo eguale di ascisse, la retta incontra la sommità delle ordinate degli armonici in ordine progressivo di intonazione. Le ottave susseguentisi in direzione degli acuti vanno, come s'intende, allungandosi nel valore delle ascisse in progressione geometrica di ragione due. Coll'allargarsi dello spazio occupato dalle ottave successive, si estendono gli spazî vuoti tra suono e suono, spazi che possono essere occupati con suoni nuovi consonanti. E questi — cosa inattesa e singolare — costituiscono il germe, l'origine di altrettanti armonici che si vedranno poi apparire nelle ottave susseguenti. E così, dai nuovi suoni via via aggiunti, verrà fuori gradatamente l'intera serie armonica. Il procedimento è descritto in calce [2]. Per poterlo seguire, è bene di confrontare la unita tavola della « linea della consonanza lungo il campo uditivo ».

[1] Sappiamo che nelle nostre costruzioni grafiche le ordinate, rappresentanti la frequenza delle vibrazioni nei singoli suoni, crescono di ottava in ottava in progressione geometrica di ragione due. Giovandoci del metodo che i matematici chiamano, con Lalanne, dell'*anamorfismo geometrico* (Lalanne, *Mémoire sur les tables graphiques et sur la Géometrie anamorphique*, Annales des Ponts et Chaussées, 1846), possiamo fare in modo che la nostra congiungente conservi sempre la forma rettilinea. A tal uopo occorre che in una nuova rappresentazione grafica le ascisse crescano nella stessa proporzione delle ordinate.

[2] Partendo, poniamo, dalla ottava seconda, che va dal *do* (16) al *do* (32) e costruendo in essa l'accordo perfetto maggiore: *do* (16), *mi* (20), *sol* (24), *do* (32), scorgesi come la terza nota (il *sol*, terzo armonico del *do* di 8 vibrazioni) sia *equidistante* dagli estremi. *Viene quindi naturale il pensiero di inserire la nota simmetrica del* **mi** (20) tra il *sol* (24) ed il *do* (32). Come la prima metà della ottava (16-24), divisa in due parti eguali dal *mi*, dà la consonanza perfetta, così parimente la seconda metà dell'ottava (24-32), divisa in due parti eguali dal nuovo suono intercalato, darà una consonanza perfetta. Tale nota aggiunta avrebbe evidentemente 28 vibrazioni; e noi troviamo che il settimo armonico del *do* (8) è una nota di 56 vibrazioni la quale può avvicinarsi, in certo modo, al *si* bemolle. La nota aggiunta non è dunque altro che l'origine del settimo armonico.

Nella terza ottava, che va da 32 a 64 vibrazioni, abbiamo gli stessi intervalli *equidistanti* come nella ottava seconda, ma di larghezza raddoppiata. Tra di loro *pensiamo naturalmente* di intercalare quattro note simmetriche nella frequenza delle vibrazioni. Ed esse, inalzate di ottava, riproducono il nono, l'undecimo, il tredicesimo, il quindicesimo armonico. Questi armonici possono, però con molta buona volontà, ravvicinarsi alle note *re*, *fa* diesis, *la* bemolle e *si*.

La quarta ottava, che va da 64 a 128 vibrazioni, contiene gli stessi otto intervalli *equidistanti*, di larghezza però doppia di quella che hanno nella ottava precedente. Qui parimenti inseriamo altri otto suoni *simmetrici* o equidistanti, rappresentati dal numero delle vibrazioni. E questi, elevati di ottava, riproducono nuovi armonici, precisamente il 17°, il 19°, 21°, 23°, 25°, 27°, 29°, 31° armonico.

E così potrebbe continuarsi indefinitamente, perchè gli armonici sono illimitati come i numeri. Quelli intanto, che furono qui ricostruiti e riconosciuti come tali, sono raccolti nella nostra tavola.

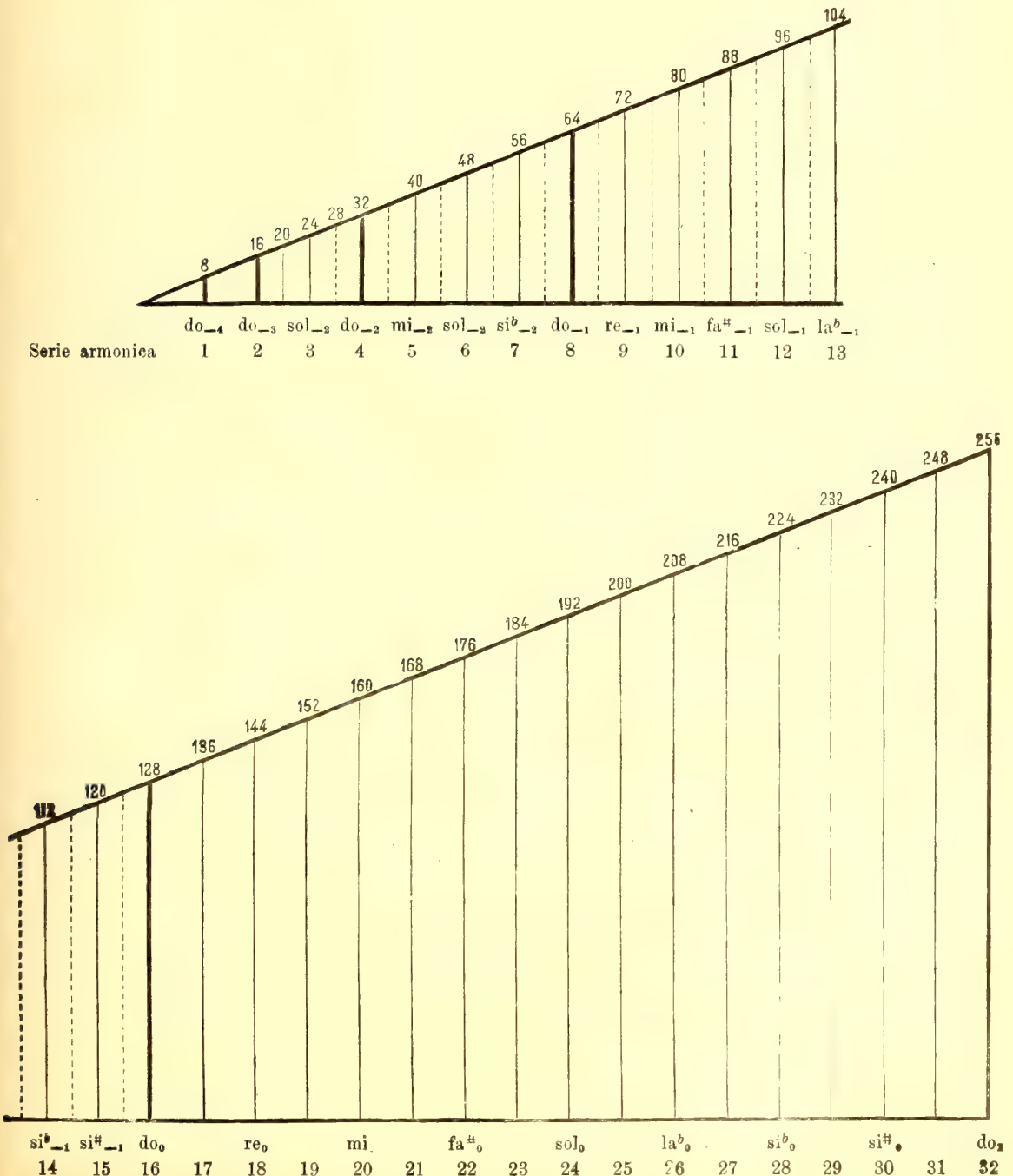
TAVOLA

raffigurante il decorso della linea della consonanza lungo la serie armonica.

Per comodità di calcolo e per economia di spazio nel disegno, le operazioni vi sono fatte nel registro basso. Volendole riferire al registro medio, ove nei libri di testo sono comunemento inscritti i principali armonici, conviene moltiplicare per otto il numero delle vibrazioni. Ciò equivale a spostare di tre ottave in alto tutta la costruzione. La notazione seguìta nell'ordine delle ottave è secondo il sistema chiamato degli indici. Le linee verticali *punteggiate* indicano l'altezza d'intonazione dei suoni *nuovi* che furono aggiunti nei luoghi simmetrici.

112 120 128 136 144 152 160 168 176 184 192 200 208 216 224 232 240 248 256

si$^{b}_{-1}$ si$^{\#}_{-1}$ do$_0$ re$_0$ mi$_0$ fa$^{\#}_0$ sol$_0$ la$^{b}_0$ si$^{b}_0$ si$^{\#}_0$ do$_1$

14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32

Dando una occhiata alla suddetta tavola, scorgesi che il numero degli armonici, compresi in ciascuna ottava, cresce in direzione degli acuti in progressione geometrica di ragione due.

Al contrario, l'intervallo musicale tra gli armonici stessi va gradatamente diminuendo: dapprima è di ottava, poi di quinta, poi di terza, di tono, di semitono, di quarto, di ottavo di tono. La suddivisione degli intervalli in parti aliquote è indefinita. Se un giorno dovesse farsi l'attuazione in pratica di un simile frazionamento, è da prevedere che vi farebbe difetto la varietà. Troppa è la simmetria.

Poichè l'incontro tra la retta congiungente la sommità delle ordinate e gli armonici avviene sempre ad intervallo eguale, ne è derivato che la progressione geometrica di ragione due nelle coordinate si è scissa in una progressione aritmetica. Nè poteva essere altrimenti; in quanto, come è noto, i suoni armonici crescono anche per rapporto al numero delle loro vibrazioni, ossia per le y, come i numeri semplici: 2, 3, 4, ecc., posto il fondamentale come 1.

Avendo gli opportuni istrumenti, sirena ed altro, potrebbero verificarsi sperimentalmente i risultati ottenuti coll'analisi geometrica.

Intanto però prego di riflettere che in tema di rapporti tra le vibrazioni sonore la teoria gode di una supremazia incontrastata. Qui essa ha fatto già valere l'opera dell'ingegno, ed al controllo sperimentale rimarrà affidato soltanto un lavoro materiale.

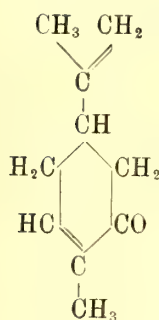
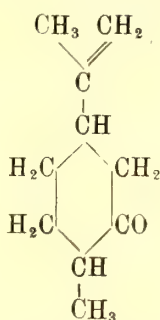
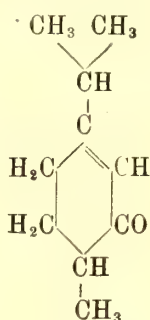
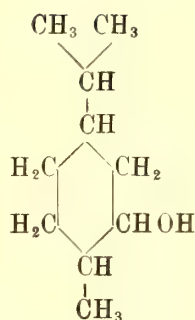
Chimica. — *Sui corvomentoli isomeri e sutla scissione del carvomegtolo inattivo negli antipodi ottici* [1]. Nota II del dot. Vincenzo Paolini, presentata dat Corrisp. A. Peratoner [2].

Materiale di partenza. — Dall'essenza del carumcarvi fu isolato il carvone allo stato puro attraverso la combinazione con idrogeno solforato. Aveva le seguenti costanti: p. eb. 224°-225°; $\delta^{20} = 0{,}9596$; $[\alpha]_D = + 62°{,}04'$. Dal carvone, per riduzione con polvere di zinco e idrato sodico secondo Wallach [3], fu preparato il diidro-carvone; questo fu trasformato nell'isomero carvenone per riscaldamento con acido solforico diluito; e finalmente dal carvenone, per riduzione con sodio ed alcool, si pervenne al carvomentolo puro, p. eb. 218°.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto chimico-farmaceutico della R. Università di Roma.

[2] Pervenuta all'Accademia il 6 settembre 1919.

[3] Annalen, 286, pp. 130 e 277, pag. 130.

Fu costatato sperimentalmente che era inattivo.

```
 CH3 CH2           CH3 CH2           CH3 CH3           CH3 CH3
   \ //              \ //              \ /               \ /
    C                 C                CH                CH
    |                 |                 |                 |
    CH                CH                C                 CH
   /  \              /  \              // \              /  \
H2C    CH2        H2C    CH2        H2C    CH        H2C    CH2
 |      |          |      |          |      |         |      |
HC     CO         H2C    CO         H2C    CO        H2C    CHOH
  \\  /              \  /              \  /             \  /
    C                 CH                CH                CH
    |                 |                 |                 |
    CH3               CH3               CH3               CH3
  Carvone         Diidro-carvone      Carvenone        Carvomentolo
```

Ftalato di carvomentolo e stricnina. — Gr. 20 di carvomentolo, sciolti in 70-80 cc. di benzina di petrolio (60°-70°), si fanno reagire per 5-6 ore con sodio metallico in nastri ed in eccesso (gr. 4 invece di 3), e dopo questo tempo la soluzione del sale sodico dell'alcool, decantata dall'eccesso di metallo, si fa gocciolare sulla quantità teorica di anidride ftalica (gr. 19,40), sospesa in molto etere di petrolio, agitando continuamente. Dopo 48 ore di riposo, si aggiungono al prodotto della reazione 400-500 cc. di acqua lievemente alcalina per idrato sodico; nell'acqua passa l'etere ftalico acido sotto forma di sale sodico, e dalla soluzione acquosa, per aggiunta di acido solforico diluito, si separa ben presto lo ftalato acido, dapprima oleoso, ma che dopo riposo sott'acqua si rapprende in una massa semisolida, appiccicaticcia.

Lavato e disseccato nel vuoto, viene disciolto in poco alcool assoluto, ed alla soluzione alcoolica si aggiunge la quantità equivalente di stricnina finamente polverizzata, che passa prontamente in soluzione. Il sale di stricnina è molto solubile in alcool; ma per aggiunta di un doppio volume di etere etilico, si forma rapidamente un precipitato bianco cristallino che, raccolto su filtro, pesa esattamente la metà delle sostanze impiegate.

Questo sale di stricnina meno solubile contiene la modificazione sinistrogira. Purificato per successive cristallizzazioni dall'alcool diluito, il sale fonde costantemente a 155°-156°, e si presenta in forma di aghetti incolori.

0,2268 gr. sostanza ; 0,6818 CO^2 ; 0,1454 H_2O

$C_6H_4<{COOC_{10}H_{19} \atop COOC_{21}H_{22}N_2O_2}$					
	Calcolato	C	73,32	H	7,3
	Trovato	"	73,2	"	7,2

Una soluzione contenente gr. 5,9604 di sale in 100 cc. di alcool etilico assoluto dà, in tubo lungo 2 dcm., $\alpha_D = -1°,46'$; onde $[\alpha]_D = -14°,76'$.

Ftalato acido di l-carvomentolo. — Gr. 50 di puro sale di stricnina vengono disciolti in alcool, ed alla soluzione alcoolica si aggiunge acido cloridrico diluito ed in eccesso, in modo da salificare tutta la stricnina; lo

ftalato acido si separa ben presto insolubile e ben cristallizzato. Raccolto su filtro, lavato con acqua e disseccato, viene ricristallizzato dall'acido acetico a 90 %, o meglio dalla benzina di petrolio (70°-80°). Fonde costantemente a 125°.

Una soluzione in alcool etilico assoluto contenente in 100 cc., gr. 6.5944 di ftalato acido dà, in tubo lungo 2 dcm., $\alpha_D = -0{,}30'$; onde $[\alpha]_D = -3°{,}80'$.

l-carvomentolo. — Gr. 30 di ftalato acido, sciolti in poco alcool, vengono saponificati con potassa alcoolica a caldo; dopo diluizione con acqua, si distilla il carvomentolo in corrente di vapore. Disseccato con carbonato potassico fuso, bolle a 218° (corr.).

Liquido oleoso, limpido, con debole odore di menta. Costanti:

$$\delta^{15°} = 0{,}9082 \; ; \; n_D^{15} = 1{,}461 \; ; \; \alpha_D = -1°{,}40' \text{ (tubo da 1 dcm.)};$$
$$\text{onde } [\alpha]_D = -1°{,}82'.$$

Ftalato di d carvomentolo e di argento. — Il liquido alcoolico etereo, dal quale fu separato il sale di stricnina meno solubile, abbandonato alla evaporazione, lascia un residuo denso sciropposo che non cristallizza più da nessuno dei comuni solventi organici.

Tentativi per ottenere un sale di chinina o di cinconina ben cristallizzato, riuscirono infruttuosi. Al contrario, si hanno buoni risultati preparando il sale di argento.

Dal sale di stricnina si mette in libertà lo ftalato acido nel modo descritto sopra per il sale di stricnina dell'*l*-carvomentolo; lo ftalato acido risultante, molle, sciropposo, viene disciolto in acqua contenente la quantità calcolata di ammoniaca, ed alla soluzione del sale ammoniacale si aggiunge nitrato d'argento. Il precipitato bianco voluminoso formatosi viene disseccato nel vuoto e cristallizzato dall'alcool assoluto; o pure lo si precipita dalla sua soluzione in cloroformio, mediante aggiunta di un miscuglio di alcool ed etere.

Gr. 0,460 di sale secco diedero 0,120 di Ag.

	Trovato	Calcolato
Ag %	26,08	26,27

Ftalato acido di d-carvomentolo. — Riscaldando questo sale di argento a bagnomaria con soluzione di cloruro sodico, si separa rapidamente tutto l'argento sotto forma di cloruro, mentre rimane in soluzione lo ftalato di sodio e di carvomentolo; da questa soluzione, per aggiunta di acido solforico diluito, precipita lo ftalato acido ormai solido, cristallino, che si purifica ulteriormente per cristallizzazione dall'etere di petrolio.

Aghetti soffici incolori, che fondono a 109°.

Gr. 3,4092 di ftalato acido, sciolti in 25 cc. di alcool etilico assoluto, dànno in tubo lungo 2 dcm.:

$$\alpha_D = + 1°,10' ; \text{ onde } [\alpha]_D = + 4°,62.$$

d-carvomentolo. — La soluzione alcoolica di ftalato acido viene saponificata a caldo con potassa alcoolica; dopo diluizione con acqua, si distilla con vapore il carvomentolo liberato.

$$\text{p. eb. } 218° \text{ (corr.)} ; \delta^{15} = 0,9074 ; n_D^{15} = 1,463..$$

$$\alpha_D = + 1°,10', \text{ onde } [\alpha]_D = + 1°,83'.$$

Chimica. — *Sulla trasformazione del malato ammonico nel dipeptide dell'acido aspartico* [1]. Nota di C. Ravenna e G. Bosinelli, presentata dal Socio G. Ciamician.

Nella nostra Nota precedente [2] abbiamo dimostrato che per ebollizione delle soluzioni acquose di asparagina essa si trasforma parzialmente nel dipeptide dell'acido aspartico di Fischer (acido asparagil-aspartico) e che questo per riscaldamento a 210° perde tre molecole di acqua dando origine ad un corpo della formula $C_8H_6N_2O_4$, il quale per trattamento con barite rigenera il dipeptide. Al prodotto della composizione $C_8H_6N_2O_4$ abbiamo assegnato la costituzione probabile di un'anidride dell'acido dichetopiperazindiacetico.

I caratteri dell'anidride e la sua composizione elementare ci hanno fatto ritenere che questa sostanza fosse uguale ad un corpo ottenuto da Dessaignes [3] per riscaldamento del malato acido di ammonio e che era stato descritto nella vecchia letteratura chimica come imide fumarica.

Era importante ricercare se tale identità esistesse realmente poichè essa avrebbe dimostrato la possibilità di ottenere il dipeptide dell'acido aspartico anche partendo dal malato ammonico.

Abbiamo perciò preparato la così detta imide fumarica riscaldando per alcune ore in tubo da saggio aperto, con bagno d'olio, il malato acido di ammonio (5 gr.) alla temperatura di 210°. La sostanza che ne risulta (3 gr.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica agraria della R. Università di Bologna.

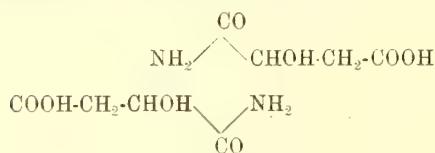
(2) Questi Rendiconti XXVIII, 2° sem., pag. 113 (1919).

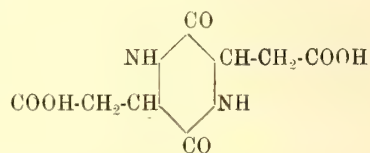
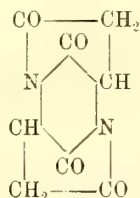
(3) Beilstein, 3ª edizione, vol. I, pag. 1389.

dai 5 gr. impiegati) ha in realtà lo stesso contegno di quella che noi abbiamo ottenuto per riscaldamento del dipeptide dell'acido aspartico. L'identità poi si è dimostrata con maggior certezza perchè, seguendo il metodo indicato nella precedente Nota, anche il prodotto del riscaldamento del malato acido di ammonio, per trattamento con barite in piccolo eccesso (gr. 2 di sostanza con 120 cc. di barite $^1/_3$ normale) e successiva eliminazione del bario con la quantità esatta di acido solforico, ci ha fornito un liquido che, decolorato con carbone e concentrato nel vuoto, lasciò un residuo sciropposo, il quale, per contatto coll'alcool, si trasforma in una polvere bianca riconosciuta per tutti i caratteri ed all'analisi come l'acido asparagil-aspartico.

Calcolato per $C_8H_{12}N_2O_7$ (in 100 parti)	Trovato
C 38,71	38,36
H 4,84	5,15
N 11,29	11,06

L'acido asparagil-aspartico, che, come fu detto, si forma per ebollizione della soluzione acquosa di asparagina, si può dunque preparare per sintesi anche partendo dal malato acido di ammonio.

Il corpo che nell'antica letteratura era stato descritto come imide fumarica è perciò da considerarsi identico alla già menzionata anidride dell'acido dichetopiperazindiacetico ed avrà per conseguenza la formula dimera $C_8H_6N_2O_4$. La sua formazione può essere illustrata dal seguente schema, supponendo che in un primo tempo si formi l'amide dell'acido malico e come prodotto intermedio l'acido dichetopiperazindiacetico.

```
                CO                                         CO
         NH2/    \CHOH·CH2-COOH                    NH/    \CH-CH2-COOH
COOH-CH2-CHOH\    /NH2                  COOH-CH2-CH\    /NH
                CO                                         CO
       2 mol. amide malica                 acido dichetopiperazindiacetico

                         CO——CH2
                         |  CO  |
                         N/    \CH
                         CH\    /N
                         |  CO  |
                         CH2——CO
```

anidride dell'acido dichetopiperazindiacetico

Ci sembra che quanto abbiamo esposto in questa Nota meriti, nei riguardi della biochimica, di richiamare l'attenzione. Era già noto che il prodotto $C_8H_6N_2O_4$, che si ottiene riscaldando il malato acido di ammonio, dà ori-

gine, per prolungata ebollizione con acido cloridrico, all'acido aspartico. Per quanto ci risulta, questa trasformazione del sale ammonico di un acido diffusissimo nei vegetali come l'acido malico, in un amino-acido, non venne mai messa in relazione con un possibile analogo processo di sintesi degli amino-acidi nelle piante. A noi una tale trasformazione appare tanto più rimarchevole in quanto da quello stesso composto siamo giunti ad ottenere, con un mezzo blando di idrolisi, un dipeptide.

Ci proponiamo perciò di continuare le ricerche, descritte in questa e nella precedente Nota, allo scopo principalmente di studiare fino a qual punto i risultati ottenuti possano essere comparati coi processi naturali.

Per maggiori particolari relativi alle esperienze descritte in tali Note, rimandiamo alla Memoria più estesa che apparirà sulla Gazzetta chimica.

Geologia. — *Sul grande sviluppo dei ghiacciai plistocenici della Majella.* Nota dell'ing. S. FRANCHI, presentata dal Socio C. F. PARONA [1].

In una comunicazione fatta alla adunanza della Società geologica italiana, tenuta in Roma il 18 marzo 1918, sopra delle « traccie glaciali nell'alta Valle del Liri », dopo di aver accennato alla presenza di chiare morene nelle valli affluenti del Rio e del Rio dello Schioppo scendenti dal Pizzo d'Eta e dal M. Viglio a quote molto basse, rispettivamente di 750 e di 650 metri, io concludevo che, quando non fosse dimostrabile che quei monti abbiano subìto un abbassamento tettonico posteriormente all'epoca glaciale, « noi dovremmo supporre negli alti gruppi dell'Appennino abruzzese uno sviluppo glaciale molto superiore a quello che è stato finora indicato. Ad esempio nel gruppo del M. Velino, il meno distante dalla regione in discorso (Valle del Liri), e che si affaccia ancora, sebbene meno direttamente, al Tirreno, noi dovremmo supporre delle espansioni glaciali molto considerevoli, con limiti delle nevi perpetue molto più bassi, e con ghiacciai vallivi che scendessero a quote molto inferiori a quelle finora indicate ».

Ritenendo poi che l'argomento avesse una grande importanza per il progresso degli studî del glaciale nell'Abruzzo, io ho voluto dare maggior svolgimento alle osservazioni e considerazioni mie, facendo un parallelo cogli sviluppi glaciali noti in altre parti dell'Appennino, e particolarmente nei gruppi del M. Sirino, in Basilicata, e delle Apuane, nell'Appennino parmense, nei monti della Corsica e nel grande sistema alpino.

[1] Pervenuta all'Accademia il 9 settembre 1919.

E ciò facevo con un lavoro che consegnai per la stampa al Direttore del R. Ufficio geologico nel mese di luglio 1918, e che, per cause varie, fra cui diversi scioperi tipografici, non è peranco pubblicato.

In questo lavoro, avente per titolo « *Sullo sviluppo relativo dei ghiacciai plistocenici nei monti Simbruini e nell'adiacente Appennino abruzzese* », dopo l'esame comparativo accennato sopra, col quale io dimostravo che l'ipotesi del Viola, dell'abbassamento post-glaciale del gruppo dei monti Cantori-Simbruini, non fosse necessaria, io passavo in rapida rassegna i gruppi montuosi dell'Appennino abruzzese, aventi cime superiori a duemila metri, sui quali probabilmente si sarebbero trovate traccie glaciali, e davo qualche particolare sui ghiacciai che avrebbero dovuto esistere nelle principali valli del gruppo del M. Velino, indicandone i circhi di raccolta e affermando l'origine glaciale di alcuni laghi, fra cui quello della Duchessa.

Anche pel Gran Sasso io accennavo ad un più grande sviluppo glaciale, e per la Majella io combattevo la opinione di qualche geologo che ritenne esservi esistiti solamente nevati nelle più grandi altitudini, ed affermavo per contro che lo sviluppo glaciale doveva avere avuto una grande importanza in quella bella montagna. E, a mo' d'esempio, accennavo alla grande probabilità che il ghiacciaio delle valli confluenti delle Mandrelle e delle Cannelle dovesse scendere fin presso Fara S. Martino, e quello dell'Orfento fin sopra Caramanico. Io indicavo inoltre come certa l'origine glaciale del piano lacustre della Regione Prati e delle colline detritiche circostanti, a sud del Guado di San Leonardo, ed emettevo l'ipotesi che la grande massa detritica sulla quale sta l'abitato di Pacentro, a circa 700 m. s. m., potesse rappresentare la morena terminale del ghiacciaio vallivo dell'Avella, o un terreno fluvio-glaciale in rapporto con essa.

Io sono ora molto lieto di constatare che le previsioni, da me fatte alla seduta della Società geologica del marzo 1918 e nell'accennato lavoro in corso di stampa, erano molto fondate, e che esse hanno avuto, da osservazioni posteriori, una conferma più pronta e completa di quanto io potessi sperare; anzitutto da quelle dell'ing. Crema pel gruppo del M. Velino (monti della Duchessa) e dalle mie personali pei dintorni di Caramanico, alle falde della Majella.

L'ing. Crema, dopo la campagna geologica del 1918, con una Nota presentata all'Accademia dei Lincei, « *Traccie di vaste glaciazioni antiche sui monti della Duchessa* » (seduta 16 marzo 1919), ci dà una prima definizione dei ghiacciai plistocenici del Velino, nella quale figurano tutti quelli da me, a titolo di previsione, sommariamente abbozzati, mostrando così di essersi messo sopra una via che sarà feconda di risultati riguardo al glaciale di tutto l'Abruzzo. Si potrà ora procedere senza esitanza; ed io mi compiaccio che abbiano data la prima mossa le mie poche osservazioni a proposito dei ghiacciai della valle del Liri.

Quanto alle previsioni riguardanti il versante occidentale della Majella, io debbo dichiarare che, se dapprima vi sono stato guidato dalle osservazioni sull'altimetria del gruppo, sono poi stato in esse validamente rafforzato dalla visione delle minute di campagna dei signori Pompeo Moderni e Michele Cassetti. Alcune masse detritiche da essi indicate si rivelarono tosto, ai miei occhi, come di origine indubbiamente glaciale, come ad esempio quelle ad occidente del piano lacustre della Regione Prati e quelle della Regione S. Nicola, sopra Caramanico. E se a questi collaboratori del R. Ufficio geologico mancò la visione dell'origine vera di quelle masse detritiche, il fatto si deve attribuire al non aver essi mai percorso regioni alpine, con tipici sviluppi glaciali. Il Moderni tuttavia aveva intuito l'origine glaciale di alcune masse moreniche nel gruppo del Gran Sasso, da altri geologi trascurate.

In un sopraluogo fatto lo scorso luglio in compagnia degli ingegneri Aliquò e Testa del Genio Civile di Chieti, per studiare le zone franose che minacciano l'abitato di Caramanico, salendo al cosiddetto Piano di S. Nicola, vi ho trovato, come appunto mi aspettavo di trovare, un tipico paesaggio morenico, con numerose colline costituite di detrito, includenti convalli e fosse chiuse, fra cui quella a sud-est delle case S. Nicola, la quale per alcuni mesi dell'anno si trasforma in un bel laghetto. Dal lato nord-est, dei piccoli affluenti dell'Orfento incidono profondamente la massa detritica, mostrandovi la tipica struttura caotica della morena; ed ivi, oltre i blocchi e i detriti calcarei, affiora una polvere o farina calcarea bianchissima, utilizzata per le stuccature.

La regione collinosa morenica si estende per buon tratto a monte dell'abitato di S. Nicola e verso Caramanico, fino agli alti ciglioni di Colle Alto sorretto da parete calcarea verso sud-ovest e da una parete di detrito cementato verso l'abitato, cioè verso nord ovest.

In molti punti sono piccoli affioramenti di pozzolana, che diedero luogo a piccoli scavi in vicinanza del Colle Alto. I rapporti di posizione, ad un esame superficiale, non risultano molto chiari; tuttavia sembra che in qualche punto la piccola lente di pozzolana, scura tipica, sia subordinata al morenico di una collinetta adiacente a quella di Colle Alto verso sud-est. Eseguendo uno scavo in trincea, si potrebbe in breve tempo chiarire meglio il fatto; ma a me ne mancarono il tempo e i mezzi.

L'ultima parete vòlta verso l'abitato è molto ripida e mostra inclusi, in mezzo a detrito di varie dimensioni, rari blocchi di grandi dimensioni, rivelanti l'origine morenica. La perfetta cementazione ricorda quella di alcune masse moreniche delle regioni calcescistose delle Alpi. Anche il cucuzzo, sul quale stanno i ruderi del castello soprastanti all'abitato è in detrito calcareo cementato; e molto detrito si mostra fin sotto alle case e ricopre le regioni marnose in frana che intaccano i più alti risvolti dello stradale che sale al villaggio. La sorgente sulfurea dello stabilimento balneario sembra aver

la sua scaturigine poco al disotto della base del detrito calcareo, nel quale volta a volta veggonsi blocchi con traccie di ippuriti ed altri zeppi di nummuliti.

Poco a monte del castello, in una regione detritica s'alza dal terreno un grosso masso di alcuni metri di grossezza, quasi tondeggiante, detto « il sasso del castello » dalla gente del luogo, la quale ne impedì sempre la demolizione, perchè gli attribuisce un'origine misteriosa, quasi sacra. Certo un enorme blocco, che sembra rotolato, in cima ad un colle e lontano da ogni corso di torrente, avrà eccitato la superstiziosa meraviglia di quei popolani, sempre disposti a credere al soprannaturale. Attorno al grande blocco altri minori, pure rotolati, confermano l'origine morenica.

L'evidenza dell'origine di queste grandiose formazioni glaciali mi induce a credere che nessun geologo, che avesse qualche dimestichezza con tali fenomeni, abbia mai risalito la Majella dal lato di Caramanico, se la loro presenza non è stata finora segnalata.

Dalle colline di S. Nicola guardando verso sud-est si vede la grande massa detritica, certo in parte glaciale, sulla quale sta l'abitato di S. Eufemia, poggiare sulle marne cinerognole del miocene, le quali salgono molto più in alto, fin sotto le ripide rupi calcaree del M. Rapina.

L'evidente origine glaciale delle masse detritiche di Caramanico, da me vedute, e la non meno evidente natura di morene delle masse detritiche che si estendono a sud del Guado di S. Leonardo, ci dimostrano la importanza dei ghiacciai in tutto il versante occidentale della Majella e ci lasciano presumere l'esistenza di più importanti ghiacciai nel versante orientale, dove essi, dall'eccelsa vetta del monte Amaro (2795 m.), scendevano probabilmente, come dissi nel precedente lavoro, fino a raggiungere Fara S. Martino (ghiacciaio Cannelle Mandrelle), e dalle poco meno alte cime del gruppo del Monte Acquaviva (2737 m.) fosse fin presso Pennapiedimonte, pel Valtone Selva soma, per dire solo dei più importanti.

L'unica gita fatta, oltrepassando di poco le case di S. Nicola, non mi ha permesso di farmi un concetto dello sviluppo e della forma del ghiacciaio che originò le grandi masse moreniche di Caramanico, le quali sono molto alte rispetto al solco percorso attualmente dall'Orfento; ma non vi può essere dubbio che quel ghiacciaio occupasse la parte media e superiore di quella valle, che culmina alle alte cime del Pesco Falcone (m. 2646) e a quelle quotate 2610 e 2740 m. del costolone che si prolunga verso nord fin oltre il M. Cavallo.

Nel secondo mio lavoro cui ho accennato precedentemente, io dicevo che, se lo sviluppo glaciale preveduto, molto maggiore del fin qui supposto, non si fosse verificato, noi avremmo dovuto attribuire il fatto o ad una differenza importante nelle precipitazioni invernali fra le regioni che si affacciano più direttamente al Tirreno rispetto a quelle dalla parte centrale dell'Abruzzo

e a quella del versante adriatico, o a movimenti tettonici relativi post-glaciali.

Gli studî finora fatti non ci permettono ancora di escludere in modo assoluto che nei Simbruini-Cantari lo sviluppo dei ghiacciai, data la molto minore altezza delle cime, non sia relativamente più importante che non negli alti gruppi del Velino (o monti della Duchessa), del Gran Sasso e della Majella, e quindi non indichi una maggior quantità di precipitazioni nevose all'epoca glaciale in quel primo gruppo. Sembra invece da abbandonare definitivamente l'ipotesi di una subsidenza post-glaciale di quello stesso gruppo rispetto ai monti dell'Abruzzo.

Geologia. — *La trasgressione neocarbonifera nelle Alpi Carniche e nelle Caravanche.* Nota preliminare di Michele Gortani e Paolo Vinassa de Regny, presentata dal Socio Taramelli [1].

Non appena la stagione rese possibile di eseguire ricerche geologiche alpine nelle nuove terre italiane, S. E. l'on. Cermenati, sottosegretario di Stato per l'agricoltura e presidente del R. Comitato geologico, volle affidare a noi l'incarico di compiere rilievi e ricognizioni nella zona carnica di armistizio e nei dintorni di Tarvis, allo scopo di fare un'affermazione di italianità su quelle regioni

Per quanto il tempo disponibile per tali ricerche fosse ristretto e le condizioni climatiche siano state assai sfavorevoli, pure abbiamo potuto condurre a termine la missione affidataci, grazie anche agli aiuti cortesemente prestatici dalle autorità militari della 48ª Divisione.

In attesa che possa essere pubblicata una particolareggiata relazione del lavoro eseguito, crediamo opportuno di accennare brevemente ai principali risultati ottenuti. Tali risultati furono per noi di grande soddisfazione, tanto più che non avevamo la speranza di poter aggiungere qualche cosa di nuovo e di diverso ai ben noti, numerosi e lunghi studî dei geologi austriaci e tedeschi in quelle regioni, finora vergini di studî italiani.

Nel versante austriaco della catena principale carnica, le nuove osservazioni furono prevalentemente di indole tettonica; e da esse venne confermata l'idea, da noi più volte espressa, che la zona paleozoica antica (silurico-devoniana) delle Alpi Carniche è una catena a pieghe, spesso rovesciate e compresse, i cui nuclei sono per lo più costituiti di siluriano superiore e anche di siluriano medio (ordoviciano), riconosciuto da noi in parecchie nuove

[1] Pervenuta all'Accademia il 24 settembre 1919.

località. Così nel Rauchkofel devono considerarsi nucleo delle pieghe fratturate che costituiscono la montagna i così detti « Tonflaserkalke » dello Spitz [1], che le ricerche eseguite hanno dimostrato ordoviciani. A nostro parere, è presente l'ordoviciano anche nella Creta di Collinetta (Zellonalpe), nonchè sui versanti occidentale e settentrionale del Pollinig, dove è incluso fra calcari tipicamente neosilurici. Anche queste montagne si risolvono così in ellissoidi compresse. Analoga è la struttura del Mooskofel e del Gamskofel.

In conseguenza, sia gli scisti che si trovano a placche sui calcari devoniani e siluriani che circondano le valli della Valentina e dell'Anger, sia gli scisti che riposano o battono contro i calcari sul fondo delle valli stesse, sono da ascriversi — al pari degli scisti del versante italiano — al neocarbonifero trasgressivo. E allo stesso modo è da considerarsi neocarbonifera tutta la massa scistosa a nord e ad est del Pollinig (Würmlacher Alpe, Zollner Höhe, Nölblinger Höhe, Feldkogel, Hochwipfel ecc.). Oltre alla giacitura trasgressiva sulle pieghe erose neosiluriche e devoniche della Würmlacher Alpe stessa, della conca di Scarniz e Kurnik ecc., segnaliamo a tale proposito che al Feldkogel gli scisti ricoprono trasgressivamente il neosilurico con calcari reticolati, il neosilurico superiore con calcari grigi a coralli silicizzati, e il devoniano fossilifero. La tragressione carbonifera viene così ad estendersi fino alla Gaila, in quanto che tutti gli scisti costituenti questa parte della catena sono inscindibili.

La trasgressione neocarbonifera acquista in tal modo importanza sempre maggiore come fatto geologico dominante nella catena principale carnica, confermando quanto da noi venne ripetutamente espresso al riguardo [2].

Ma la già notevole estensione, che le precedenti e le attuali ricerche nel nucleo centrale carnico hanno dato alla trasgressione, è grandemente ampliata dalle nostre ricognizioni nella parte orientale della catena e sull'inizio delle Caravanche.

[1] A. Spitz, *Geologische Studien in den Zentral-karnischen Alpen.* Mitteil. geol. Ges. Wien, II, 1909, pag. 278.

[2] Cfr. P. Vinassa, *Sull'estensione del carbonifero super. nelle Alpi Carniche.* Boll. Soc. geol. ital., XXV, 1906; M. Gortani, *Sopra alcuni fossili neocarboniferi delle Alpi Carniche,* ibid.; P. Vinassa, *Nuove osservaz. geol. sul nucleo centrale delle Alpi Carniche,* Proc. verb. Soc. tosc. sc. nat., 3 maggio 1908; M. Gortani, *Osservaz. geol. sui terreni paleozoici della valle di Gorto in Carnia.* Rend. R. Acc. sc. Bologna, 30 gennaio 1910; Vinassa e Gortani, *Le paléozoïque des Alpes Carniques,* Compt. rend. XI Congr. géol. internat., Stockholm, 1910; M. Gortani, *Rilevamento nelle Alpi Venete* (1911), Boll. R. Comit. geol., XLIII, 1, 1912; P. Vinassa, *Studî nelle Alpi Venete,* ibid.; Id., *Rilevamento nelle tavolette di Paluzza e Prato Carnico,* ibid.; Vinassa e Gortani, *Le condizioni geol. della conca di Volaia,* Boll. Soc. geol. ital. XXXII, 193; P Vinassa, *Rilevamento dell'Avanza e della val Pesarina,* Boll. R. Comit. geol. XLIII, 4, 1913; M. Gortani, *Rilevamento nel nucleo centrale carnico,* ibid.; Id., *La serie devon. nella giogaia del Coglians,* ibid.

Di fatto, tutta la massa scistosa, indicata come siluriana dal Frech [1], che si estende dal vallone di Malborghetto a sud del Poludnig fino alla Gailizza e di qui per il Peč e il Kamen alle Caravanche centrali, risulta neocarbonifera e trasgressiva sopra i calcari siluriani e devoniani.

Dal Poludnig per il Lonas Wipfel tali scisti si collegano a quelli neocarboniferi, ricchi di fossili e notissimi, dell'Auernig e della Krone. La giacitura, nettamente trasgressiva, è chiarissima sul Poludnig, sul Schönwipfel, sul Sagran, sullo Starhand, alla Lomsattel, all'Osternig, sul Gočman, ai prati di Bartolo, alla Göriacher Alpe e al Kapin a oriente di questa. In tutte le accennate località la giacitura trasgressiva è dimostrata: dal fatto che gli scisti ricoprono terreni di età diversa dal mesosilurico al neodevonico; dallo sporgere di nuclei e spuntoni calcarei devoniani e siluriani isolati in mezzo agli scisti (ad es. nel vallone di Uggwa e nel piano Bartolo), ed al Peč nelle Caravanche); dal comparire di lingue e di placche scistose isolate sui calcari paleozoici antichi (ad es. nel vallone di Uggwa e nel piano di Bartolo); dal comparire di lingue e di placche scistose isolate sui calcari paleozoici antichi (ad es. allo Schönwipel e all'Osternig-Gočman). All'Osternig risultano neodevonici i calcari reticolati e con venature silicee ed i calcari persichini a frattura ceroide, ritenuti siluriani dal Frech. Non solo l'analogia litologica col neodevonico inferiore, ma anche la posizione stratigrafica (sovrastante ai calcari mesodevonici riccamente fossiliferi) dimostra l'esattezza del nostro riferimento. È anche interessante notare le modificazioni profonde che i nostri studî apportano alla carta del Frech nel gruppo della Göriacher Alpe e in parecchi altri punti. Secondo il Frech, una grande massa di dolomia dello Schlern si estenderebbe dalla zona di vetta, considerata scistosa, della Göriacher-Alpe fino a Tarvis e alla Gailizza. Invece, la cima della Göriacher-Alpe è calcarea e devoniana, analogamente alla cima del Kapin, e una massa scistosa le circonda e si estende a sud fino ai terreni permiani e triassici. Il Gaisrücken e la sua continuazione fino al Schönwipfel, triassici secondo il Frech che per interpretarne la giacitura deve ricorrere ad una immaginaria faglia a baionetta, risultano invece devoniani anche su documenti paleontologici. La presenza di due affioramenti di calcari devonici emergenti dagli scisti neocarboniferi del Peč, era pure ignota; ed è superfluo rilevarne l'importanza e il significato.

Le conclusioni principali e di ordine più generale, che possiamo trarre dai fatti esposti, sono: l'estensione verso oriente del motivo tettonico dominante nel nucleo centrale carnico, con pieghe compresse e per lo più rovesciate, costituite dall'antica ossatura silurico-devoniana; e la grande am-

[1] Frech, *Die Karnischen Alpen.* Halle, 1894 (Foglio Bleiberg e Tarvis della carta geol.).

piezza della trasgressione neocarbonifera, che i nostri precedenti studî avevano già esteso alle Alpi Carniche centrali e occidentali, e che è ora dimostrata ininterrotta per lo meno dalla cima Vanscuro nell'alto Comelico fino alle Caravanche occidentali, sopra una lunghezza di oltre cento chilometri, così da acquistare significato fondamentale per la storia geologica del sistema alpino.

Fisiologia vegetale — *Sulla presenza, nelle piante, di composti ematoidi* di ferro [1]. Nota III del dott. G. Gola [2], presentata dal Socio O. Mattirolo.

Per la ricerca di piccole quantità di sangue non sempre si possono preparare i cristalli di emina, sia per la piccola sensibilità del processo, sia perchè non sempre i materiali ematici in esame sono chimicamente adatti a reagire col cloro in modo da formare di emina.

Si ricorre perciò, ed in ispecie nelle ricerche cliniche, ai processi fondati sulle proprietà perossidasiche del sangue.

Da qualche anno sono stati accolti con favore il metodo di Mayer (o di Utz) fondato sull'uso del sale alcalino di fenolftalina, il quale in presenza di sangue e di H_2O_2 si trasforma in sale di fenolftaleina dalla nota intensa colorazione rossa, e quello di Adler, secondo il quale una soluzione acetica di benzidina in presenza di sangue e di H_2O_2 assume una intensissima colorazione azzurra, probabilmente per la formazione di un chinidrone [3].

Ho voluto verificare sopra i composti ematoidi di ferro nelle piante, il valore dei metodi usati con tanto successo per il sangue.

Più che ricorrere all'uso di soluzioni o di sospensioni in provette ho trovato utile fare assorbire una goccia di materiale in esame da carta da filtro, aggiungendovi poi i reattivi; si aveva così una reazione assai netta e pronta, e si poteva così operare anche su liquidi fortemente colorati. All'acqua ossigenata ho spesso sostituito l'essenza di trementina.

a) Una prima serie di saggi sopra i diversi derivati ferriferi delle piante ebbe costantemente risultato negativo, o talora si notarono reazioni così tenui da potersi considerare negative.

Tali risultati negativi si ebbero sia dal derivato ottenuto operando come nella preparazione dell'emina di Mörner, sia col materiale ottenuto estraendo

(1) Lavoro eseguito nel R. Orto botanico di Torino.

(2) Pervenuta all'Accademia il 15 agosto 1919.

(3) Al valore di queste reazioni per la ricerca del sangue sono state mosse da S. Sartory (Compt. Rend. Soc. biol., Paris 1911, tom. 70, pagg. 961, 993, 1031) alcune obbiezioni, delle quali quanto si dirà in queste pagine costituisce in parte una conferma.

le piante con soluzioni alcaline, e quindi di tipo ematinico, sia infine dai derivati dalla fusione con KOH a 200°-220°.

Prove di confronto eseguite su derivati di sangue ottenuti nelle medesime condizioni, hanno invece dato costantemente risultato positivo.

La netta differenza di comportamento tra i due tipi di composti potrebbe far pensare ad una altrettanto distinta loro costituzione, ciò che sarebbe in contrasto con tutte le analogie precedentemente considerate. Ma tale ipotesi non è attendibile.

Osservo anzitutto che la proprietà perossidasica del sangue non è dovuta al legame del ferro con la molecola organica, quale si ritiene esista nell'emoglobina, poichè essa permane anche quando, con la formazione di ematina, si altera tale legame; nè è dovuta all'associazione del gruppo cromoforo con la globina, perchè permane nell'emina, e permane altresì dopo che, col riscaldamento prolungato con KOH a temperatura elevata, si sono disgregati profondamente i gruppi atomici riuniti attorno agli anelli pirrolici.

Del resto, anche i derivati vegetali più volte descritti in queste Note, se riscaldati con KOH al di sopra di 300° C, dànno un residuo carbonioso che, spappolato in acqua, reagisce positivamente con benzidina e H_2O_2.

Questo composto, certamente non più ematoide, che ne risulta, si ricollega al tannato, al solfocianuro e al ferrocianuro di ferro, e a quei composti di ferro tutt'altro che ematoidi, i quali, sotto l'azione di H_2O_2, ossidano l'idrochinone, il guaiacolo, la benzidina e la fenolftalina [1].

Si hanno cioè nuovi argomenti a convalidare l'affermazione di Bertrand [2] che l'azione perossidasica presentata dal sangue non sia dovuta a proprietà peculiari a questo, ma alla presenza di composti di ferro, attivi forse più per il loro stato fisico che non per la loro forma di combinazione.

La mancata analogia di comportamento tra i miei composti ematoidi delle piante e quelli ferriferi del sangue, non ha perciò alcun valore per giudicarne l'affinità.

b) Se si opera non più con preparati ematoidi più o meno puri, ma con frammenti o sezioni di vegetali freschi, si osserva quasi costantemente una reazione positiva che talora è di straordinaria intensità; tale reazione, ma più debole, ha luogo anche con materiali essiccati all'ombra o con succo cellulare spremuto da vegetali freschi stati sottoposti all'azione dei vapori di etere o di cloroformio, o con estratti di piante secche, e trattate con soluzione diluita di NH_3, o con acqua, nella quale sia stata disciolta un po' di piridina; si verifica spesso anche dopo azione dell'acqua bollente e dopo permanenza per più giorni in formalina.

[1] Stoecklin E., Compt. Rend., Paris 1908, tom. 147, pag. 1489; 1911, tom. 152, pag. 1586

[2] Bertrand et Ragozinski, Compt. Rend. 1919, tom. 152, pag. 148.

All'incontro, il trattamento con acidi (soluz. acquosa di acido acetico o di HCl; alcool acido per acido acetico, soluzione picrico-alcoolica), spesso annulla in pochi minuti le proprietà in discorso sia nell'estratto, sia nel tessuto vegetale così trattato. Così pure una leggera acidificazione del liquido ammoniacale o piridico, che pur dava prima reazione positiva, esercita azione inibitrice o rallentante sulla reazione ossidante.

Si tratta qui evidentemente di una perossidasi. Di tali enzimi è infatti nota la particolare resistenza verso il calore e verso alcuni agenti, quali la formaldeide, che sono esiziali ad altri enzimi. A dirimere ogni dubbio vale poi la coincidenza delle reazioni di Mayer e di Adler con le note reazioni all'idrochinone, al guaiacolo, all'acido pirogallico ecc.

È anzi da rilevare come il reattivo alla benzidina sia assai migliore e più sensibile di tutti quelli finora proposti per le ricerche delle perossidasi; l'intensità della colorazione da esso determinata, la persistenza di essa per un tempo abbastanza lungo per permettere un accurato apprezzamento dei risultati, consigliano a considerarlo come il reagente più adatto per studiare la localizzazione di tali enzimi nelle piante.

Ho già altra volta studiato a lungo ossidasi e ossigenasi nelle piante palustri, ed alcuni controlli eseguiti col nuovo reattivo mi hanno permesso di confermarne e di affinarne i risultati. Così nella *Lemna minor* e nella *polyrrhiza* la perossidasi è abbondantissima nelle cellule della pagina inferiore a contatto con l'acqua, e nelle radici; nelle radici di *Cicuta virosa* l'enzima è presente nelle cellule sottoepidermiche e specialmente presso le bozze delle nuove radici, nonchè nelle pareti delle lacune; nei canali aeriferi delle foglie di *Nelumbium speciosum* le pareti di tali lacune e le superficie dei numerosi peli che la tappezzano contengono perossidasi. Nella *Cicuta* come nel *Nelumbium*, nella *Nymphaea* come nel *Potamogeton crispus*, la parte liberiana dei fasci è pure ricca di perossidasi.

In piante terrestri (radici di *Astragalus aristatus*, rami di *Celtis australis* e di *Sorbus Aucuparia*, cauli di *Polygonum cuspidatum* e culmi di graminacee, picciuoli di felci e stami di campanule), troviamo, pur lasciando da parte fatti particolari che verranno trattati in altra occasione, due ordini di localizzazione delle perossidasi: l'una periferica nelle cellule sottoepidermiche delle corteccie, in quelle dei giovani germogli di *Avena planiculmis*, e dei cauli del *Polygonum cuspidatum*; l'altra assile rappresentata dalla porzione liberiana dei fasci fibrovascolari e dai raggi midollari del tessuto legnoso.

Nei tessuti giovani può anche essere interessato il tessuto fondamentale (germogli di *Avena planiculmis*, cauli di ciperoidee); e appartengono a manifestazioni del tessuto fondamentale le lievi reazioni di perossidasi presentate dal midollo di alcune specie legnose, e dai raggi midollari.

Un più minuto esame alle singole cellule portatrici di perossidasi ne fa rilevare la presenza non tanto nel plasma cellulare quanto nella mem-

brana: e in queste con particolare preferenza, a quanto sembra, nella lamella mediana; ciò ho potuto constatare con particolare nettezza nella *Lemna* e nel *Sorbus Aucuparia.* Una conferma di tale localizzazione nelle membrane si ha nel fatto che il succo cellulare estratto per pressione, secondo il metodo Giglioli, dopo narcosi cloroformica, fornisce un materiale assai povero di enzima, mentre il rendimento è assai maggiore se il residuo della pressione viene trattato con soluzione assai diluita di NH_3 [1].

Conchiudendo, farò rilevare l'uniformità, in un grandissimo numero di piante, dei due tipi di localizzazione di tali enzimi, l'una periferica (periferia dell'organo, periferia della singola cellula), l'altra di conduzione lungo il sistema liberiano e lungo i raggi midollari.

Le perossidasi sono assai scarse nei tessuti verdi.

Se, partendo per es. dal *Polygonum cuspidatum*, mediante estrazione con NH_3 diluita e precipitazione con tartrato acido di potassio si prepara del materiale di tipo ematinoide, e lo si purifica con successive dissoluzioni e riprecipitazioni, si osserva che, mentre le soluzioni madri si vanno facendo sempre più povere di perossidasi, il precipitato ematinoide conserva in grado notevole la proprietà di agire come ossidante con i perossidi, specialmente se prima del saggio venne neutralizzata l'acidità con vapori di NH_3.

Con l'essiccamento, in specie se prolungato e avvenuto in mezzo acido, le proprietà perossidasiche si attenuano e si annullano.

c) Quali sono dunque le relazioni tra i composti ematoidi e le perossidasi nelle piante?

Operando mediante precipitazione frazionata con alcool sul succo cellulare ottenuto per narcosi e pressione, oppure operando con alcool su estratti alcalini di vegetali, o acidificando frazionatamente gli estratti alcalini, mai ho ottenuto precipitati aventi proprietà perossidasiche, e privi di ferro.

Io sarei pertanto portato ad accostarmi alla nota ipotesi di Bertrand, secondo la quale la proprietà degli enzimi perossidanti sarebbe dovuta al ferro; mi verrei così ad allontanare dall'altrettanto conosciuta ipotesi di Bach, il quale ritiene l'attività enzimatica indipendente dall'elemento metallico. Ma astenendomi per ora dall'emettere giudizii sul problema della costituzione e della fisiologia delle perossidasi nelle piante, che spero di trattare un'altra volta, io ritengo che si possa spiegare altrimenti il comportamento dei vegetali rispetto ai perossidi e al loro contenuto in composti ematoidi.

Studiando altre volte i composti di ferro nelle piante palustri, ho dimostrato esistere nelle piante stesse diverse forme di combinazione del ferro, variabili da alcuni tannati, evidentemente formatisi per combinazione del

[1] Anche la reazione del guaiacolo, del resto, malgrado la sua scarsa sensibilità e la tendenza del reattivo a riunirsi in goccioline, allorchè si aggiunge H_2O_2 fa rilevare, sebbene con difficoltà, la presenza di perossidasi nelle membrane.

tannino col ferro del limo circostante, a composti di origine completamente cellulare, aventi il ferro labilmente legato alla molecola organica, fino a composti aventi tale elemento assai stabilmente legato, tanto da non essere riconosciuto che dopo incinerazione della sostanza organica.

Ora, se si fanno bollire per qualche tempo delle lemne, o delle foglie di *Nuphar* con HCl diluitissimo, si ottiene una soluzione attivissima come perossidasi e che non è certo un enzima; i tessuti che ne residuano contengono ancora ferro di tipo ematoide, che si lascia estrarre, almeno in parte, mediante NH_3 o con soluzione alcoolica di acido picrico.

All'incontro, se con ripetuti trattamenti con NH_3 si cerca di estrarre i composti di ferro, rimane sempre nel tessuto vegetale, un residuo insolubile negli alcali diluiti, che reagisce intensamente con i perossidi e ricco di ferro.

Io ho altresì cercato di incinerare delle sezioni o delle intere piantine di *Lemna*, o delle sezioni di rami di *Sorbus Aucuparia*, con la maggiore delicatezza, in modo che il residuo minerale rimanesse così poco alterato da riprodurre ancora la primitiva struttura del tessuto vivente. Ponendo poi tali residui su un portaoggetti in una soluzione diluita di celloidina, che poi si fa indurire, si ha, dopo evaporazione dei solventi, un materiale che sopporta abbastanza bene l'azione di una soluzione diluita di HCl e di ferrocianuro di potassio. Ripetendo molte volte i saggi, si può cogliere la localizzazione del ferro almeno delle maggiori concentrazioni ferrifere, e, tenendo presente la localizzazione delle perossidasi, si può constatare l'identità dello due localizzazioni.

A mio avviso è perciò da ritenere che nelle piante la funzione perossidasica sia nel maggior numero dei casi sostenuta, oltre che da veri e proprii enzimi, anche da combinazioni svariate di ferro, probabilmente prodotti di catabolismo dei composti più elevati e complessi, quali quelli ematoidi, combinazioni per la maggior parte incrostanti le membrane cellulari, e che per il loro stato fisico, sono atte ad agire tra le sostanze ossidabili ed i perossidi [1].

Che lo stato fisico debba avere importanza in ciò, lo dimostra la perdita delle proprietà perossidasiche che ha luogo con l'essiccamento; oltre i fatti già citati, posso ricordare che il tannato di ferro della *Trapa natans*, di fresco ottenuto, è attivo, mentre perde ogni attività dopo qualche anno di essiccamento.

[1] Il comportamento di tali composti ferriferi rispetto agli acidi forti, l'aumento della capacità a reagire quanto meno il ferro è ionizzato, e specialmente l'aumentare in quei composti nei quali non sostituisce più nella molecola organica i ioni H, fanno rientrare questi nel gruppo dei composti che si possono denominare pseudoperossidasi considerate da Colin e Senechal (Rev. Gen. de Bot. 1912, T. XXIV, pag. 49).

Patologia vegetale. — *Esperienze intorno alla carie (Til Caries) del frumento.* Nota del dott. NAZARENO STRAMPELLI, presentata dal Socio G. CUBONI [1].

La forte infezione di carie, verificatasi nel 1918 in molti campi di frumento delle varie regioni italiane, faceva prevedere che il malanno, anzichè arrestarsi, si sarebbe intensificato e maggiormente diffuso specialmente in Puglia per opera del vento che trasporta e semina a distanza le numerose spore uscenti, dalle trebbie in azione, sotto forma di brune e fetide nubi. Naturalmente ciò non poteva non preoccupare quanti hanno a cuore la produzione frumentaria del nostro Paese. Io, avendo notato che il mio frumento *Apulia*, coltivato in appezzamento di circa 7 ettari, era restato completamente immune da carie, mentre le altre varietà coltivategli tutte in giro, particolarmente fra queste il *Luigia Strampelli*, erano state non lievemente attaccate, pensai di vedere sperimentalmente se tale differenza fosse dovuta al caso, o se esistesse diversità di recettività. rispetto a tale parassita, fra le varietà di frumento. E volli provare la « Bianchetta », il « Cervaro », il « Luigia Strampelli », il « Gregorio Mendel », le Baionette Strampelli », l' « Hizakiri », il Gentil rosso », l' « Inalettabile Vilmorin » (teneri mutici), il « Maiorca », il « Carlotta Strampelli », il « Rieti », l' « Apulia », l' « Akakomughi » (teneri aristati), il « Duro di Puglia » ed il « Dauno » (Duro).

Alla semina di ciascuna varietà fu destinato un ampio vaso di terracotta, alla superficie del cui terreno furono praticati, con piccolo caviecchio, venti fori equidistanti, profondi circa tre centimetri. Ciascun foro venne generosamente infiorato con spore di carie e, dopo ciò, furono calate in ciascun foro le cariossidi delle varietà di frumento corrispondenti al numero del vaso. Nessuno dei semi, *così*, non poteva non trovarsi, al momento della germinazione, a contatto immediato con le spore della carie.

A maturazione si contarono, per ciascuna varietà, le piante infette e quelle immuni, come anche furono contate le cariossidi sane separate da quelle cariate, e si ottennero le percentuali seguenti:

Per la « Bianchetta »	piante	sane	26.30 %	cariossidi	sane	25.50 %
» il « Cervaro »	»	»	10.60 »	»	»	5.22 »
» il « Luigia Strampelli »	»	»	0.00 »	»	»	1.03 »
» il « Gregorio Mendel »	»	»	45.00 »	»	»	40.70 »

[1] Pervenuta all'Accademia il 19 settembre 1919.

Per le « Baionette Strampelli »	piante sane	20.00 %	carrossidi sane	12.60 %
» l' « Hizakiri »	» »	5.00 »	» »	10,97 »
» il « Gentil rosso »	» »	10.50 »	» »	10.80 »
» l' « Inalettabile Vilmorin »	» »	15.00 »	» »	18.30 »
» la « Maiorca »	» »	10.00 »	» »	10.15 »
» il « Carlotta Strampelli »	» »	42.10 »	» »	36.20 »
» il « Rieti »	» »	10.60 »	» »	10.20 »
» l' « Apulia »	» »	43.75 »	» »	41.26 »
» l' « Akakomughi »	» »	13.60 »	» »	5.55 »
» il « Duro di Puglia »	» »	15.00 »	» »	13.90 »
» il « Dauno »	» »	0.00 »	» »	0.00 »

Dai sopra riportati dati, chiaramente si vede come le diverse varietà di frumenti siano attaccate con varia intensità dal parassita che ci preoccupa. E volendo fare una scala, in base a tali dati ed in merito alla resistenza presentata dalle varietà sperimentate, essa sarebbe la seguente:

1. « Gregorio Mendel » (45.00 % piante sane)
2. « Apulia » (43.75 » » »)
3. « Carlotta Strampelli » (42.10 » » »)
4. « Bianchetta » (26.30 » » »)
5. « Baionette Strampelli » (20.00 » » »)
6. « Inalettabile Vilmorin » e « Duro di Puglia ».
7. « Akakomughi ».
8. « Cervaro », « Rieti », « Maiorca », « Gentil rosso ».
9. « Hizakiri ».
10. « Dauno » e « Luigia Strampelli ».

Contemporaneamente alle prove sulla varia recettività presentata dai diversi frumenti, volli vedere se la posizione delle spore nel terreno, in rispetto a quella della semente, influisse sulla possibilità o meno dell'attacco del parassita. Per tali prove, scelsi il frumento « Luigia Strampelli », che seminai in tre vasi nei modi seguenti:

Nel primo, 20 cariossidi, distribuite uniformemente, vennero ricoperte con uno strato di 3 centimetri di terreno, alla superficie del quale furono sparse in gran copia spore di carie.

Nel secondo vaso, empito con terra sino a due terzi della sua altezza, si spolverò con spore di carie tanto abbondantemente da rendere nera la superficie di questo primo strato di terreno, sul quale, poi, venne posto un altro strato di terra, alto 6 centimetri; su questo furono seminate 20 cariossidi di frumento, che vennero ricoperte con 3 centimetri di terra.

Nel terzo vaso, dopo aver posto terra sino ad $^1/_3$ della altezza di esso,

si praticò lo spolveramento con spore di carie come al numero 2; e poi venne messo un secondo strato di terra, dello spessore di 14 cm., sul quale furono seminate 20 cariossidi, anch'esse ricoperte con i soliti 3 cm. di terra.

Per controllo, mi valsi del vaso di « Luigia Strampelli » seminato in fori infettati nel modo come più sopra si è esposto. A maturazione, si contarono tanto le piante quanto le cariossidi sane, distinte da quelle cariate, e si ebbero le seguenti percentuali:

1. Infezione praticata alla superficie del terreno dopo le semine e la ricopertura delle semente, con 3 centimetri di terra.	piante sane	90 %,	cariossidi sane	82.20 %
2. Infezione praticata nel terreno ad uno strato di 6 cent. sotto i semi.	» »	100 »	» »	100.00 »
3. Infezione praticata al terreno nello strato a 14 cent. sotto i semi	» »	100 »	» »	100.00 »
4. Vaso di confronto, ossia semina in fori infettati.	» »	00 »	» »	1.03 »

Mentre l'infezione è riuscita completamente nella semina di cariossidi a contatto con le spore, appena si è frapposto fra queste ed i semi uno strato di terreno di soli 3 centimetri (infezione praticata alla superficie del suolo) le piante sane sono salite al 90 %. Il 10 % di piante cariate devesi indubbiamente attribuire al fatto che alcune spore, per opera dell'acqua di irrorazione, sono state dalla superficie del terreno trascinate a contatto con i semi. Nelle infezioni praticate negli strati al di sotto dei semi l'attacco è stato completamente nullo.

Ciò evidentemente conferma come, perchè la carie possa attaccare le giovani pianticine, occorre che le spore di essa siano in immediato contatto coi semi in germinazione. E quindi, oltre all'abbruciamento delle stoppie e al trattamento cuprico delle sementi, è consigliabile anche un'aratura abbastanza profonda da praticarsi come preparazione del terreno alla semina del grano, per portare più lontano possibile dal contatto con i semi le spore che dal vento furono sparse alla superficie del suolo, ed inoltre non dovrà trascurarsi di dar preferenza a quelle varietà di frumenti che presentino la minore recettività al parassita in parola.

E. M.

ERRATA-CORRIGE

A pag. 57 e 58. nella seconda colonna della tabella, dove è stampato *estratto di cieche* leggasi *siero di anguilla*.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1919.

(*Segue in terza pagina*)

E. Mancini *Segretario d'ufficio responsabile.*

Pubblicazione bimensile. **N. 5-8.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXVIII.° — Fascicoli 5°-8°

2° Semestre.

Comunicazioni pervenute all'Accademia durante le ferie del 1919.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili del l'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 9 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a pagine 4 $^1/_2$.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 30 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta a stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 50 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 30 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1919.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

Matematica. — *Sulle superficie spirali.* Nota I del Socio LUIGI BIANCHI [1].

1. È noto che le superficie spirali di S. Lie godono, secondo Maurice Lévy, insieme alle loro deformate per flessione di proprietà assimilabili a quelle delle deformate delle superficie di rotazione [2]. Nella presente Nota si introducono le superficie spirali, e le loro deformate, dalla risoluzione del seguente problema della teoria delle deformazioni infinitesime per le superficie flessibili ed inestendibili:

Trovare le superficie S (*non sviluppabili*) *che ammettono una funzione caratteristica* φ *per le deformazioni infinitesime, fissa in tutte le flessioni della superficie.*

Si vedrà che, oltre la classe ben nota delle deformate delle superficie di rotazione (per le quali le deformazioni infinitesime in discorso sono quelle che le fanno strisciare in se stesse), esiste un'altra sola soluzione del problema, data appunto dalle superficie applicabili sulle spirali.

[1] Pervenuta all'Accademia il 18 ottobre 1919.

[2] Cfr. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Ière Partie (2ème édition, 1914, § 90 ss.).

Si sa che per ogni speciale configurazione di una superficie S, definita dalle sue due forme quadratiche fondamentali

$$\begin{cases} E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \\ D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2, \end{cases}$$

le funzioni φ caratteristiche delle deformazioni infinitesime sono le soluzioni dell'equazione di Weingarten [1]

$$\text{(A)} \quad \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''\frac{\partial\varphi}{\partial u} - D'\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{K\sqrt{EG-F^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D\frac{\partial\varphi}{\partial v} - D'\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{K\sqrt{EG-F^2}}\right)\right\} + \frac{ED''+GD-2FD'}{EG-F^2}\,\varphi = 0,$$

dove K indica la curvatura (non nulla) della superficie.

Per la risoluzione del problema enunciato conviene porre questa equazione sotto un'altra forma facendo sparire le derivate di D, D', D''. Ponendo

$$\Delta = \frac{D}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad \Delta' = \frac{D'}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad \Delta'' = \frac{D''}{\sqrt{EG-F^2}},$$

scriviamo la (A) nel modo seguente:

$$K\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{1}{K}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\Delta'' - \frac{1}{K}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\Delta'\right\} + K\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{1}{K}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\Delta - \frac{1}{K}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta'\right\} + (E\Delta'' + G\Delta - EF\Delta')\,\varphi = 0;$$

eseguendo parzialmente le integrazioni coll'aver riguardo alle formole di Codazzi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Delta'}{\partial u} - \dfrac{\partial\Delta}{\partial v} = \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\Delta - 2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\Delta' + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\Delta'' \\ \dfrac{\partial\Delta'}{\partial v} - \dfrac{\partial\Delta''}{\partial u} = \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\Delta - 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\Delta' + \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\Delta'', \end{cases}$$

si trova la nuova forma richiesta

$$\text{(A*)} \quad \Delta''\left\{\varphi_{11} + KE\varphi - \frac{\partial\log K}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right\} - 2\Delta'\left\{\varphi_{12} + KF\varphi - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\log K}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\log K}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\right\} + \Delta\left\{\varphi_{22} + KG\varphi - \frac{\partial\log K}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\} = 0,$$

[1] Vedi le mie *Lezioni di geometria differenziale*, vol. II, § 224 ss.

dove $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{22}$ sono le derivate seconde covarianti di φ rispetto alla prima forma fondamentale [1].

2. Supponiamo ora che esista per la superficie S una funzione caratteristica *fissa* per tutte le configurazioni che la S assume per flessione. In tal caso la relazione (A*), lineare omogenea in $\Delta, \Delta', \Delta''$ dovrà necessariamente ridursi ad una identità, annullandosi i coefficienti di $\Delta, \Delta', \Delta''$ [2].

La questione proposta è così ridotta alla ricerca di quelle forme del ds^2 per le quali esistono soluzioni comuni alle tre seguenti equazioni del secondo ordine:

$$(1)\quad \begin{cases} \varphi_{11} = \dfrac{\partial \log K}{\partial u}\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} - KE\varphi \\[2mm] \varphi_{12} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \log K}{\partial v}\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + \dfrac{\partial \log K}{\partial u}\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\right) - KF\varphi \\[2mm] \varphi_{22} = \dfrac{\partial \log K}{\partial v}\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} - KG\varphi . \end{cases}$$

Queste possono anche compendiarsi nella formola

$$\varphi_{11}\, du^2 + 2\varphi_{12}\, du\, dv + \varphi_{22}\, dv^2 =$$
$$= d \log K\, d\varphi - K(E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2),$$

che ne pone meglio in evidenza la natura *invariantiva*.

Siccome φ non può ridursi ad una costante [altrimenti dalle (1) si avrebbe $K = 0$ contro l'ipotesi], possiamo semplificare la ricerca assumendo a linee coordinate $u =$ cost. le linee $\varphi =$ cost., e le loro trajettorie ortogonali come $v =$ cost. Così avremo

$$F = 0 \quad , \quad \varphi = \varphi(u) \text{ (funzione di } u);$$

e le (1), sostituendo ai simboli di Christoffel i loro valori effettivi, diventano ordinatamente

$$(2)\quad \begin{cases} \varphi'' - \dfrac{1}{2E}\dfrac{\partial E}{\partial u}\varphi' - \dfrac{1}{K}\dfrac{\partial K}{\partial u}\varphi' + KE\varphi = 0 \\[2mm] \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{E}\dfrac{\partial E}{\partial v} + \dfrac{1}{K}\dfrac{\partial K}{\partial v}\right)\varphi' = 0 \\[2mm] \dfrac{1}{2E}\dfrac{\partial G}{\partial u}\varphi' + KG\varphi = 0 , \end{cases}$$

[1] I valori effettivi sono

$$\varphi_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

$$\varphi_{12} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} - \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

$$\varphi_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} - \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial \varphi}{\partial v} .$$

[2] Cfr. *Lezioni*, vol. II, § 254.

gli accenti avendo il solito significato di derivazione. La media di queste, non essendo nulla φ', equivale alla

$$\frac{\partial}{\partial v}(\mathrm{KE})=0,$$

e dà

$$\mathrm{KE}=f(u) \quad \text{(funzione di } u\text{)}; \tag{3}$$

indi dalla terza risulta

$$\frac{\partial \log \sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}=-\frac{f\varphi}{\varphi'}, \tag{4}$$

cioè $\sqrt{\mathrm{G}}$ è il prodotto di due funzioni: l'una di u, l'altra di v; e la seconda di queste, disponendo del parametro v, può farsi costante, onde avremo

$$\sqrt{\mathrm{G}}=\mathrm{U} \quad \text{(funzione di } u\text{)}, \tag{5}$$

e sarà, per la (4),

$$\varphi'=-\frac{f\mathrm{U}}{\mathrm{U}'}\varphi. \tag{6}$$

Ora la prima delle (2), osservando che per la (3)

$$\frac{\partial \log \mathrm{K}}{\partial u}=\frac{f'}{f}-\frac{1}{\mathrm{E}}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u},$$

diventa

$$\varphi''+\frac{\partial \log \sqrt{\mathrm{E}}}{\partial u}\varphi'-\frac{f'}{f}\varphi'=f\varphi=0, \tag{7}$$

dalla quale segue che anche $\frac{\partial \log \sqrt{\mathrm{E}}}{\partial u}$ è funzione di u soltanto; indi, disponendo del parametro u, potremo rendere

$$\sqrt{\mathrm{E}}=\mathrm{V} \quad \text{(funzione di } v\text{)}.$$

Ma dalla (7), osservando che dalla (6) derivando segue

$$\varphi''=\left(\frac{f^2\mathrm{U}^2}{\mathrm{U}'^2}-f+\frac{f\mathrm{U}\mathrm{U}''}{\mathrm{U}'^2}-\frac{f'\mathrm{U}}{\mathrm{U}'}\right)\cdot\varphi,$$

deduciamo

$$f\mathrm{U}(\mathrm{U}''+f\mathrm{U})=0;$$

e siccome il primo fattore $f\mathrm{U}$ non può annullarsi, avremo

$$f=-\frac{\mathrm{U}''}{\mathrm{U}},$$

onde la (6) e la (3) daranno

$$(8) \qquad \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{U''}{U'}$$

$$(8^*) \qquad K = -\frac{U''}{UV^2}.$$

D'altra parte il nostro ds^2 ha la forma

$$ds^2 = V^2 du^2 + U^2 dv^2,$$

e la sua curvatura K è data da

$$K = -\frac{UU'' + VV''}{U^2 V^2};$$

sicchè, paragonando colla (8*), risulta $V'' = 0$ e quindi

$$V = av + b,$$

con a, b costanti.

Viceversa, se il ds^2 ha la forma

$$(9) \qquad ds^2 = (av + b)^2 du^2 + U^2 dv^2,$$

i calcoli eseguiti dimostrano che basta prendere φ in guisa da soddisfare la (8), cioè

$$\varphi = c U' \quad (c \text{ costante}),$$

e questa φ soddisfa al sistema (1), indi all'equazione caratteristica (A) di Weingarten in tutte le configurazioni di una superficie S d'elemento lineare (9).

Ora due casi sono da distinguersi, secondo che nella (9) la costante a è nulla, oppure diversa da zero. Nel primo caso si può fare $b = 1$ e si ha il ds^2 tipico delle superficie di rotazione; nel secondo è lecito fare $a = 1$, $b = 0$ e si ha l'altra forma tipica del ds^2:

$$ds^2 = v^2 du^2 + U^2 dv^2,$$

che appartiene (Darboux, loc. cit.) a tutte e sole le superficie spirali. Concludiamo quindi:

Esistono due sole classi di superficie applicabili con funzione caratteristica φ fissa in tutte le deformazioni della superficie, e sono:

1° *le deformate delle superficie di rotazione con*

$$(I) \qquad ds^2 = du^2 + U^2 dv^2;$$

2° *le deformate delle superficie spirali con*

$$(II) \qquad ds^2 = v^2 du^2 + U^2 dv^2,$$

ed ambedue le volte $\varphi = \mathrm{U}'$ *è funzione caratteristica fissa in tutte le deformazioni.*

3. Lasciando da parte il primo caso ben noto (I), proseguiamo nel secondo caso (II) lo studio delle corrispondenti deformazioni infinitesime. In generale si sa che ad ogni soluzione φ dell'equazione (A) di Weingarten corrisponde (a meno di una traslazione) una deformazione infinitesima di S, le cui componenti

$$\varepsilon\bar{x}\ ,\ \varepsilon\bar{y}\ ,\ \varepsilon\bar{z}\quad (\varepsilon \text{ costante infinitesima})$$

si calcolano per quadrature dalle formole

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} &= \frac{\left(\mathrm{D}\dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial v} - \mathrm{D}'\dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial u}\right)\varphi + \left(\mathrm{D}'\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} - \mathrm{D}\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\right)\mathrm{X}}{\mathrm{K}\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}} \\
\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} &= \frac{\left(\mathrm{D}'\dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial v} - \mathrm{D}''\dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial u}\right)\varphi + \left(\mathrm{D}''\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} - \mathrm{D}'\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\right)\mathrm{X}}{\mathrm{K}\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\ ,
\end{aligned}\right.$$

ed analoghe per $\bar{y}, \bar{z}$, alle quali possiamo dare la forma equivalente

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} &= \frac{\mathrm{F}\dfrac{\partial x}{\partial u} - \mathrm{E}\dfrac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\varphi + \frac{\mathrm{D}'\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} - \mathrm{D}\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}}{\mathrm{K}\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\mathrm{X} \\
\frac{\partial \bar{x}}{\partial v} &= \frac{\mathrm{G}\dfrac{\partial x}{\partial u} - \mathrm{F}\dfrac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\varphi + \frac{\mathrm{D}''\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} - \mathrm{D}'\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}}{\mathrm{K}\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\mathrm{X}\,.
\end{aligned}\right.$$

Interpretando $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ come coordinate di un punto nello spazio, questo punto $\bar{\mathrm{P}} \equiv (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ descrive la superficie $\bar{\mathrm{S}}$ corrispondente per ortogonalità di elementi alla S ed individuata dalla funzione caratteristica φ.

Se applichiamo le formole (10) al nostro caso (II), ponendovi $\varphi = \mathrm{U}'$, troviamo

$$(11)\qquad \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = -\frac{\mathrm{U}'v}{\mathrm{U}}\frac{\partial x}{\partial v} - \mathrm{D}'v\mathrm{X}\ ,\quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = \frac{\mathrm{UU}'}{v}\frac{\partial x}{\partial u} - \mathrm{D}''v\mathrm{X}\,.$$

Ma dalle formole fondamentali

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} &= \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial v} + \mathrm{D}'\mathrm{X} \\
\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial v} + \mathrm{D}''\mathrm{X}
\end{aligned}\right.$$

si ha

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}&=\frac{1}{v}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{U'}{U}\frac{\partial x}{\partial v}+D'X\\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}&=-\frac{UU'}{v^2}\frac{\partial x}{\partial u}+D''X,\end{aligned}\right.$$

onde le (11) si scrivono

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}=\frac{\partial x}{\partial u}-v\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\quad,\quad\frac{\partial \bar{x}}{\partial v}=-v\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}.$$

Sotto questa forma la loro integrazione è immediata; e disponendo delle costanti additive in $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, possiamo prendere

$$(12)\qquad \bar{x}=x-v\frac{\partial x}{\partial v}\quad,\quad\bar{y}=y-v\frac{\partial y}{\partial v}\quad,\quad\bar{z}=z-v\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Il punto $\bar{P}\equiv(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ risulta situato nel piano tangente in P alla superficie S; e poichè la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_v}$ delle linee $v=$ cost. è data, in grandezza e segno, da

$$\frac{1}{\rho_v}=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}=-\frac{1}{Uv},$$

si vede che $\bar{P}$ coincide col centro di curvatura geodetica delle linee $v=$ cost. Abbiamo dunque il risultato:

Se per una superficie S *d'elemento lineare* (II)

$$ds^2=v^2\,du^2+U^2\,dv^2$$

si considera la superficie $\bar{S}$ *luogo dei centri di curvatura geodetica delle linee* $v=$ cost., *questa* $\bar{S}$ *corrisponde per ortogonalità d'elementi alla* S, *e la funzione* φ *caratteristica della relativa deformazione infinitesima è data da* $\varphi=U'$.

È manifesto che in questo caso, deformando comunque la superficie S che trasporti eco rigidamente i segmenti tangenti $P\bar{P}$, la superficie $\bar{S}$ luogo degli estremi $\bar{P}$ corrisponde sempre per ortogonalità d'elementi alla S.

4. La proprietà ora segnalata per le deformate delle superficie spirali è tanto più notevole che essa è esclusiva per queste superficie, come viene espresso dalla proposizione seguente:

Se due superficie S, $\bar{S}$ *si corrispondono per ortogonalità d'elementi, ed ogni punto* $\bar{P}$ *di* $\bar{S}$ *giace nel piano tangente nel punto corrispondente* P *alla* S, *questa* S *è applicabile sopra una superficie spirale e la* $\bar{S}$ *è il luogo dei centri di curvatura geodetica delle trajettorie ortogonali delle linee inviluppate sulla* S *dai segmenti* $\Gamma\bar{P}$.

Per la dimostrazione prendasi a sistema coordinato sopra S un sistema ortogonale (u, v) nel quale le linee $u = \text{cost.}$ siano quelle inviluppate sulla S dai detti segmenti $P\overline{P}$. Colle consuete notazioni [1], posto $T = \overline{P\overline{P}}$, potremo scrivere

$$\bar{x} = x + TX_2 \ , \ \bar{y} = y + TY_2 \ , \ \bar{z} = z + TZ_2 ,$$

e di qui, derivando, abbiamo

$$(13) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \left(\sqrt{E} + \dfrac{T}{\sqrt{G}} \dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right) X_1 + \dfrac{\partial T}{\partial u} X_2 + T \dfrac{D'}{\sqrt{G}} X_3 \\[2ex] \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial u} = -\dfrac{T}{\sqrt{E}} \dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_1 + \left(\dfrac{\partial T}{\partial v} + \sqrt{G}\right) X_2 + T \dfrac{D''}{\sqrt{G}} X_3 . \end{cases}$$

L'ipotesi che $S, \bar{S}$ si corrispondano per ortogonalità di elementi si traduce nelle tre condizioni

$$SX_1 \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = 0 \ , \ SX_2 \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = 0 \ , \ \sqrt{E}\, SX_1 \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} + \sqrt{G}\, SX_2 \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = 0 ,$$

che, calcolate colle (13), diventano

$$(14) \quad \sqrt{E} + \frac{T}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = 0 \ , \ \frac{\partial T}{\partial v} + \sqrt{G} = 0 \ , \ \sqrt{G} \frac{\partial T}{\partial u} - T \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = 0 .$$

Intanto, non figurando in queste formole D, D', D'', si vede che la proprietà, supposta in una configurazione di S, si mantiene per tutte.

Ora la prima delle (14) dà

$$\frac{1}{T} = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = \frac{1}{\rho_v} ;$$

dunque: $\overline{P}$ *è il centro di curvatura geodetica delle linee* $v = \text{cost.}$ Dalla terza segue

$$T = V \sqrt{G} ,$$

con V funzione di v; e successivamente, dalla seconda,

$$(15) \quad \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial v} = -\frac{V' + 1}{V} .$$

Dunque $\sqrt{G}$ è il prodotto di una funzione di u per una funzione di v, e la seconda di queste può farsi eguale a una costante; così abbiamo

$$\sqrt{G} = U .$$

[1] Cfr. particolarmente *Lezioni*, vol. II, pag. 91.

Allora, dalla (15),

$$V' = -1,$$

e, integrando, possiamo prendere $V = -v$, indi

$$T = -v\sqrt{G} = -Uv,$$

e, in fine, dalla prima delle (14) abbiamo

$$\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} = \frac{1}{v}.$$

Così $\sqrt{E} = v\psi(u)$; e, cangiando il parametro u, possiamo fare $\sqrt{E} = v$, ritornando alla forma caratteristica (II) del ds^2 per le superficie spirali.

La nostra proposizione è stabilita e possiamo anche enunciare i risultati sotto la forma:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie S *sia applicabile sopra una superficie spirale, è che esista una superficie* $\overline{S}$ *corrispondente alla* S *per ortogonalità d'elementi coi punti situati nei rispettivi piani tangenti di* S.

Matematica. — *Sur les ensembles effectivement énumérables et sur les définitions effectives.* Nota del Socio Emile Borel [1].

Divers géomètres, notamment M. Burali Forti, ont mis en évidence les contradictions auxquelles conduisent certaines définitions de la théorie des ensembles. Pour échapper à ces contradictions, j'ai proposé d'introduire la notion d'ensemble *effectivement énumérable.* La lecture d'un intéressant Mémoire de M. Sierpinski [2] me conduit à revenir sur cette définition et à préciser quelques points sur lesquels ma pensée n'avait pas été exprimée d'une manière suffisamment claire.

Un ensemble dénombrable, d'après Cantor, est un ensemble tel qu'une correspondance biunivoque peut exister entre ses éléments et les entiers positifs. Cette définition a été longtemps admise comme claire et l'on a raisonné sur les ensembles dénombrables *comme si*, pour chacun d'eux, on possédait effectivement une correspondance biunivoque avec les entiers positifs. Mais on s'est aperçu que l'on arrivait ainsi à des contradictions, à des paradoxes, et de nombreuses discussions ont eu lieu au sujet de ces paradoxes. J'ai montré que ces paradoxes disparaissent si l'on renonce à la

[1] Pervenuta all'Accademia il 20 ottobre 1919.

[2] *L'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la théorie des ensembles et l'analyse*, par W. Sierpinski (Bulletin de l'Académie des sciences de Cracovie, avril-mai 1918).

définition précèdente et si on la remplace par la définition de l'ensemble *effectivement énumérable*, c'est à dire de l'ensemble pour lequel on connaît *effectivement* une correspondance biunivoque avec les entiers positifs. En d'autres termes, un ensemble effectivement énumérable est un ensemble *donné sous la forme*

(1) $$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots,$$

chaque élément u_n étant connu quand on donne son rang (et inversement). Bien entendu, lorsqu'un ensemble effectivement énumérable est donné, il est possible, d'une infinité de manières, de modifier le numérotage; les ensembles effectivement énumérables ainsi obtenus sont équivalents à l'ensemble donné, mais ne lui sont pas identiques; dans certains cas même, ils ont des propriétés nettement différentes; en tous cas, il en sont logiquement distincts. Ces notions sont très loin d'être réellement nouvelles; toute la théorie classique des séries infinies repose implicitement sur elles.

Lorsque l'on admet ces définitions, il est clair qu'une infinité effectivement énumérable d'ensembles effectivement énumérables peut être mise sous la forme d'un ensemble effectivement énumérable; il suffit, pour cela, d'énoncer en termes finis l'un des procédés bien connus. D'une manière générale, les raisonnements classiques sur les ensembles dénombrables s'appliquent sans difficulté aux ensembles effectivement énumérables, à condition de prendre soin, dans chaque cas, de préciser les lois et les méthodes que l'on utilise.

Lorsque l'on veut appliquer aux ensembles dénombrables les résultats démontrés pour les ensembles effectivement énumérables, il est nécessaire de raisonner, pour chaque ensemble dénombrable, sur une correspondance supposée réalisée, c'est à dire, en définitive, de supposer l'ensemble dénombrable donné sous la forme (1). Ceci implique l'axiome de M. Zermelo; ou, tout au moins, l'axiome de M. Zermelo affirme la *possibilité abstraite* de mettre un ensemble dénombrable sous une forme telle que (1), sans donner d'ailleurs effectivement un moyen déterminé de le faire. La question principale, à mon avis, est de savoir si l'on a le droit d'appliquer à une telle suite (1) conçue abstraitement, mais non effectivement définie, les mêmes raisonnements qu'à une suite (1) effectivement donnée. L'étude des paradoxes de la théorie des ensembles, en particulier l'étude de l'ensemble des nombres qui peuvent être définis par un nombre fini de mots, semble prouver que certains raisonnements, qui ne conduisent à aucune contradiction pour les ensembles effectivement énumérables, conduisent au contraire à des contradictions lorsqu'on les applique à des ensembles dénombrables. Il ne me paraît pas douteux que les ensembles ou les correspondances « définis » au moyen de l'axiome de M. Zermelo n'ont pas les mêmes propriétés que les

ensembles et les correspondances effectivement définis: s'ils « existent », c'est d'un autre genre d'existence.

Aussi doit-on savoir gré à M. Sierpinski d'avoir énuméré d'une manière très détaillée les diverses questions dans lesquelles intervient l'axiome de M. Zermelo. Sans entrer dans le détail de cette énumération, qu'il me soit permis de remarquer que, si l'axiome de M. Zermelo intervient nécessairement dans un problème, c'est en général parce qu'il est implicitement admis dans l'énoncé même du problème; ainsi, toutes les fois qu'il est question d'ensemble dénombrable et non pas d'ensemble effectivement énumérable au sens strict du terme, l'axiome de M. Zermelo est postulé. Si l'on introduisait uniquement des êtres effectivement définis, tels que les ensembles effectivement énumérables, l'axiome de M. Zermelo n'aurait pas à intervenir, et les nouveaux énoncés obtenus, peut être plus restrictifs en apparence, auraient la même portée au point de vue des applications.

Fisica. — *Sulla gravitazione.* Nota I del Corrisp. Q. Majorana [1].

Origini della ricerca. — In un precedente lavoro [2] sulla influenza del movimento della sorgente o di uno specchio, sulla propagazione della luce, esprimevo il dubbio che fra le cause incognite, che possono influire sul fenomeno, potesse esservi anche il campo gravitazionale della nostra terra. Ciò dicevo, non perchè ragioni specifiche mi inducessero in tale dubbio, ma piuttosto per procedere completamente alla ricerca di tutte le cause stesse. Lasciando quindi da parte il primitivo problema, dopo i risultati sperimentali descritti nel suaccennato lavoro, mi son proposto sin dall'aprile 1918 di ricercare nuovi fatti sperimentali, che potessero gettar luce sulla natura intima del fenomeno gravitazionale. Scopo della presente relazione è di render conto del risultato di tale ricerca. Premetto, peraltro, che le considerazioni che qui svolgerò, ed i fatti da me ora constatati, non sembrano avere nulla di comune colla ricerca precedente; nè io ho la pretesa di voler arrivare, anche in un tempo lontano, a stabilire con tutta sicurezza un legame tra due generi tanto diversi di ricerca; solo ho voluto accennare alla occasione, che mi indusse ad intraprendere l'attuale lavoro.

Caratteri della legge di Newton. — Fra tutte le leggi fisiche conosciute, quella della gravitazione universale apparisce sinora la più perfetta, nella sua semplicità: proporzionalità *diretta* alle masse agenti, *inversa* al

[1] Pervenuta all'Accademia il 13 ottobre 1919.

[2] Vedi: questi Rendiconti, XXVI, pp. 118 e 155, an. 1917; XXVII, p. 402 anno 1918; Atti R. Acc. di Torino, LIII, p. 793, an. 1918; Phil. Mag., XXXV, p. 163, an. 1918.

quadrato delle distanze. Nessuna causa esteriore od interiore, rispetto alle masse che si considerano, si è sinora dimostrata capace di turbare, con tutta sicurezza, il rigore della legge stessa. Se anche un' influenza potesse venire ammessa, per opera delle reazioni chimiche o variazioni di temperatura manifestantisi nelle masse agenti (1), ciò potrebbe portare alla menomazione del principio della *costanza della massa*, ma non della legge di Newton, propriamente detta.

Una delle caratteristiche più speciali di questa legge, è la nessuna influenza della natura del mezzo, nella manifestazione della forza attrattiva. Come è noto, tutte le azioni naturali, per le quali si ha la possibilità di ottenere del lavoro ad una certa distanza dalla località in cui vi sia della materia, si manifestano in guisa differente al variare del mezzo interposto: così dicasi delle azioni meccaniche (propagazione di urti o vibrazioni, di semplice pressione, attraverso un mezzo materiale), delle calorifiche, delle elettriche, delle elettromagnetiche, delle luminose, dei raggi catodici ecc. In tutti questi casi, la natura del mezzo (sia questo materiale o costituito dall' ipotetico etere) ha un' importanza capitale sui fenomeni constatabili; al variare del mezzo, variano in genere, e talvolta in misura notevolissima, tanto la velocità di propagazione, quanto la entità dei fenomeni stessi.

Questo principio vale per le azioni di carattere sia statico, che dinamico. Veramente, circa le prime occorre fare una restrizione, per quanto riguarda la pressione meccanica che, come è noto, si trasmette senza mutar di valore, a traverso la materia di qualunque natura. Ma è da osservare che, in ogni modo, oltre al potersi constatare la differente velocità di propagazione, nello stabilirsi di una determinata pressione, a traverso un mezzo materiale, si sa che il mezzo *etere* non consente la propagazione della pressione meccanica.

Per la forza di gravitazione, nulla di simile si è potuto sinora constatare. Non voglio qui discutere il problema della velocità di propagazione di detta forza: se cioè quella sia dell'ordine della velocità della luce, o molto superiore. Certamente, dopo che l'*actio in distans* degli allievi di Newton (non di Newton, che mai l'ammise) fu relegata fra le cose assurde, non vi ha cultore di scienze fisiche che non pensi con convincimento al valore finito di tale velocità; la misura di esso potrebbe essere messa in evidenza da delicatissime osservazioni astronomiche, e nulla può oggi indurci a negare la generica giustezza del suo concetto. Piuttosto fermiamo la nostra attenzione sul fatto, generalmente ammesso, della *niuna influenza del mezzo sulla manifestazione statica dei fenomeni gravitazionali. Due masse, a*

(1) Come è noto, ricerche del genere hanno dato luogo a vivaci discussioni e smentite; vedi Landolt, Zeitschr. für Chemie, XII, p. 1, an. 1894; Shaw, Philosophical Transactions, R. Soc. of London 216, p. 349, an. 1916.

parità di distanza, si attirano con la stessa forza, sia nel vuoto, sia se immerse in un mezzo di densità materiale qualsiasi. Inoltre: *una sfera materiale omogenea, di determinata densità, subisce, da parte di altra massa esterna, un'attrazione direttamente proporzionale al suo volume.* E ancora: *la direzione, il senso, il valore delle forze sollecitanti due masse in presenza, non mutano, se, rimanendo immutate le altre condizioni di queste, si dispongono nella loro vicinanza altre masse, le cui azioni, su ciascuna delle prime, siano esattamente equilibrate.* Questi, ed altri teoremi simili che potrebbero enunciarsi, si traducono ancora nella negazione di un carattere speciale della materia, che potrebbe definirsi *permeabilità gravitazionale* (analogo, sino ad un certo punto, alla permeabilità elettrica, od a quella magnetica) oppure *imperfetta trasparenza gravitazionale* (analoga mente a quanto succede per la materia traversata dalla luce).

Ricerche sperimentali anteriori. — Varii fisici hanno cercato di verificare sperimentalmente sino a qual punto tale principio, da me ora così enunciato, fosse veramente esatto. Così Austin e Thwing [1], che sperimentavano con una bilancia di Cavendish, tipo Boys, interponevano fra le masse mobili sospese al filo di torsione, e quelle fisse, degli schermi di diverse sostanze più o meno dense; e mai trovarono con ciò, variazioni nelle forze attrattive, almeno dentro il limite di precisione dell'esperimento e cioè dell' 1 % delle forze agenti. Successivamente la questione fu ripresa da Kleiner [2], Laager [3], Cremieu [4], Erisman [5]. Per opera di quest'ultimo fisico, la precisione dell'esperienza venne spinta sino al valore di 1/1200 della forza attrattiva. Va notato che, mentre il metodo seguìto da tutti gli autori citati era quello della bilancia di torsione, Laager ha anche sperimentato pesando una palla di argento di gr. 1,5, alternativamente circondata o no da una sfera cava a pareti spesse, di piombo. Così egli non scorse variazione superiore ad 1/15000 circa, del peso totale.

Non mi consta che altri autori abbiano ripreso più recentemente tali ricerche. Ad ogni modo esse hanno valso a riaffermare la precisione della legge di Newton, almeno dentro i limiti d'approssimazione raggiunti.

Dubbii sulla esattezza della legge di Newton. — Il fisico e l'astronomo sono stati indotti, per quanto si è detto più sopra, a ritenere come nulla la azione del mezzo, nella manifestazione delle forze newtoniane. Ma è tale convincimento giustificato del tutto dai fatti osservati? Le citate esperienze, come si è visto, non hanno consentito, al più, che una precisione di di 10^{-5} (Laager), nello studio della eventuale influenza del mezzo. Una tale

(1) Phys. Rev. 5, an. 1897.

(2) Archives de sc. phys. e nat. IV, 20, p. 420, an. 1905.

(3) Dissert., Zürich, 1904.

(4) Compt. rend. 140, p. 80, 1905; 14[illegible] 653 e 713, an. 1905; 143, p. 887, an. 1906.

(5) Vierteljahrschr. d. Naturforsch. Ges[illegible] [illegible]rich, 53, p. 157, an. 1908.

approssimazione, se può rappresentare uno sforzo sperimentale notevole, è pur tuttavia troppo piccola, se si vuole, con quel convincimento, interpretare tutti i fenomeni che la natura ci offre allo studio.

Infatti, secondo l'esperimento di Laager, una sfera di circa 1 gr. non muta sensibilmente di peso, se racchiusa dentro una sfera di piombo della massa di qualche chilogrammo. Ma è lecito credere che lo stesso accadrebbe se tale massa esterna fosse di un ordine di grandezza assai superiore, p. e. di qualche quintale o tonnellata? Se diciamo *massa* la proprietà della materia da cui, in ragione diretta, dipende il peso, ci si può domandare quale sarebbe la massa di 1 cmc. di materia, p. e. di argento posto al centro della terra, dato che esistesse un mezzo per determinarla dallo esterno della terra stessa. E quale valore avrebbe quella massa, se collocata al centro del sole? Apparirebbe sempre come di gr. 10,5? Come può esser lecito dalle, diciamo pure, grossolane esperienze citate, trarre la conseguenza che le masse situate al centro della terra, od al centro del sole (cioè di una massa 333000 volte maggiore), esercitino, su altre masse esteriori, forze attrattive, come se fossero perfettamente isolate? Eppure il convincimento si è radicato nella mente del fisico che la legge di Newton sia, da questo lato, impeccabile. È vero che a giustificazione di ciò stanno le osservazioni astronomiche; ma occorre riflettere che in tal caso le masse in giuoco, hanno dimensioni piccole, di fronte alle loro distanze reciproche; inoltre l'astronomo deduce dalla terza legge di Keplero, e dalle perturbazioni del moto degli astri, valori di massa, che potrebbero non aver nulla da vedere con le *masse vere*; la materia interna degli astri potrebbe essere schermata da quella più vicina alla crosta esteriore e, forse adottando il concetto di una *massa apparente*, i fenomeni si svolgerebbero, da questo lato, come se la legge di Newton fosse rigorosamente esatta. Dico *forse*, perchè, come farò vedere, potrà darsi che anche l'astronomo avrà modo di accorgersi di questa *azione di schermo della materia sulla gravitazione*, se effettivamente esiste.

Ma prima di andare avanti, occorre precisare anzitutto i caratteri, secondo cui questo probabile fenomeno si debba presentare. Vi sono due aspetti possibili e diversi, dai quali la questione può esser considerata. Il primo aspetto si ricava dallo esame dei fenomeni attrattivi elettrici e magnetici, nei quali casi, come è noto, si parla di *permeabilità*. Questa è caratteristica della materia del mezzo, e da essa dipende la misura della forza manifestantesi fra due masse elettriche o magnetiche; si moltiplica infatti per un fattore costante (l'inverso della permeabilità) l'espressione della forza nel vuoto, per ottenerne il valore a traverso il mezzo naturale. Essendo ciò vero per qualunque spessore di questo, se ne deduce che il fenomeno della permeabilità elettrica o magnetica, è constatabile anche per piccolissime distanze fra le masse agenti.

Per ricercare il secondo aspetto, occorre considerare fenomeni di altro

genere, nei quali cioè si manifesti assorbimento della azione a distanza. Della energia irradiata (come onde sonore, luce, particelle catodiche ecc.) si va affievolendo di solito, non solo secondo la legge della ragione inversa del quadrato delle distanze (analoga a quella di Newton), ma anche perchè il mezzo ne va progressivamente assorbendo una parte. In questo caso, è sovente difficile, sotto spessori piccoli, osservare il fenomeno dell'affievolimento dell'azione, ad una certa distanza. Così l'aria, trasparentissima sotto piccoli spessori, indebolisce notevolmente la luce del sole, se il suo spessore è di parecchi chilometri. La legge di tale affievolimento non corrisponde ad una semplice proporzione; interviene invece un fattore esponenziale, variabile con lo spessore del mezzo.

Quale dei due aspetti considerati può aiutarci a costruire un modello del fenomeno gravitazionale? Anzitutto, secondo le vedute più comuni, noi dovremmo, se mai, paragonare questo fenomeno a quello attrattivo elettrico o magnetico, piuttosto che alla propagazione di energia. Ma tal paragone apparisce difettoso: infatti, mentre nel caso elettrico la forza è dipendente dalla permeabilità del mezzo materiale (essa varia cioè notevolmente non appena si muti la natura di questo), nulla di simile avviene per la forza gravitazionale.

Paragoniamo invece questa, ad un fenomeno di propagazione dinamica, che dia luogo ad assorbimento progressivo. Gli esempii di teorie imbastite con tal proposito non mancano e cito al riguardo il lavoro di Isenkrahe [1] nel quale se ne trovano riassunte parecchie, dovute ad Eulero, Riemann, Dellingshausen, Lesage, Thomson, Preston. In qualcuna di queste può la gravitazione essere raffigurata come un *fenomeno di assorbimento e di equilibrio dinamico*. Ma l'accettazione di esse, sia pure notevolmente modificate o perfezionate, sarebbe, a rigore, subordinata a fatti sperimentali che sinora sono sempre mancati. Se prescindiamo però da tale giustificato scrupolo, vediamo come si presti meglio il secondo modello, ad una possibile, e sia pure, parziale interpretazione del fenomeno gravitazionale. Infatti con esso resterebbe spiegato, perchè non si osservi azione del mezzo, se questo è di piccolo spessore; potrebbe inoltre non accader lo stesso per spessori molto notevoli.

Per cui, sembra più probabile, nel caso del fenomeno gravitazionale, che esista un carattere del mezzo definibile come *potere assorbente*, piuttosto che come *permeabilità*. Ora, tale ordine di idee porterebbe a due conseguenze, che separatamente voglio prendere in esame:

1°) apparente diminuzione della massa materiale, causata dall'assorbimento;

[1] *Über die Zürückfürung der Schwere auf Absorption*. Zsch. f. Math. u. Phys., 37, Supplement, p. 163, an. 1892.

2°) probabile equiparazione del fenomeno gravitazionale, ad una propagazione o trasmissione continua di energia a distanza.

Dirò subito che queste due conseguenze non presentano, secondo me e per ora, egual grado di probabilità. La prima assurge forse, per ragione di logica, e per la dimostrazione sperimentale di cui dirò più tardi, al grado di certezza. La seconda ha per ora un certo grado di probabilità, da stabilire; di essa dirò dunque, facendo tutte le riserve che sono del caso.

Massa vera e massa apparente. — La prima conseguenza porterebbe alla nozione di *massa vera* e di *massa apparente* dei corpi. La massa vera sarebbe quella che si dovrebbe prendere in esame, al limite, per una estrema suddivisione della materia: ciascuna particella di questa, eserciterebbe nel suo intorno, delle azioni sensibilmente proporzionali alla propria massa vera. Con l'accumularsi in una data località, di particelle materiali, le forze attrattive esercitantisi fra queste ed altre masse esteriori, sarebbero proporzionali alla massa apparente, che risulterebbe, in conseguenza della *azione di schermo*, alquanto più piccola della vera. Il fisico e l'astronomo applicando la legge di Newton, e misurando le forze attrattive, tra masse necessariamente non piccolissime, non potrebbero osservare che il loro valore apparente. Inoltre, la distribuzione di tali forze non sarebbe così semplice, come vorrebbe quella legge. Per spiegare ciò, occorre anzitutto completare l'ipotesi fatta, dell'assorbimento, con l'altra che la forza elementare fra due particelle materiali poste in presenza, si svolga sempre secondo la congiungente di queste, ed il suo valore venga dato dalla legge di Newton, modificata secondo il principio dell'assorbimento progressivo. Nulla giustifica ancora tale ipotesi complementare; ma ricorro ad essa per la sua semplicità, benchè argomenti che non considero, possano in avvenire modificarla. Ciò posto, se prendiamo in esame p. e. l'azione attrattiva mutua fra due sfere materiali omogenee, è chiaro che essa si dovrà manifestare, anche col principio dell'assorbimento, secondo la congiungente i centri delle sfere: ciò per ragioni di simmetria. Ma non è però detto che i punti di applicazione delle due forze eguali e contrarie, siano precisamente i centri, come nel caso dello smorzamento nullo; certamente, anzi, sarebbero due punti alquanto più riavvicinati. Infatti, qualunque sia la legge dello smorzamento, le azioni elementari fra le particelle elementari delle località più riavvicinate delle due sfere verrebbero smorzate di meno. Concretata, o, meglio, constatata la legge dello smorzamento, l'analisi potrà stabilire la misura di tale riavvicinamento; dichiaro però di non avere avuto sinora tempo di approfondire la questione, sotto tal riguardo. È appena il caso di dire che più complicato si presenta il problema della attrazione fra una sfera ed una seconda massa non sferica, ed ancora più, quello fra corpi di forma qualsiasi.

Osservo poi che, in generale, la massa apparente di un corpo, può forse assumere valori differenti, a seconda della posizione del punto materiale su

cui il corpo esercita l'azione newtoniana. Si vede dunque che, se le ipotesi da me ora formulate sono attendibili, si apre un vasto campo di studio per il fisico e l'astronomo, chiamati a stabilire caso per caso i valori di quella grandezza.

Smorzamento della orza gravitazionale. — Le ipotesi fatte si basano sulla possibilità che, per una causa che non indago, il mezzo possa affievolire la propagazione della forza gravitazionale. Ho cercato se altri prima di me abbia per il passato formulata un'ipotesi del genere; ma, all'intuori di un vago accenno di H. Poincaré (¹), nulla ho trovato. Quell'illustre fisico avrebbe ricorso all'idea dello smorzamento della gravitazione, per seguire l'idea di Arrhenius dell'infinità dell'universo. Se questa fosse giusta, egli dice, anzitutto il cielo ci dovrebbe apparire cosparso di stelle tutte riavvicinate, e quindi luminoso, in tutti i suoi punti, come il sole. Si potrebbe giustificare la mancanza di tale fenomeno, col dire che lo spazio interstellare assorba la luce, in misura sia pure minima; e quindi la maggioranza delle stelle, assai lontane, non invierebbe luce sino a noi. Ma la forza newtoniana esistente nei punti del nostro sistema solare dovrebbe però, secondo tale ipotesi, essere infinita od indeterminata, contrariamente a ciò che si osserva. Per tirarsi d'impaccio, dice Poincaré, e volendo ammettere l'infinità dell'universo di Arrhenius, si deve anche ammettere che *la legge di Newton non sia rigorosamente esatta*, e che la gravitazione subisca *una specie di assorbimento, traducentesi in un fattore esponenziale.* Ora, l'ipotesi dello smorzamento così formulata, è troppo vaga, e del resto il Poincaré non sembra dare ad essa troppo peso. Non si comprende se l'autore intenda che lo smorzamento sarebbe causato solo dalla materia delle stelle frapposte fra noi e l'infinito, od anche dal vuoto interstellare, benchè anche quest'ultima idea debba riscontrarsi nelle sue parole. Infatti, le stelle luminose della parte dell'universo a noi relativamente vicina, sono certamente poche: e cioè quelle che si vedono e che nell'insieme contribuiscono a stabilire, di notte, il debole grado di luminosità del cielo. Come lo stesso autore nota (²), in cielo non vi debbono essere delle altre stelle *oscure*, in misura notevole; ciò per considerazioni che l'autore stesso svolge (contrariamente a più antiche idee di lord Kelvin) e secondo le quali la maggior parte dei corpi celesti deve essere luminosa. Per cui, se anche, come sarebbe logico di ammettere, la parte lontanissima dell'universo (dove cioè si trovassero stelle che non arrivano a tramandar luce sino a noi) fosse costituita come la più vicina, anche là non vi sarebbero stelle oscure. La materia dunque, che potrebbe assorbire la forza gravitazionale, sarebbe quella che costituisce i *soli* dell'universo, sia pure accompagnati dai loro piccoli pianeti e satelliti. È

(¹) *Les hypotèses cosmogoniques*, Préface, p. LXVII. Seconde édition 1913.
(²) loc. cit., p. LXV.

dunque assai poca cosa di fronte alla enormità degli spazii interstellari; e l'ipotesi di Poincaré, fatta a giustificazione dell'altra di Arrhenius, verrebbe completata dicendo che *anche il vuoto* debba assorbire la forza gravitazionale. Ciò va assai di là dai ragionamenti che qui ora svolgo; io mi limito invece ad avanzare l'ipotesi che sia proprio la materia, la causa dell'assorbimento della forza di gravitazione; e, non volendo arrivare a considerazioni che potrebbero diventare metafisiche, è mia intenzione di sottoporre quella ipotesi ad accurato esame, cercando di stabilire, ove sarà possibile, le necessarie verifiche sperimentali.

Applicazione al caso del sole. — Prima di andare avanti in queste considerazioni, occorre vedere se nulla, di già acquisito alla scienza, contradica senz'altro il nuovo concetto di *massa apparente.* Sperimentalmente, sinora, niente giustifica tale concetto. Le nostre misure con la bilancia di Cavendish, sia pure molto perfezionate, o quella, già citata, di Laager, hanno sempre fatto vedere la *costanza della massa*, al variar del mezzo; ma ciò può spiegarsi con la mancanza di sensibilità negli apparecchi usati; e forse, con altri più sensibili, il risultato potrebbe esser diverso. Ora, prima di pensare alla costruzione di apparecchi del genere, sarà bene, uscendo dal nostro laboratorio, rivolgere l'attenzione ai fenomeni di fisica stellare, per vedere se nulla si opponga alla fatta ipotesi, e, meglio ancora, se da essi si possano ricavare i criterii direttivi nella costruzione suddetta.

Il caso che più probabilmente ci può offrire argomenti pro o contro la formulata ipotesi, è evidentemente quello del sole, che con la sua massa astronomica di 2.10^{33} grammi (333,000 volte quella della terra), rappresenta la più grandiosa agglomerazione di materia, a noi relativamente prossima. Questa è costituita dalla massa racchiusa nella fotosfera, chè quelle della cromosfera e della corona sono, di fronte ad essa, trascurabili. La densità media della massa solare risulta perciò di circa 1,41. Tutte le varie teorie sulla costituzione del sole, oggi accettate, ammettono naturalmente la esattezza di questa cifra; anzi ne fanno un punto di partenza per la deduzione di molte caratteristiche della struttura solare, quale la distribuzione delle densità, delle pressioni, delle temperature ecc. Ciò posto, è noto che, ammessa la temperatura superficiale del sole di circa 6000°, che certamente deve essere molto inferiore a quelle delle varie profondità, si dice che il sole sia costituito da una massa gassosa. Infatti esso è formato da elementi chimici, per la grande maggioranza a noi noti, ed i cui punti critici sono tutti al di sotto di 6000°. Ma si deve trattare di uno stato gassoso del tutto speciale; ciò perchè la vischiosità della materia, dovuta alla enorme pressione e alla densità media di 1,41 (assai grande per un corpo gassoso), lo fa rassomigliare di più allo stato liquido. Certamente si tratta di materia in condizioni del tutto diverse, da quelle che possono osservarsi o realizzarsi alla superficie della terra o nei nostri laboratorii.

Comunque, appare a primo esame alquanto strana la conformazione esterna del sole con *bordi nettissimi*; infatti si potrebbe credere che una massa gassosa, libera di espandersi, dovesse piuttosto presentare bordi sfumati. L'imbarazzo del fisico nello spiegare tale nettezza dei bordi, apparisce evidente quando si esaminino le differenti ipotesi avanzate per spiegarla. Così Schmidt, Julius, Abbot (1) sarebbero d'avviso che quella nettezza sia dovuta ad un'illusione ottica. Più attendibile è però l'idea del Bigelow e di altri che fanno vedere come il fenomeno possa essere dovuto ad un effetto termodinamico e gravitazionale. I gas, con peso atomico superiore a 40, passerebbero, dentro 1/2000 del raggio solare, da una grande densità ad altra piclissima ed evanescente, al di sopra della fotosfera. I gas più leggeri, a partire dal Ca (p. at. 40), esisterebbero invece in misura notevole anche ad altezze spropositate, come può avvenire per l'idrogeno delle protuberanze. Più recentemente uno studio del Véronnet (2) mostra come i gas reali sieno caratterizzati dalla esistenza di un *volume limite*, con una densità dell'ordine di quella dei liquidi; e che la densità di essi crescerebbe, passando dalla cromosfera alla fotosfera, all'incirca da zero a quel valore, solo in una profondità di 5 km. Tutto ciò ho voluto richiamare, per stabilire che, già alla superficie del sole, si ammette debba esistere una densità notevole (altrimenti, non si vedrebbero i bordi netti).

Una seconda questione è quella di sapere come siano distribuite le densità della materia alle diverse profondità, nel sole. Ora il problema è legato all'altro della distribuzione delle temperature ed all'altro, ancora più incerto, anzi si può dire del tutto indeterminato, della proporzione con cui i varî elementi sono compresi nella massa solare. Comunque, per giustificare il valore di 1,41, della densità media, e partendo da un valore quasi trascurabile alla fotosfera (3), alcune teorie (4) portano ad ammettere al centro del sole una densità di 28,16 (Homer Lane) od anche di 31,5 (W. Thomson). Secondo altri poi, potrebbe esistere al centro del sole un nucleo addirittura liquido o solido (5).

Queste ed altre citazioni, che per brevità non faccio, fanno vedere la grande incertezza che regna nelle teorie della costituzione interna del sole. Per cui, mi sembra, che esse non possano costituire argomenti atti a contradire la ipotesi, che oggi formulo, dello smorzamento gravitazionale. La massa del sole di $2{,}10^{33}$ gr. potrebbe, secondo tale ipotesi, non essere che *apparente*; e la *massa vera* potrebbe superar quella, anche di molto. Baste-

(1) Bigelow, *A. treatise on the sun's radiation.* New York, 1918, p. 79.

(2) Bullettin astron. de l'observ. de Paris, t. XXXV, p. 101, an. 1918.

(3) Ciò è, secondo me, in contradizione col fatto della nettezza del bordo solare.

(4) Bosler, *Les théories modernes du soleil,* p. 188-202.

(5) Emden, Ann. d. Physik, VII, p. 176, 1902 e Bosler, loc. cit., pp. 217-231.

rebbe p. e., supporre l'esistenza nello interno del sole di corpi a forte densità, per giustificare tale nuovo fatto, e nessuna delle teorie citate sarebbe sufficiente per lasciar negare la possibilità di ciò.

Farò vedere presto con quali criterii sono riuscito a stabilire un ordine di grandezza probabile, del sospettato fenomeno ed a realizzare una esperienza di controllo, della esistenza di questo.

Meccanica. — *Sulle onde progressive, di tipo permanente, oscillatorie (seconda approsssimazione).* Nota I di UMBERTO CRUDELI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA [1].

Nello studio, in idrodinamica, delle onde progressive di tipo permanente, il Levi-Civita pervenne [2] all'equazione

$$(1) \qquad \frac{d}{df}\left\{ w(f+iq)\, w(f-iq) \right\} - iq \left\{ \frac{1}{w(f+iq)} - \frac{1}{w(f-iq)} \right\} = 0,$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 12 ottobre 1919.

[2] Rend. della R. Accad. dei Lincei, II sem. 1907, pag. 77.

Si pensi ad un canale rettilineo a sponde verticali col medesimo stato di moto lungo ogni retta perpendicolare alle sponde. Basterà allora studiare cotesto moto in una sezione parallela a coteste sponde. I caratteri qualitativi del moto stesso vengono supposti essere quelli che corrispondono ad onde propagantisi entro il canale senza alterazione di forma. La qualifica « permanente » sta qui a significare che, per un osservatore dotato della velocità di propagazione, il movimento ha carattere stazionario. Detta c la grandezza di cotesta velocità di propagazione ed assunto un sistema di assi x, y, animati dalla stessa velocità, avremo che le componenti della velocità in discorso saranno $-c$, o, supponendo orizzontale il fondo del canale ed intendendo l'asse y verticale e l'asse x, scorrente sul fondo, rivolto in senso opposto alla traslazione. La regione del moto sarà rappresentata, nel piano xy, da una striscia L, semplicemente connessa, indefinita, limitata, inferiormente, dall'asse x e, superiormente, da una linea libera l. Qualora questa linea consti di tratti riproducentisi periodicamente, le onde diconsi *oscillatorie*; diversamente si ha un tipo di onde, che comprende (come caso particolare) il caso dell'*onda solitaria*, studiata, sperimentalmente, da Scott Russell, da Darcy, da Bazin, e, teoricamente [in via approssimata], da Boussinesq e da lord Rayleigh. Il movimento del liquido nella striscia L, semplicemente connessa, viene supposto ovunque regolare ed irrotazionale. Esisterà, perciò, il potenziale $\varphi(x, y)$ (potenziale di velocità) uniforme e regolare in L. La funzione φ sarà funzione armonica, a motivo della incompressibilità del fluido; quindi si potrà definire la funzione associata ψ (detta funzione di corrente). Denotate con u e v le componenti della velocità *relativa* del fluido in un generico punto (x, y), ammetteremo naturalmente che sia positivo il limite inferiore dei valori di u, dovendosi, ogni singola particella fluida, ritenere dotata di velocità assoluta non rilevante in confronto alla velocità di propagazione $(-c, o)$, in modo, cioè, che la suddetta velocità relativa possa differire soltanto di poco dalla (c, o). Ciò premesso, posto $\varphi + i\psi = f, u - iv = w$, e consi-

la quale può dirsi insieme differeziale e alle differenze finite. In essa $i=\sqrt{-1}$, mentre g è la grandezza dell'accelerazione della gravità ed f è la variabile complessa $\varphi+i\psi$; tutto essendo ricondotto alla determinazione d'integrali $w(f)$ della (1), reali sull'asse reale, regolari nella striscia $\overline{\psi=\pm q}$, finiti all'infinito e tali che la loro parte reale non scenda, in cotesta striscia, al disotto di una costante positiva (del resto, comunque piccola). Il caso, poi, che si tratti di onde oscillatorie, si traduce analiticamente nella periodicità di $w(f)$ (con periodo reale); per cui, allora, posto $\xi=e^{\frac{2\pi if}{\omega}}$ (dove ω rappresenta il periodo), la funzione $w(f)$ diventa funzione uniforme e regolare della variabile complessa ξ nella corona corrispondente, nel piano ξ, alla suddetta striscia. Posto, inoltre, $\alpha=e^{-\frac{2\pi q}{\omega}}$ (con che α resulta frazione propria), la corona C, corrispondente alla striscia $\overline{\psi=\pm q}$, si trova limitata, internamente, dalla circonferenza $|\xi|=\alpha$ e, esternamente, dalla circonferenza $\left|\xi\right|=\frac{1}{\alpha}$. E la equazione (1) si trasforma nella seguente:

$$\xi\frac{d}{d\xi}\left\{w(\alpha\xi)\,w\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\right\}-\frac{g\omega}{2\pi}\left\{\frac{1}{w(\alpha\xi)}-\frac{1}{w\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)}\right\}=0\,.$$

Le condizioni qualitative, imposte alla w, saranno allora le seguenti: essere regolare nella corona C; essere reale sulla circonferenza $|\xi|=1$; essere tale che la sua parte reale non scenda, in tutta la C, al disotto di una costante positiva.

Posto $w=c(1+\varepsilon)$ (dove con c denoteremo la velocità di propagazione), avremo che l'equazione delle onde progressive di tipo permanente, nel caso si tratti di onde oscillatorie, potrà scriversi (col noto significato dei simboli)

$$\xi\frac{d}{d\xi}\left\{\varepsilon(\alpha\xi)+\varepsilon\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\right\}+\frac{g\omega}{2\pi c^3}\left\{\varepsilon(\alpha\xi)-\varepsilon\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\right\}=$$

$$=-\xi\left\{\varepsilon(\alpha\xi)+\varepsilon\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)+\varepsilon(\alpha\xi)\,\varepsilon\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\right\}\frac{d}{d\xi}\left\{\varepsilon(\alpha\xi)\,\varepsilon\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\right\}$$

la quale si trasforma in sè stessa nello scambio di ξ in $\frac{1}{\xi}$. L'equazione

---

derato un piano di Gauss rappresentativo dei valori f, sul quale la striscia L viene rappresentata in modo conforme dalla striscia limitata delle rette $\psi=0$ e $\psi=q$ (essendo q la portata del moto relativo per unità di larghezza del canale, nell'ipotesi di ritenere unitaria la densità del liquido), il Levi-Civita pervenne a caratterizzare il problema meccanico, relativo al suddetto moto di un liquido pesante, mediante la equazione funzionale superiormente riprodotta.

in discorso può, brevemente, scriversi $A(\varepsilon) = B(\varepsilon)$, dove A, come si vede, è un operatore lineare (nei riguardi di ε e della sua derivata), mentre B è un operatore non lineare.

L'equazione considerata dal Levi-Civita come caratteristica delle soluzioni approssimate è la equazione $A(\varepsilon) = 0$. Ora, supponendo α sviluppabile in serie di potenze intere e positive di un parametro μ, cioè $\alpha = \alpha_1 + S(\mu)$, riterremo, in prima approssimazione, $\alpha = \alpha_1$. Corrispondentemente l'equazione $A(\varepsilon) = 0$ verrà scritta

$$(2) \qquad \xi \frac{d}{d\xi} \left\{ \varepsilon(\alpha_1 \xi) + \varepsilon\left(\frac{\xi}{\alpha_1}\right) \right\} + \frac{g\omega}{2\pi c^3} \left\{ \varepsilon(\alpha_1 \xi) - \varepsilon\left(\frac{\xi}{\alpha_1}\right) \right\} = 0.$$

Di questa equazione denoteremo con ε_1 la soluzione (privata del termine costante) uniforme e regolare in C e reale sulla circonferenza $|\xi| = 1$. Sicchè $\varepsilon_1(\xi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{1s} \xi^s$ (con $a_{10} = 0$). Mediante sostituzione nella (2), si osservi che dovremo avere identicamente

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \left\{ s(\alpha_1^s + \alpha_1^{-s}) + k(\alpha_1^s - \alpha_1^{-s}) \right\} a_{1s} \xi^s = 0,$$

dove $k = \frac{g\omega}{2\pi c^3}$. Quindi, non tutti i coefficienti a_{1s} essendo nulli, è necessario che esista un intero $|m|$ tale che

$$(3) \qquad m\left(\alpha_1^m + \frac{1}{\alpha_1^m}\right) + k\left(\alpha_1^m - \frac{1}{\alpha_1^m}\right) = 0,$$

cioè

$$\alpha_1^{2m} = \frac{k - m}{k + m},$$

condizione che supponiamo soddisfatta. Si noti, incidentalmente, la conseguente restrizione $k > |m|$. Ciò premesso, si osservi che non possono esistere due interi $|m|$, fra loro diversi, tali che la (3) resulti, da entrambi, soddisfatta. Infatti, dalla (3), si ha $\frac{m(\alpha_1^{2m} + 1)}{1 - \alpha_1^{2m}} = k$. Ora, se esistessero due valori positivi di ν, in corrispondenza ai quali l'espressione $\frac{\nu(\alpha_1^{2\nu} + 1)}{1 - \alpha_1^{2\nu}}$ (considerata come funzione di ν) assumesse valori fra loro eguali, dovrebbe esistere almeno un valore positivo di ν annullante la prima derivata di cotesta funzione; cioè dovrebbe essere, per un certo ν positivo,

$$\alpha_1^{4\nu} - 4\nu\alpha_1^{2\nu} \log \alpha_1 = 1.$$

Ma, per $\nu = 0$, il primo membro di cotesta eguaglianza vale uno; dunque

dovrebbe esistere anche un valore positivo di ν annullante la prima derivata della funzione $\alpha_1^{4\nu} - 4\nu\,\alpha_1^{2\nu}\log\alpha_1$. Dovrebbe, pertanto, aversi pure

$$\alpha_1^{2\nu} - 2\nu\log\alpha_1 = 1$$

in corrispondenza ad un certo ν positivo. E quindi, con ragionamento analogo, anche $\alpha_1^{2\nu} = 1$ per un certo valore positivo di ν. Il che è assurdo, essendo α_1 reale e diverso dall'unità.

La $\varepsilon_1(\xi)$ resulta dunque espressa mediante $a_{1,m}\,\xi^m + a_{1,-m}\,\xi^{-m}$, in cui porremo $a_{1,m} = \mu_1 + i\mu_2$, $a_{1,-m} = \mu_1 - i\mu_2$, affinchè essa resulti reale sulla circonferenza $|\xi| = 1$.

Noi assumeremo $\mu_2 = 0$, $\mu_1 = \mu$; sicchè

$$\varepsilon_1(\xi) = \mu(\xi^m + \xi^{-m}).$$

Per semplicità, supporremo $|m| = 1$; ed avremo così la soluzione di Airy, $\varepsilon_1(\xi) = \mu(\xi + \xi^{-1})$, dell'equazione (2), dove, in tal caso, $\alpha_1 = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}$ (intendendo preso del radicale il valore aritmetico).

Ora, si consideri l'equazione $A(\varepsilon) = B(\varepsilon_1)$. Ivi si metta $\alpha_1(1 - \alpha_2\mu^\sigma)$ al posto di α, ed $\alpha_1^{-1}(1 + \alpha_2\mu^\sigma)$ al posto di α^{-1}; e, inoltre, si metta $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - \mu^h \sum_2^{+\infty} a_{2s}(\xi^s + \xi^{-s})$ al posto di ε. Dopo avere osservato che il secondo membro $B(\varepsilon_1)$ contiene μ^3 come fattore comune, si assumino $\sigma = 2$, $h = 3$ e si trascurino nella $A(\varepsilon_2) = B(\varepsilon_1)$ i termini che contengono μ con grado superiore al terzo; poi si dividano ambo i membri per μ^3. Avremo, così, identicamente,

$$\alpha_2 \left\{ \alpha_1 - \alpha_1^{-1} + k(\alpha_1 + \alpha_1^{-1}) \right\} (\xi - \xi^{-1}) +$$

$$+ \sum_2^{+\infty} \left\{ s(\alpha_1^s + \alpha_1^{-s}) + k(\alpha_1^s - \alpha_1^{-s}) \right\} a_{2s}(\xi^s - \xi^{-s}) =$$

$$= 2(\alpha_1 + \alpha_1^{-1})(\xi - \xi^{-1} + \xi^3 - \xi^{-3}).$$

Intanto, $a_{2s} = 0$ per $s \neq 3$.

Inoltre, tenendo presente che $\alpha_1 = \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}$, resulta

$$\alpha_2 = \frac{2k}{k^2 - 1},$$

e, infine,

$$a_{23} = \frac{k^2 - 1}{4}.$$

Nell'ipotesi di validità del metodo di approssimazioni successive che scaturisce manifesto dalle presenti considerazioni, ritenendo la funzione di Airy, $\varepsilon_1 = \mu(\xi + \xi^{-1})$, come soluzione in prima approssimazione della equazione $A(\varepsilon) = B(\varepsilon)$, potremo riguardare la funzione

$$\varepsilon_2 = \mu(\xi + \xi^{-1}) - \frac{k^2 - 1}{4} \mu^3 (\xi^3 + \xi^{-3})$$

come soluzione in *seconda approssimazione* dell'equazione medesima.

Per una prossima Nota ci riserviamo lo studio di dettaglio connesso con cotesta seconda approssimazione (formazione esplicita dell'equazione del pelo libero; espressioni delle componenti di velocità, ecc.) ed il raffronto coi resultati di Stokes.

Meccanica. — *Deviazione dei raggi luminosi in un campo elettrico o magnetico uniforme, secondo la teoria di Einstein.* Nota di Rocco Serini, presentata dal Socio T. Levi-Civita [1].

Supposto che uno strato di spessore l, occupato da un mezzo impolarizzabile (aria o vuoto), sia sottoposto all'azione di un campo elettrico o magnetico uniforme, normale alle faccie dello strato e di intensità C, lo spazio ivi compreso non rimane più, secondo la teoria di Einstein, rigorosamente euclideo, ma si atteggia a varietà normale del Bianchi.

Inoltre la velocità della luce non è più $c = 3.10^{10}$ cm/sec, come in assenza di ogni causa perturbatrice, ma varia da punto a punto del campo; e parimenti l'andamento dei raggi non è più rettilineo.

Nella presente Nota determino l'andamento d'un raggio nello strato, ottenendo il valore per la deviazione del medesimo, supposto che confini con continuità ottica, cioè senza dar luogo a rifrazione, con un mezzo in cui la velocità della luce è c.

Nell'ultimo paragrafo studio numericamente la formola ottenuta, dimostrando la pratica impossibilità di misurare direttamente tale deviazione con esperienze da laboratorio. Non sarebbe forse invece improbabile mettere in evidenza qualche divario con esperienze interferenziali.

1. *Richiamo di alcune formole* [2]. — Nell'ipotesi precedente, di un campo elettrico (magnetico) uniforme, il Levi-Civita dimostra che, se

[1] Pervenuta all'Accademia il 7 ottobre 1919.

[2] Vedi T. Levi-Civita, *Realtà fisica di alcuni spazî normali del Bianchi*, Rend. Lincei, 20 maggio 1917.

$\varphi = -Cz$ è il potenziale del campo, il ds^2 dello spazio è dato da

$$ds^2 = dz^2 + dx_1^2 + \text{sen}^2 \frac{x_1}{R} dx \ , \tag{1}$$

dove

$$R = \frac{c^2}{\sqrt{f \cdot C}} , \tag{2}$$

essendo $f = 6{,}6 \, . \, 10^{-8}$ (CGS) la costante dell'attrazione universale.

La velocità della luce è data allora dalla relazione

$$V = c_1 e^{\frac{z}{R}} + c_2 e^{-\frac{z}{R}} , \tag{3}$$

con c_1, c_2 costanti da determinarsi.

Supporremo d'ora innanzi che $\frac{x_i}{R}$, $\frac{z}{R}$ (puri numeri) sieno tali da poterne trascurare le potenze superiori alla seconda: ipotesi ampiamente giustificata dall'ordine di grandezza di R.

In tale ipotesi il ds^2 si può considerare euclideo. Infatti le superfici $z =$ cost. hanno per metrica

$$dx_1^2 + \text{sen}^2 \frac{x_1}{R} dx_2^2 ,$$

che per l'ipotesi precedente, ponendo $\text{sen}^2 \frac{x_1}{R} = \left(\frac{x_1}{R}\right)^2$, si può scrivere

$$dx^2 + x_1^2 d\left(\frac{x_2}{R}\right)^2 ,$$

che è l'elemento lineare del piano in coordinate polari $\left(x_1 = \varrho \, , \frac{x_2}{R} = 0\right)$.

La (1) si può quindi ridurre alla forma euclidea

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 , \tag{1'}$$

quando si introducano coordinate cartesiane ortogonali.

Prenderemo allora per piano $z = 0$ il piano mediano dello strato.

2. *Velocità della luce: andamento del raggio luminoso.* — Le costanti c_1, c_2 della (3) dovranno essere calcolate come segue: Per $z = -\frac{l}{2}$ e $z = \frac{l}{2}$, deve essere $V = c$. Scrivendo allora la (3) sotto la forma

$$V = \gamma_1 \cos h \frac{z}{R} + \gamma_2 \,\text{sen}\, h \frac{z}{R} ,$$

si trova immediatamente, colle date condizioni ai limiti dello strato,

$$V = \frac{c}{\cos h \frac{l}{2R}} \cos h \frac{z}{R}. \tag{3'}$$

Ora l'andamento dei raggi luminosi corrisponde all'equazione variazionale

$$\delta \int \frac{ds}{V} = 0 \text{ [1]}, \tag{4}$$

e quindi, ricordando la (1') e osservando che a noi importa solo l'andamento dei raggi, possiamo dire che il nostro problema è ridotto a considerare le traiettorie del problema dinamico ordinario, in cui il potenziale sia

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 h \frac{z}{R}}, \tag{5}$$

e l'energia totale nulla, il che dà la condizione

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2U. \tag{6}$$

Ora, nel nostro ordine di approssimazione,

$$U = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right). \tag{5'}$$

Ne risulta, dalla (6), per il quadrato della velocità iniziale, il valore

$$v_0^2 = 1 - \frac{l^2}{4R^2}. \tag{6'}$$

Il nostro problema è ora ridotto al seguente problema elementare di meccanica:

Un punto materiale parte dalla posizione $\left(0, 0, -\frac{l}{2}\right)$ con velocità di grandezza v_0, avente una data direzione, sotto l'azione del potenziale unitario (5'). Quale ne è la traiettoria?

[1] Vedi T. Levi-Civita, *Statica einsteiniana*, § 4. Rend. Lincei, 6 maggio 1917. — A. Palatini, *Lo spostamento del perielio di Mercurio e la deviazione dei raggi luminosi secondo la teoria di Einstein*, Nuovo Cimento, luglio 1917.

Appare intanto ch'essa è piana: quindi, preso tale piano per piano zx, avremo le equazioni differenziali

$$\ddot{x} = 0 \quad , \quad \ddot{z} = -\frac{z}{R^2} , \tag{7}$$

colle condizioni

$$x = 0 \quad , \quad z = -\frac{l}{2} \quad , \quad \dot{x} = v_0 \cos \alpha_1 \quad , \quad \dot{z} = v_0 \operatorname{sen} \alpha_1 ,$$

per $t = 0$, indicando con α_1 l'angolo del raggio coll'asse x.

Con tali condizioni si ottiene immediatamente

$$\left\{ \begin{aligned} x &= v_0 \cos \alpha_1 \, . \, t , \\ z &= -\frac{l}{2} \cos \frac{t}{R} + R \, v_0 \operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen} \frac{t}{R} . \end{aligned} \right. \tag{8}$$

Osserviamo ora che, se non ci fosse perturbazione, si avrebbe $R = \infty$ e quindi $v_0 = 1$. La traiettoria sarebbe rettilinea e il mobile impiegherebbe il tempo $T_0 = \dfrac{l}{\operatorname{sen} \alpha_1}$ per attraversare lo strato: del rapporto $\dfrac{T_0}{R}$ si possono trascurare le potenze superiori alla seconda.

Essendovi la perturbazione, il tempo T necessario per attraversare lo strato deve differire da T_0 per quantità dell'ordine almeno di $\dfrac{l}{R}$. La conclusione precedente deve quindi valere per T e per ogni $t < T$, onde potremo scrivere le (8), limitando gli sviluppi di sen e cos $\dfrac{t}{R}$ alle seconde potenze,

$$\left\{ \begin{aligned} x &= v_0 \cos \alpha_1 \, t , \\ z &= -\frac{l}{2} \left(1 - \frac{t^2}{R^2} \right) + {}_0 \operatorname{sen} \alpha \, . \, t . \end{aligned} \right. \tag{8'}$$

Dalla seconda delle (8') si ricava, per $z = \dfrac{l}{2}$,

$$T = \frac{R^2 v_0 \operatorname{sen} \alpha_1}{l} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{l^2}{R^2 v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_1}} \right) ,$$

ed anche, ricordando che

$$\sqrt{1 + \alpha} = 1 + \frac{1}{2} \alpha + \cdots ,$$

si ottiene

$$T = \frac{l}{v_0 \operatorname{sen} \alpha_1} ,$$

e quindi, per la (6′),

$$T = \frac{l}{\operatorname{sen} \alpha_1}\left(1 + \frac{1}{8}\frac{l^2}{R^2}\right). \tag{9}$$

È facile ora calcolare $\operatorname{tang} \beta_1$, essendo β_1 l'angolo che la tangente alla traiettoria nel punto $z = \frac{l}{2}$ fa coll'asse x. Sarà

$$\operatorname{tang} \beta_1 = \left(\frac{dz}{dx}\right)_{z=\frac{l}{2}} = \left(\frac{dz}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\right)_{t=T}.$$

Avremo

$$\frac{dz}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \left(\frac{lt}{R^2} + v_0 \operatorname{sen} \alpha_1\right)\cdot\frac{l}{v_0 \cos \alpha_1} = \frac{l}{R^2}\left(1 + \frac{l^2}{8R^2}\right)\frac{t}{\cos \alpha_1} + \operatorname{tang} \alpha_1 .$$

Per $t = T$, nel nostro ordine di approssimazione, si ha così

$$\operatorname{tag} \beta_1 = \frac{l^2}{R^2}\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha_1 \cos \alpha_1} + \operatorname{tag} \alpha_1 . \tag{10}$$

Appare di qui che $\operatorname{tag} \beta_1 - \operatorname{tag} \alpha_1$ è dell'ordine di $\frac{l^2}{R^2}$; tale sarà quindi anche $\beta_1 - \alpha_1$, onde potremo scrivere

$$\operatorname{tg} \beta_1 - \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{\cos^2 \alpha_1}$$

quando si sviluppi il primo membro in serie di Taylor limitata al primo termine: per la (10), ed esprimendo in secondi,

$$(\beta_1 - \alpha_1)'' = \frac{l^2}{R^2}\frac{\cot \alpha_1}{\operatorname{sen} 1''}. \tag{10′}$$

La (10′) dà il divario dalla ordinaria teoria, nella quale $\beta_1 - \alpha_1 = 0$: tale divario è del secondo ordine.

3. *Apprezzamenti numerici.* — La formola (10′) si presta bene ad un apprezzamento numerico. Volendo porci nelle condizioni più favorevoli per osservare il divario dall'ordinaria teoria, supporremo α_1 prossimamente zero, per esempio $\alpha_1 = 0'',1$; allora

$$\log \frac{\cot 0''.1}{\operatorname{sen} 1''} = 12{,}6288502 .$$

Inoltre

$$\frac{1}{R^2} = \frac{f . C^2}{c^4} = \frac{6{,}6 \times 10^{-8} \times C^2}{3^4 \times 10^{40}}.$$

Arrotondiamo il log ponendolo eguale a 13, e poniamo inoltre $\frac{6,6}{3^4}$ approssimativamente eguale a $\frac{1}{10}$. Ne viene

$$(\beta_1 - \alpha_1)'' = \frac{l^2 C^2}{10^{36}}.$$

Cosicchè, ponendo $l = 10^m$ cm., $C = 10^n$ (gauss se si tratta d'un campo magnetico, $\frac{1}{300}$ di volt se di campo elettrostatico), perchè la differenza $(\beta_1 - \alpha_1)''$ raggiunga un secondo, occorre che

$$m + n = 18.$$

Quest'ultimo risultato fa vedere l'impossibilità di misurare direttamente l'angolo di deviazione con esperienze di laboratorio: al massimo si potrebbe avere allora $l = 100$ cm., perciò $m = 2$. Dovrebbe essere $n = 16$ e quindi il campo di un ordine di grandezza tale che i mezzi attuali non ci consentono di produrre.

Matematica applicata. — *Della volgarizzazione ed applicazione della fisica-matematica in medicina* (1). Nota II del professore S. SÀLAGHI, presentata dal Socio A. RUFFINI (2).

Ad un più attento esame della nostra tavola raffigurante la « linea della consonanza lungo la serie armonica », già pubblicata e discussa in questi Rendiconti (3), si osserva che gli armonici *dispari*, cominciando dal settimo, provengono puramente dai suoni simmetrici, che sono stati da noi inseriti; laddove gli armonici pari sono multipli di note appartenenti alla gamma, oppure multipli dei suoni simmetrici che erano stati inseriti nelle ottave precedenti: così 14 multiplo di 7, 18 di 9, 22 di 11, 26 di 13, 28 di 7, 30 di 15 (4).

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di terapia fisica della R. Università di Bologna.

(2) Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1919.

(3) Questi Rendiconti

(4) Specialmente dunque gli armonici *dispari*, sempre cominciando dal settimo, offrono intervalli musicali assolutamente nuovi, estranei alla nostra scala. Tanto è vero che siamo stati noi stessi ad intercalarli tra le varie note negli spazi convenienti.

Parecchi di questi intervalli nuovi non potrebbero legittimamente denotarsi, neppure per approssimazione, cogli ordinarî segni di intonazione. Tali sono tra gli altri il settimo,

Come ben s'intende, questi suoni nuovi, se emessi tali e quali sono in un concento che sia intonato secondo l'attuale temperamento armonico, per poco che emergano, appaiono del tutto estranei all'armonia che è già altrimenti costituita. L'orecchio non li tollera punto. Quando istrumenti a fiato, come per es. il corno, li dànno — giacchè questi istrumenti li emettono naturalmente per il solo rinforzo progressivo del soffio — l'artista è obbligato a correggerli [1].

Schönberg ed il polifonismo odierno.

La nostra analisi geometrica, iniziata a suo tempo sulle armonie e proseguita adesso sulla linea della consonanza e serie armonica, dà ora adito ad una nuova deduzione importante per la dottrina musicale, da annoverare tra quelle parecchie che furono già esposte in sede appropriata [2].

L'arte odierna dei suoni mostra una predilezione manifesta per le combinazioni polifoniche. Negli accordi, al giorno d'oggi, le diverse voci o parti non sono in numero ristretto, come erano in passato, ma molte insieme. Possono esservi in una volta perfino tutti i dodici semitoni della ottava, ciò che costituirebbe la tanto discussa armonia dodecafona, preconizzata da Alaleona e da Schönberg come la più armoniosa di tutte le altre perchè la più ricca di suoni [3].

---

l'undecimo, il tredicesimo che, a dir vero, sono quelli che più si allontanano dalla accordatura temperata; e al di sopra del sedicesimo un numero ognor crescente.

Pur tuttavia si suole comunemente rappresentare il settimo armonico col *si* bemolle nella sua relativa ottava, il quale ne differisce per circa otto vibrazioni in più al secondo; l'undecimo col *fa* diesis che ha pure in più dieci vibrazioni; il tredicesimo col *la* bemolle che ha dieci vibrazioni in meno. E così dicasi di tanti altri numeri dispari.

Unicamente per non andare contro alla usanza invalsa nella pratica, nella tavola, finchè era possibile, furono scritte in basso, sotto ciascuna ordinata, le note che più si avvicinano a quegli armonici. Ma, ripeto, è cosa illogica, per lo meno da ritenere come una vera e propria licenza musicale.

(1) Ciò dimostra, osserva l'Anglas, che bisogna tener conto di una certa educazione del nostro senso (I. Anglas, *Précis d'acoustique*. Paris, Paulin éd., 1910, pag. 261). Similmente il D'Indy invoca in riguardo la nostra educazione musicale (V. D'Indy, *Cours de composition musicale*, premièr livre, pag. 103. Paris, Durand éd., 1912).

A me sembra che, a spiegare l'intolleranza dell'udito, sia più che sufficiente la ragione potissima che fu dianzi accennata; l'appartenere cioè quei suoni ad una scala differente dalla nostra.

(2) S. Sàlaghi, *Un problema di acustica fisiologica risoluto musicalmente* (con 4 figure e 10 brani musicali). Rivista musicale italiana, fasc. 3°-4°, 1918.

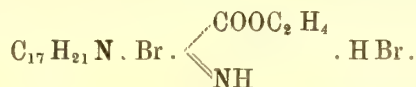
(3) Secondo l'interpretazione che ne dà lo stesso Schönberg, il quale può considerarsi il banditore o almeno il più reputato teorico della nuovissima scuola (Arnold Schönberg, *Die Harmonielehre*, 1911), queste combinazioni polifoniche non sarebbero, in fondo,

Come i primi sei armonici che sono consonanti, nota lo Schönberg, compongono l'accordo perfetto maggiore, così hanno altettanto diritto di partecipare agli accordi gli armonici superiori al sesto che sono dissonanti. Egli crede, insomma, di poter legittimare il polifonismo della nuova arte, fondandolo sulla dottrina degli armonici [1].

Chimica. — *Ricerche sulla stricnina e brucina.* Nola VI di R. Ciusa, presentata dal Socio G. Ciamician [2].

Per azione del bromo sull'isostricnina in soluzione di acido acetico glaciale e successiva scomposizione del perbromuro si ottengono derivati della base tribromurata $C_{21}H_{21}ON_2 . Br_2 . Br$, nella quale due atomi di bromo sono addizionati ad un doppio legame come nella stricnina, ed il terzo atomo di bromo sostituisce un idrossile [3]. Questo modo di vedere riceve una conferma dal modo di comportarsi dell'isostricnina coll'acido bromidrico in soluzione alcolica a caldo, e col cloruro di benzoile.

Per azione dell'acido bromidrico sul bromidrato dell'isostricnina in sospensione alcoolica a 125° per tre ore, si ottiene una sostanza cristallina, alla quale, in base ai dati sinora ottenuti, si potrebbe assegnare la formula

$$C_{17}H_{21}N . Br . \left\langle \begin{matrix} COOC_2H_4 \\ NH \end{matrix} \right. . HBr .$$

che gli ordinarî accordi del passato, a cui si sono venuti aggiungendo altri suoni, i quali corrispondono agli armonici delle note che sono presenti negli accordi medesimi. Le parti aggiunte all'armonia non dànno origine, in conclusione, a nuove specie di accordi, ma fanno soltanto variare il colore, il *timbro*, degli accordi ordinarî, conforme alla nota proprietà che hanno gli armonici.

[1] Per accettare questa giustificazione dello Schönberg, bisognerebbe ammettere che i suoni indicati da lui colla comune notazione del nostro temperamento armonico siano veramente gli armonici naturali superiori al sesto e che questi ultimi siano dissonanti, come lo sono in realtà le note che egli vi ha sostituito.

Secondo il presente studio, nè l'uno nè l'altro di tali presupposti è vero. Viene con ciò a mancare la agognata base scientifica alla sua teoria e, insieme, all'attuale sistema armonico.

Meglio, in verità, egli avrebbe fatto a rimanersene entro ai vasti confini dell'estetica, ove musicologi ed artisti compositori hanno un'autorità assoluta, che non a volersi cimentare nei dominî della scienza, a cui è estraneo.

[2] Pervenuta all'Accademia il 21 ottobre 1919.

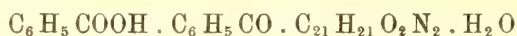
[3] Rendiconti R. Accademia dei Lincei, vol. XXIII, serie 2ª, pag. 480; ibidem, vol. XXI, serie 2ª, pag. 84.

Su questa reazione, nella quale, contemporaneamente alla sostituzione dell'idrossile ed all'addizione dell'alcool al gruppo amidico, avviene una rottura della molecola, verrà riferito in una prossima Nota.

Per azione del cloruro di benzoile sull'isostricnina sospesa in potassa al 10 % si ottengono piccole quantità di una sostanza fondente a 174° assieme a molta isostricnina inalterata: risultati migliori si ottengono benzoilando l'isostricnina in soluzione piridica.

Gr. 5 di isostricnina perfettamente secca si sciolgono in 25 cm^3 di piridina anidra ed alla soluzione, raffreddando esternamente con acqua, si aggiungono gr. 4 di cloruro di benzoile. Il miscuglio si riscalda quindi a b. m. bollente per un quarto d'ora, dopo di che il miscuglio si versa in acqua. Si separa così una sostanza verdastra che in parte si scioglie nell'acqua bollente.

La porzione solubile in acqua bollente è il benzoato del derivato benzoilico dell'isostricnina: cristallizza dall'acqua in aghetti bianchi, fondenti a 127°. Contiene una molecola d'acqua di cristallizzazione.

$$C_6H_5COOH \,.\, C_6H_5CO \,.\, C_{21}H_{21}O_2N_2 \,.\, H_2O$$

Calcolato	C	72,66	H	5,88	N	4,84
Trovato	"	72,40	"	6,32	"	4,54 [1].

La porzione insolubile in acqua bollente non è altro che il derivato benzoilico. Per purificarlo si può cristallizzare ripetutamente dall'alcool in presenza di carbone animale; o meglio si può trasformarlo prima nel cloridrato, che cristallizza assai bene dall'acqua e dall'alcool, e successivamente scomponendo il cloridrato con ammoniaca.

Il derivato benzoilico cristallizza dall'alcool sotto forma di aghetti incolori fondenti a 174°, solubilissimi in piridina ed in benzolo a freddo ed a caldo, assai solubili in alcool bollente, meno a freddo; insolubili in ligroina ed in acqua.

All'analisi si hanno dei numeri alquanto inferiori per il carbonio.

$C_6H_5CO \,.\, C_{21}H_{21}O_2N_2$	Calcolato	C	76,71	H	5,93
	Trovato	"	75,24	"	6,20

Questo benzoilderivato, saponificato con potassa alcoolica o idrolizzato con gli acidi, dà *acido benzoico*. La base non fu possibile però riottenerla pura.

Il peso molecolare fu determinato usando come solvente il benzolo:

M Calcolato 438; trovato 440

[1] Per riscaldamento la sostanza perde, assieme all'acqua, acido benzoico: la perdita di peso è del 5,26 %, anzi che del 3,15 %, come si calcola per una molecola d'acqua.

Il benzoato del derivato benzoilico fondente a 127°, sciolto in acqua bollente e trattato con ammoniaca, fornisce lo stesso derivato benzoilico fondente a 174°.

Il cloridrato si ottiene sospendendo il derivato benzoilico in molta acqua bollente ed aggiungendo acido cloridrico in quantità calcolata.

La base si scioglie e per raffreddamento si hanno piccoli aghetti incolori fondenti a 219°, poco solubili in acqua fredda, pochissimo solubili anche a caldo in acido cloridrico. Questo cloridrato come ho detto più sopra cristallizza assai bene anche dall'alcool.

Anche questo derivato dà numeri alquanto inferiori per il carbonio:

$C_6H\ CO \cdot C_{21}H_{21}O_2N_2 \cdot HCl$	Calcolato	C 70,81 ;	H 5,68
	Trovato	» 69,82 ; 69,32	» 6,08 ; 5,81.

Il cloraurato cristallizza assai bene dall'alcool, sotto forma di aghetti gialli fondenti a 195°.

$C_{21}H_{21}O_2N_2 \cdot CO\,C_6H_5HO \cdot AuCl_3$ Calc. Au 25,31; trovato Au 25,39.

Anche il bicromato si ottiene assai facilmente sotto forma di aghetti sottili giallo-rossastri, pochissimo solubili in acqua fredda, un poco più in acqua bollente.

$(C_{21}H_{21}O_2N_2 \cdot COC_6H_5)_2H_2Cr_2O_7$ Calcolato Cr 9,50 ; trovato 9,45.

Il solfato ed il nitrato sono ambedue ben cristallizzati, ed assai poco solubili.

L'azione fisiologica, che presenta un certo interesse per la presenza del gruppo benzoilico, è decisamente stricnica, e, per le esperienze eseguite dal prof. R. Luzzatto della R. Università di Modena, circa dieci volte inferiore a quella della stricnina.

La presenza dell' idrossile nella molecola dell' isostricnina, che si deve ammettere per il contegno di questa base col bromo, può considerarsi come dimostrato dalle esperienze descritte in questa Nota.

In relazione alla presenza dell' idrossile sta forse il contegno di questo alcaloide col nitrato d'argento ammoniacale e col liquido di Fehling; reattivi che vengono da esso ridotti come ha fatto osservare Pictet [1].

[1] Berichte *38*, 2787.

Chimica. — *Ricerche sopra i nitroderivati aromatici. VIII: Azione della fenilidrazina sul trinitro-p-xilene e sugli eteri del 2, 4, 6-trinitro-m-cresolo* [1]. Nota di Michele Giua, presentata dal Socio G. Paternò.

La fenilidrazina reagisce col trinitro-p-xilene come reagisce coi nitrocomposti aromatici contenenti un gruppo nitrico labile. Questa reazione è stata descritta in una Nota precedente [2]. La reazione fra fenilidrazina e trinitro-p-xilene si compie a caldo, per lunga ebollizione in soluzione alcoolica, nelle seguenti fasi:

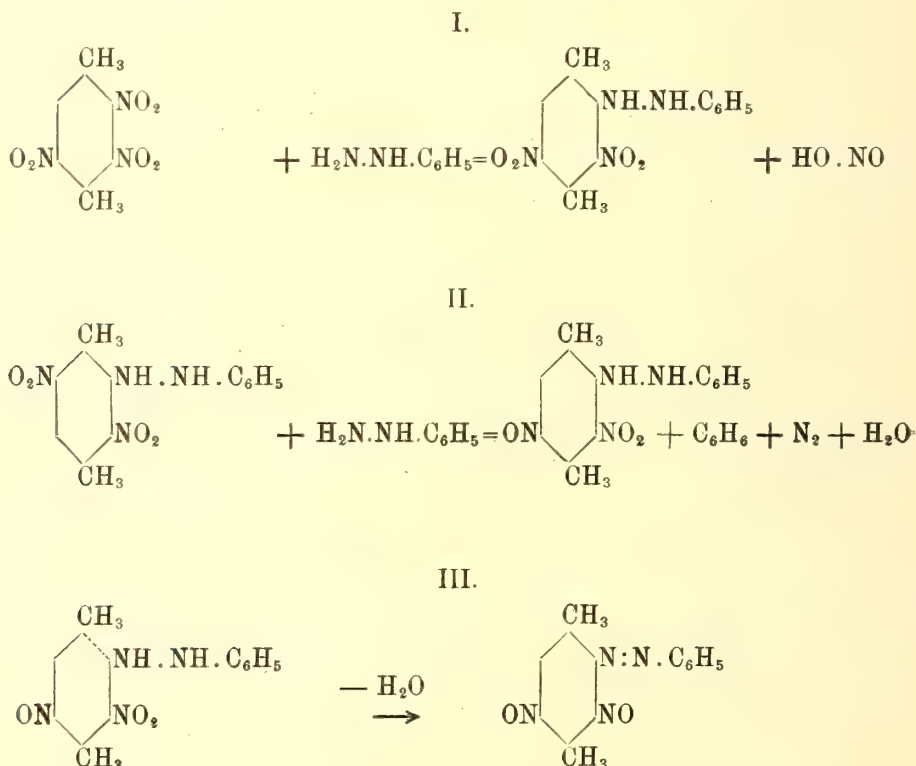
I.

$$C_6H(CH_3)_2(NO_2)_3 \; (O_2N,\ NO_2,\ NO_2) + H_2N.NH.C_6H_5 = C_6H(CH_3)_2(NO_2)_2(NH.NH.C_6H_5) \; (O_2N,\ NH.NH.C_6H_5,\ NO_2) + HO.NO$$

II.

$$C_6H(CH_3)_2(O_2N)(NH.NH.C_6H_5)(NO_2) + H_2N.NH.C_6H_5 = C_6H(CH_3)_2(ON)(NH.NH.C_6H_5)(NO_2) + C_6H_6 + N_2 + H_2O$$

III.

$$C_6H(CH_3)_2(ON)(NH.NH.C_6H_5)(NO_2) \xrightarrow{-H_2O} C_6H(CH_3)_2(ON)(N{:}N.C_6H_5)(NO)$$

Come prodotto finale si ottiene il dimetil-dinitroso-azobenzene; insieme con questo, in piccola quantità, è stata separata una sostanza che molto pro-

[1] Lavoro eseguito nel laboratorio di chimica generale della R. Università di Sassari.

[2] Questi Rendiconti, *27*, I, 247 (1918).

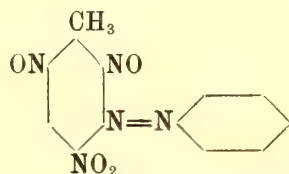
babilmente è il dimetil-nitroso-nitro idrazobenzene, formatosi secondo la reazione II.

La fenilidrazina, reagendo con gli eteri etilico e metilico del trinitro-m-cresolo, dà origine ad una sostanza che per ebollizione con alcool si trasforma, per eliminazione di acqua, nel 2, 6 dinitroso-4, nitro-5, metil-azobenzene seguente:

CH_3

ON NO

N=N

NO_2

Dimetil-dinitroso-azobenzene. — È stato ottenuto con ottimo rendimento da gr. 24 di trinitro-p-xilene, sospesi in 100 cc. di alcool etilico e gr. 23 di fenilidrazina, riscaldando a b. m. per circa un'ora. Cristallizza dal benzene in lamelle gialle lucenti che fondono a 185°.

Gr. 0,1186 di sostanza: cc. 22,8 di N ($t = 24°,5$, $H = 726,9$ mm.)

per $C'_{14}H_{12}O_2N_4$ N% trovato 21,19 calcolato 20,9.

Dimetil-nitroso-nitro-idrazobenzene. — È in lamelle prismatiche colorate in rosso, che fondono a 145° in un olio rossastro pesante che si decompone facilmente prolungando il riscaldamento. Per riscaldamento con alcool si trasforma nel composto precedente.

Gr. 0,1150 di sostanza: cc. 20,5 di N ($t = 23°,5$, $H = 735,3$ mm.)

per $C'_{14}H_{14}O_3N_4$ N% trovato 19,95 calcolato 19,6.

Metil-dinitroso-nitro-azobenzene. — Ottenuto dagli eteri metilico ed etilico del trinitro-m-cresolo e fenilidrazina. Il prodotto grezzo della reazione, che fonde a 132-134°, si cristallizza dall'alcool: si ottengono aghetti setacei, lievemente colorati in giallo, che fondono a 148-149°.

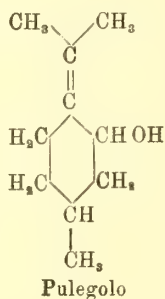
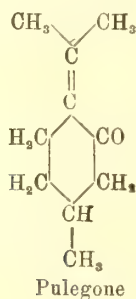
Gr. 0,1133 di sostanza: cc. 23,6 di N ($t = 23°$, $H = 735$ mm.)

per $C'_{13}H_9O_4N_5$ N% trovato 23,35 calcolato 23,40.

Questo lavoro verrà pubblicato per esteso nella Gazzetta chimica italiana.

Chimica. — *Sui prodotti di riduzione del pulegone: il pulegolo* [1]. Nota I del dott. V. Paolini, presentata dal Corrispondente A. Peratoner [2].

Il pulegone, o *Δ* 4-8 mentenone, costituente principale dell'essenza di *mentha pulegium*, fornisce prodotti di riduzione differenti a seconda del metodo che per questa riduzione si adopera. Bekmann e Pleissener [3], riducendo il pulegone con sodio in presenza di etere privo di alcool e di acqua, ottennero in gran parte il mentolo naturale $C_{10}H_{20}O$ sinistrogiro. Haller e Martine [4] applicando invece la riduzione al nichel col metodo Sabatier, ricavarono, a seconda della temperatura a cui operavano, un miscuglio di mentoli, isomeri ottici.

Nella riduzione mediante amalgama di alluminio [5] il pulegone si trasforma integralmente in un prodotto bimolecolare $C_{20}H_{34}O_2$, nel quale sembra sussistere ancora la presenza del carbonilo chetonico. Infine la riduzione del pulegone al corrispondente alcool secondario non saturo $C_{10}H_{18}O$, così detto pulegolo, fu studiata da Thiemann e Schmidt [6] i quali adoperarono la quantità calcolata di sodio in presenza di alcool assoluto per limitare la riduzione al solo gruppo chetonico. Però, a dire degli stessi autori, malgrado queste precauzioni, non potè aversi puro, perchè mescolato sempre ad un po' di mentolo.

```
 CH3\  /CH3              CH3\  /CH3
     C                       C
     ||                      ||
     C                       C
H2C/   \CO              H2C/   \CH OH
   |    |                  |    |
H2C\   /CH2             H2C\   /CH2
     CH                      CH
     |                       |
     CH3                     CH3
  Pulegone                Pulegolo
```

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto chimico-farmaceutico della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 12 settembre.

(3) Ann. de Chem., *262*, 30.

(4) Compt. rend., *140* (1905), 1298.

(5) Berichte, *32*, 3367.

(6) Berichte, *28*, 914.

E questo liquido, miscuglio di mentolo e pulegolo, restò fin dal 1896 nella letteratura col nome di pulegolo senza che i chimici cercassero un metodo per isolare il pulegolo allo stato puro. Anzi il Semler [1], a proposito del pulegolo, così si esprime: « non sappiamo quale quantità di mentolo sia contenuta nel pulegolo del Thiemann, e nuovi studî occorrono per arrivare a conoscere le proprietà del pulegolo puro ». Il metodo generalmente adoperato per la depurazione degli alcool terpenici, e che consiste nella loro eterificazione con anidride ftalica e successiva saponificazione degli ftalati acidi, opportunamente purificati, non viene ricordato a proposito degli eteri del pulegolo, del quale non si trova descritto alcun etere composto. D'altronde la risoluzione del problema per questa via sembrava di non potersi effettuare tenendo presenti gli studî di Arth [2], secondo cui l'etere ftalico acido del mentolo è una sostanza solubilissima in tutti i solventi organici, dai quali non si riesce in alcun modo a separarlo cristallizzato.

Secondo quanto poi io stesso potei osservare, queste difficoltà della separazione degli ftalati acidi da un miscuglio che per lo meno doveva contenerne due, derivati da un mentolo e da un pulegolo, in realtà si accrescevano per la presenza di altri prodotti provenienti dalla riduzione del pulegone. Tuttavia, previe alcune ricerche preliminari di orientamento, sono riuscito a superare i diversi ostacoli cennati, giungendo all'isolamento delle varie sostanze, fra cui gli eteri ftalici in stato di purezza tale da potersi ben cristallizzare. Infatti, il miscuglio grezzo dei prodotti di riduzione del pulegone mediante sodio, oltre a composti di natura alcoolica, contiene anche, ed in proporzione non lieve (30 %), un prodotto resinoso, la cui formazione pare sia sfuggita a Thiemann e Schmidt, da cui fin da principio devono essere eliminati gli alcool, senza di che tutte le ulteriori operazioni resterebbero intralciate. La distillazione del miscuglio grezzo in corrente di vapore separa facilmente i prodotti alcoolici volatili, i quali rappresentano a loro volta una mescolanza di almeno tre sostanze, cioè due mentoli saturi ed un pulegolo non saturo. Ora la resina gialla dell'aspetto della colofonia è, secondo una determinazione crioscopica in benzolo, un prodotto bimolecolare $C_{20}H_{34}O_2$ che per i suoi caratteri fisici e chimici sembra identica al bis-pulegone ottenuto da Harries e Roeder [3] riducendo il pulegone con amalgama di alluminio.

La costituzione è ancora incerta; ma trattasi evidentemente anche qui di un miscuglio di isomeri ottici, forse di natura chetonica (pinacone).

La frazione alcoolica separata per distillazione in corrente di vapore, e convenientemente disseccata, si eterifica a freddo con anidride ftalica se-

[1] Die aëtherischen Oël III, Bd. 667.
[2] Ann. Ch. Phys., IV, *7*, 483.
[3] Berichte, *32*, 3367.

guendo la tecnica da me già usata per « gli alcool tanacetili » (1). Il miscuglio grezzo degli ftalati, molle, sciropposo, viene sottoposto ad una serie sistematica di frazionamenti e di successive ricristallizzazioni dall'etere di petrolio, arrivandosi così ad un etere acido ben cristallizzato, incolore, fortemente sinistrogiro, con $[\alpha]_D = -107°,50'$ fusibile a 107°-108°.

Tale prodotto devesi considerare come sostanza unica perchè, comunque ricristallizzata, non muta affatto il suo punto di fusione nè il suo potere rotatorio specifico, ricavandosene per saponificazione con potassa alcoolica un alcool solido, fusibile a 44°, dotato di forte odore di mentolo, di $[\alpha]_D = -49°.70'$, e di punto di ebollizione 214°, nonchè di tutte le altre proprietà del mentolo naturale: viene perciò caratterizzato per *l* mentolo dell'essenza di menta piperita.

Le acque madri di etere di petrolio usato per frazionamento, contengono gli altri ftalati acidi che però si ricavano come un denso sciroppo ormai incristallizzabile; questo in soluzione alcoolica si lascia facilmente salificare con stricnina. Da questa soluzione alcoolica, l'etere etilico, aggiunto, separa rapidamente un sale di stricnina, bianco, ben cristallizzato in aghi, che fonde costantemente a 206°, con $[\alpha]_D = -11°,7'$.

Lo ftalato acido puro che se ne ottiene, e che fonde pure a 107°, fornisce però. per saponificazione con potassa alcoolica, un mentolo destrogiro solido, inodoro, con $[\alpha]_D = +22°,00$.

Il sale di stricnina rimasto in soluzione nel miscuglio alcoolico etereo, e che deriva dal terzo alcool, il pulegolo, è sciropposo ed incristallizzabile, onde è necessario di eliminare la stricnina e ripassare nuovamente allo ftalato acido. A tale scopo lo sciroppo sciolto in alcool viene aggiunto di acido cloridrico diluito per salificare tutta la stricnina; per aggiunta ulteriore di acqua, poi, si separa lo ftalato acido di pulegolo, dapprima molle ma che a mano a mano indurisce, e cristallizza dall'etere di petrolio in aghi soffici, setacei, fusibili a 112°. con $[\alpha]_D = -86°,84'$; per saponificazione con potassa alcolica dà *l*-pulegolo dal p. f. 46° 47°, p. eb. 209°-210°, con $[\alpha]_D = -54°,05'$..

(1) R. Accademia dei Lincei, vol. XX, serie 5a, fasc. 10°.

Petrografia. — *Ricerche petrografiche sul vulcano di Roccamonfina* [1] Nota di U. PANICHI, presentata dal Corrisp. F. MILLOSEVICH [2].

Con questa Nota do notizia di uno studio petrografico da me eseguito sulla regione vulcanica di Roccamonfina, studio che fu iniziato quattro anni or sono, durante i quali subì, per forza maggiore, varie interruzioni, e che ora è pronto per la stampa.

Il più importante studio geologico d'insieme su questo vulcano è quello del Moderni (1887); esso ha servito di base agli autori successivi, che fecero solo visite brevi in qualche punto della regione. Ricerche petrografiche si devono specialmente a Bucca, a Rosembusch, a Washington.

Ma era ancora aperto un largo campo di studio, sia per completare o rettificare la diagnosi di alcune roccie, sia perchè altre erano fino ad ora passate inosservate, sia per applicare i risultati petrografici allo studio geologico tuttora incompleto. A quest'opera ho cercato di portare il mio contributo, pur riconoscendo che, alla vastità della regione da studiare (oltre 200 km^2), erano purtroppo inadeguati i mezzi di cui potevo disporre.

Partendo dai terreni circostanti e sottostanti alle formazioni del Roccamonfina, vi erano incertezze specialmente in relazione alle formazioni tufiche campane, che A. Scacchi ritiene sovrapposte, Covelli, Deecke e De Lorenzo invece ritengono sottoposte al Roccamonfina; che Breislak, L. Pilla, Moderni, Johnston Lavis ritengono, in gran parte, provenienti dal Roccamonfina, mentre il Ricciardi, il Deecke, il De Lorenzo le ritengono provenienti dai Campi Flegrei. Il mio modesto contributo su questo punto mi porta ad essere d'accordo, in massima, con Deecke e con De Lorenzo. Le mie osservazioni sul terreno e su campioni raccolti mi hanno permesso, ad es., di stabilire la precedenza cronologica di alcuni tufi (grigi a scorie nere) giacenti alla base del M. Massico, rispetto ai prodotti delle eruzioni del Roccamonfina.

In particolare ho avuto la fortuna (approfittando degli scavi eseguiti dalle Ferrovie per fondare un ponte sul Volturno, presso Cancello Arnone) di scoprire un profondo banco di lava trachitica [3] e di accertare che essa

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Siena.

[2] Pervenuta all'Accademia il 18 ottobre 1919.

[3] Vedi V. Hannau e G. Bongiovanni, *Ponti sul Garigliano e sul Volturno della direttissima Roma-Napoli*. Riv. tecnica delle ferrovie ital., anno IV, vol. XI, N. 5., maggio 1917.

è della medesima natura dei blocchi scoriacei nerastri disseminati nel tufo grigio campano. Questa formazione dimostra che, a distanza notevole, sia dai Campi Flegrei, sia dal Roccamonfina, si ebbero eruzioni laviche, probabilmente coeve di quelle analoghe dei Campi Flegrei, ma, senza dubbio, anteriori a quelle del vulcano di Roccamonfina.

La classificazione del Moderni in tre fasi successive (leucitica, trachitica, basaltica) dell'attività del nostro vulcano corrisponde nelle linee generali, ma schematizza, in modo eccessivamente semplice, la storia di esso. Le lave presentano molte varietà e termini di passaggio; le eruzioni laviche sono alternate, come in tutti i vulcani, con esplosioni di materiale frammentario. Lo studio del Moderni è specialmente debole in rapporto ai tufi. Così, ad es., i tufi di Pratolongo, tanto ricchi di sanidini, non possono essere riferiti alla fase basaltica; ma l'A., dalla sola osservazione che ess derivano da eruzioni molto recenti, deduce che non possono appartenere altro che alla terza fase, cioè alla basaltica. Così pure i tufi della pianura Campana non possono essere riferiti al vulcano di Roccamonfina e, tanto meno, alla fase leucitica.

Un errore inverso a quello del Moderni ha invece commesso A. Scacchi, che ritenne tufi campani (solo perchè ricchi di sanidini) quelli di Torano, mentre invece risulta in modo evidente che essi appartengono alla formazione di Roccamonfina.

Le leucititi, alle quali il Moderni assegna il 1° periodo della 1ª fase, si ritrovano anche in seguito: ad es. io ho osservato una roccia sopra Li Paoli, che è una leucitite e che riposa sopra le leucotefriti della Serra.

Un'altra roccia importante alla base occidentale di M. Mattone (Grottoni) ho osservato e determinato come una leucitite nefelinica; orbene in essa, che è posteriore alle leucotefriti, ho trovato inclusi di una trachite leucitica, e la trachite identica si trova (e sfuggì ai precedenti osservatori) in cima a M. Mattone.

La superficie del gran cono non è ricoperta da un'unica, immensa colata leucotefritica, che sarebbe, secondo il Moderni, quella che provocò il franamento del gran cono; nè questo franamento deve necessariamente supporsi come un'unica grande catastrofe. Si osservano sulla Serra varie colate leucotefritiche ed anche leucititiche di differenti caratteri e di differente acidità.

Le leucofonoliti (leucitofiri del Moderni, riferiti da lui alla 2ª fase) segnano un passaggio alle trachiti. Rocce di tipo trachitico si ritrovano in molte delle dentature del demolito fianco orientale del cono, e ciò fa pensare che tali eruzioni trachitiche siano anteriori allo slabbramento; così pure sul fianco occidentale, che è ancora in piedi, si osservano colate trachitiche (Castello, S. Maria a Valogno ecc.) giacenti sulle tefriti: esse corrispondono a fenditure del gran cono, e queste si producono di regola quando il cono raggiunge notevole altezza; e poichè le trachiandesiti del S. Croce

sono invece posteriori o contemporanee al franamento del gran cono, ne risulta che le dette eruzioni trachitiche sono anteriori a quelle trachiandesitiche. Viceversa certe emissioni trachitiche periferiche, come ad es. quella del M. Ofelio, potrebbero benissimo essere posteriori alle trachiandesiti.

I basalti in generale sono posteriori alle altre lave; per alcuni è evidente la sovrapposizione; altri contengono inclusi; così, ad es., nel basalto di Torisichi ho trovato inclusi andesitici. Ma non si può affermare che la finale attività del vulcano abbia esclusivamente prodotto rocce basaltiche; così ad es. ho scoperto a M. Ofelio i prodotti di una eruzione di tipo picritico, che, senza dubbio, è fra le ultime.

Le rocce enumerate dal Moderni sono state oggetto di studio per parte mia; i brevi limiti concessi a questa Nota non mi permettono di riassumere qui i dati delle determinazioni microscopiche e delle analisi chimiche. Alle dette rocce ho potuto aggiungerne molte altre. Così, ad es., una roccia passata finora inosservata, forse perchè nell'aspetto ricorda le trachiandesiti in mezzo alle quali essa si è fatta strada, l'ho scoperta a mezza costa del M. S. Croce, sul versante che scende verso il paese di Roccamonfina. Essa è una leucotefrite alterata, con biotite e poca olivina (basanitica) e la sua presenza qui ha notevole importanza.

Notevole per l'entità della colata è la leucitite degli Aurielli, che è un poco più acida di quella di Mortola e che segna un passaggio alle leucotefriti basiche.

Ho già nominato la trachite leucitica di M. Mattone. Essa riposa sulle leucotefriti. Di rocce del gruppo trachitico ne ho trovate molte varietà; alcune sono a struttura eminentemente porfirica, come quella a grossi cristalli ortoclasici del M. Atano e quella che ho rinvenuto a Migliarese, in grossissimi blocchi affioranti; probabilmente scavando si troverà la colata in posto. Appartiene allo stesso tipo la trachite di M. Ofelio, nominata anche dal Moderni. Altre rocce trachitiche, talora tendenti al tipo andesitico, sono quelle del versante occidentale. Ricordo poi anche una trachite formante un conetto, di cui non parla nessun autore, e cioè il M. Riella, ai piedi del M. Atano. Sul M. S. Maria ho osservato una roccia con grosse segregazioni basiche, molto simile a quella già nota del M. Ulici.

Un'altra piccola eruzione è quella sopra ricordata, i cui prodotti giacciono a N-O del M. Ofelio, in contatto con la preesistente massa trachitica. Essi consistono in una grande quantità di cristalli di augite, sciolti, e di blocchi olivin-augito-biotitici. Si tratta, evidentemente, di una delle più recenti eruzioni a tipo esplosivo. Però i tufi neri, prodotti da tale eruzione, vengono in parte coperti dagli strati di conglomerato e di pomice che abbondano a ponente di Sessa Aurunca.

Le pomici sono assai frequenti nella regione aurunca, talora in formazioni intercalate e interpretabili come eruzioni locali (forse di tipo ultra-

vulcaniano), come, ad es., quelle alla base di M. Caruso (basaltico); ma spesso in estesi banchi nella pianura, e allora possono non appartenere al vulcano di Roccamonfina giacchè è supponibile che in fasi di subsidenza della pianura alle acque del mare si sieno qua e là raccolti anche materiali galleggianti e provenienti da altri centri vulcanici.

Ai blocchi, o rigettati, o inclusi in rocce, è dedicato un capitolo. Blocchi plagioclasici e pirosseno-micacei, con o senza feldspato, simili a quelli del Vesuvio, sono abbondanti a Roccamonfina, sia come blocchi rigettati (M. Ofelio), sia come blocchi omeogeni (ad es. quelli per segregazioni nella trachite di M. Ulici o in quella del Castello presso S. Martino), sia anche come blocchi enallogeni, specialmente nelle rocce leucitiche. Di questi se ne trovano assai abbondantemente alle falde del gran cono, liberati da rocce ormai decomposte; e se ne trovano tuttora inclusi, ad es., nelle leucotefriti. I blocchi di Roccamonfina però non presentano quella ricchezza di bei minerali che si osserva nei blocchi del Somma; tuttavia ne ho raccolti alcuni notevoli, con bei cristalli di spinello, di titanite ecc.

Notevole è l'abbondanza di blocchi erratici di sanidinite bianca, friabile, presso Aconorsi; questa scoperta mi ha guidato al rinvenimento di una piccola colata di sanidinite, in parte nascosta dal terreno dei campi, sovrapposta alle tefriti leucitiche.

Dalle cose qui riassuntivamente esposte risulta una certa complessità nell'evoluzione magmatica del vulcano di Roccamonfina. In linea generale abbiamo prima un progressivo aumento di acidità e poi una progressiva diminuzione. Si potrebbe supporre che un magma, di carattere eminentemente salico, abbia, per lungo tempo, affluito in un bacino magmatico di carattere femico. Ma convien notare altresì che le rocce, le quali prima sono di tipo alcalino, vanno poi passando al tipo alcali-calcico. Non ho creduto opportuno di spingermi in discussioni esplicative, che sono premature perchè insufficientemente basate sulla osservazione.

Chiudo questa Nota accennando anche ad un mezzo diagnostico da me seguìto. Quando nelle presenti ricerche ho dovuto determinare gli indici di rifrazione degli elementi (specialmente feldspatici) delle rocce, ho adoperato il metodo delle essenze; ma mi son valso anche di una modificazione da me apportatavi e che mi sembra, in molti casi, assai utile, giacchè col mio dispositivo, invece di ottenere due valori, tra i quali è compreso l'indice cercato, si ottiene senz'altro il valore di questo. Io determino infatti l'indice di rifrazione di un liquido a indice variabile, cogliendo il momento in cui questo eguaglia il valore dell'indice del granulo immersovi.

Patologia vegetale. — *La forma ascofora* (*Microsphaera quercina*) *dell'oidio della quercia nel Bolognese.* Nota del prof. VITTORIO PEGLION, presentata dal Socio G. CIAMICIAN [1].

L'unico esemplare superstite di alcune quercie ottenute da seme, le quali otto anni or sono mi consentirono di chiarire per primo il meccanismo dello svernamento dell'*Oidium quercinum* Thüm., allo stato di parassita delle perule e del cono vegetativo delle gemme, mi ha procurato il materiale con cui precisare le nostre cognizioni intorno alla biologia dello stesso parassita e cioè la differenziazione della forma periteciale.

Sono stato indotto ad intensificare le indagini rivolte alla scoperta di questi organi — cercati invano nelle precedenti annate — dall'andamento della stagione autunnale, in quanto ad un periodo di caldo eccezionale è seguìto un brusco progressivo rincrudimento di temperatura culminato verso la metà di ottobre in cui si ebbero varie gelate notturne [2].

L'esame delle foglie di quercia — su cui erasi, come di consueto, verificata una rigogliosa ripresa di vegetazione dell'oidio — mi svelò sino dal 15 ottobre la presenza di numerosi peritecî, assai minuti, disseminati sulle chiazze miceliali su entrambe le pagine foliari, specialmente sulla pagina superiore: studiandone la distribuzione col binoculare Zeiss, si distinguono i peritecî in via di formazione, che appaiono quali minuscole sferuline giallo-rossiccie, dai peritecî maturi, neri, poco o punto aderenti al bisso miceliale ove si sono differenziati.

Al microscopio, i peritecî maturi presentano un diametro compreso tra 100 e 130 μ; la periferia è rivestita da una raggiera di fulcri in numero variabile da 12 a 20 e più; di lunghezza diversa (generalmente uguale al diametro del peritecio). L'apice di ogni fulcro può essere costituito da una semplice divisione dicotomica, come può essere, ed è la più parte delle volte, ripetutamente dicotomizzato. I peritecî stessi si aprono facilmente a contatto dell'acqua e ne escono aschi tetraspori che misurano 50-60 » 28-30 μ; le spore ialine, guttulate, misurano 25-30 » 10-12 μ.

(1) Pervenuta all'Accademia il 25 ottobre 1919.

(2) Sono costretto ad adottare quest'indicazione emp'rica, non potendo sostituirvi le necessarie osservazioni termometriche: quelle che potrebbero dedursi dai rilievi dell'Osservatorio meteorico sarebbero prive di ogni significato, essendo compiute a 28 m. di altezza, tantochè nei giorni anzidetti i minimi registrati non scendono al disotto di $+5 - 6^{\circ}$.

Indagini immediatamente compiute nei dintorni di Bologna mi portarono a rinvenire abbondantissime le medesime fruttificazioni su foglie di quercia e di cerro raccolte in varie località, confermando pertanto che il fenomeno era generalizzato e correlativo assai probabilmente alle vicende climateriche di questo rigido inizio di stagione autunnale. Questa prima constatazione positiva non deve certo far escludere che in passato sia mancata la forma ascofora dell'oidio: i peritecî in questione sono minutissimi e sfuggono facilmente ad un esame superficiale; maturi, essi sembrano facili a disperdersi in virtù della poca adesione che presentano cogli avanzi miceliali e dello sviluppo dei fulcri, onde devono essere facilmente asportati dalle correnti aeree.

Sistematicamente considerato, questo fungo mi sembra corrispondere perfettamente alla *Microsphaera quercina* (Schw.) Burr., nel senso attribuito a questa indicazione specifica da Arnaud e Foëx ai quali spetta il merito di aver scoperto per primi nel dicembre 1912 la forma periteciale su foglie di quercia colpite da oidio nel mezzogiorno della Francia. Come *M. quercina*, Arnaud e Foëx intendono raggruppare provvisoriamente, secondo un criterio biologico, le diverse *Microsphaera*, parassite delle quercie in Europa e nell'America settentrionale, fra le quali è bene menzionare la forma raccolta nel 1875 a Parma dal Passerini. Si tratta di forme descritte da varî autori come entità specifiche ma che non reggono ad uno studio comparato se limitato ai caratteri morfologici dei peritecî, ond'esse, prima dal Winter e successivamente dal Salmon, furono raggruppate in una specie collettiva, la *Microsphaera Alni*. Integrandone lo studio morfologico coll'estendere le indagini allo stato imperfetto, conidiale, ma soprattutto riprendendone lo studio biologico specialmente in rapporto alla specializzazione del parassitismo, sarà possibile di risolvere i dubbî espressi circa il valore sistematico delle diverse specie e soprattutto di chiarire l'origine, che rimane tuttora così incerta, della epidemia che tanti danni ha recato ai boschi di quercia dell'intera Europa.

Chimica Fisiologica. — *Intorno all'attività riduttrice delle radici delle graminacee: la riduzione del nitrato di calcio per le radici delle graminacee* (¹). Nota I di Giovanni Sani, presentata dal Socio Koerner (²).

Secondo il Gautier (³) il primo prodotto della riduzione dei nitrati nelle piante sarebbe l'acido cianitrico ed agente di tale riduzione l'aldeide formica generata dalla decomposizione dell'acido carbonico sotto l'influenza dei raggi del sole; l'acido prussico poi, unendosi ad aldeide formica eccedente e ad altri idrati di carbonio, fornirebbe i primi amminoacidi, elementi costruttivi degli albuminoidi. Questo modo di vedere trova appoggio nella grande diffusione dell'acido cianitrico, talora in notevoli quantità, nelle piante, posta in rilievo, in epoca più recente, dai numerosi lavori del Treub e dei suoi collaboratori, mentre l'importanza di questo acido nelle sintesi organiche artificiali fa pensare che fatti analoghi possano verificarsi in quelle che avvengono nei vegetali.

Il Leuw nei suoi lavori (⁴) accenna alla facoltà riduttrice, pel nitrato di argento in soluzione alcalina, di una albumina attiva che esisterebbe in alcune cellule vegetali, ed opina che sia l'ammoniaca il primo prodotto della riduzione dei nitrati, questa con aldeide formica darebbe luogo a formazione di asparagina, punto principale di partenza, secondo lui, per la sintesi di tutte le sostanze proteiche, passando però attraverso ad una ipotetica aldeide aspartica. Questa ipotesi, certo ingegnosa, male si accorda con le nostre cognizioni di chimica organica.

Meyer V. ed E. Schultze, nel 1884 (⁵), ammettono che la riduzione dei nitrati nelle piante dia luogo a formazione di idrossilammina ed insistono nella loro ipotesi, quantunque le prove fatte di nutrizione di piante con questa sostanza abbiano dato risultato negativo, perchè essa, come l'aldeide formica, si comporta come un veleno energico; ma, dicono, la sua presenza

(¹) Lavoro eseguito nel laboratorio chimico dell'Istituto superiore agrario di Perugia.

(²) Pervenuta all'Accademia il 19 ottobre 1919.

(³) Armand Gautier, *Cours de chimie*, tomo III; *Chimie biologique*, Paris, pp. 61-68.

(⁴) Pflögers Archiv. f. Ges. Physiologie, tomo 22, pag. 675; Berichte d. deutsch. Chem. Ges., 1881, pag. 2508; ibid. 1890, pag. 675; Chemiker-Zeitung, 1895, pag. 143.

(⁵) Berichte d. d. Chem. Ges., 1884, pag. 1564.

è, parimenti a quella della aldeide formica, effimera, cioè reagisce coi materiali contenuti nel succo cellulare e mentre si forma scompare. Anche qui manca ogni conferma sperimentale, chè tale sostanza non venne mai afferrata, nè alcun prodotto da essa generato fu riscontrato finora presente nelle piante; se ciò fosse, si comprende, dovrebbero contemporaneamente aumentare nei tessuti l'azoto ammidico e l'entità quantitativa riducente dei tessuti.

Il Bach (1) conferma ed estende l' ipotesi dei sullodati autori preoccupandosi in primo luogo di sapere se sono i nitrati od il loro acido nitrico che vengono ridotti nelle foglie delle piante, e mentre Berthelot e André (2) ritengono che la riduzione dei nitrati avverrebbe nelle foglie per opera dell'aldeide formica e di altre aldeidi o chetoni del succo cellulare, il Bach ammette che tale riduzione sia riservata all'aldeide formica unicamente, che con i nitrati darebbe idrossilammina; questa, unita alla formaldeide eccedente, darebbe formaldossima, che finirebbe per dare formiamide, la sostanza con la quale le piante formerebbero le loro sostanze proteiche.

Se reazioni di laboratorio hanno dato ragione al Bach, come egli afferma, nelle piante non venne riscontrata ed isolata finora alcuna delle sostanze di cui esso parla.

Siamo dunque puramente nel campo delle congetture, spesso discordi, per tutto ciò che riguarda l' importantissimo argomento, cui è legato uno dei più salienti fatti fisiologici della vita vegetale e che ha riflessi di pari valore per l'economia mondiale, non sappiamo cioè con precisione ove in realtà abbia sede la riduzione dei nitrati nelle piante [che, secondo Godlewski (3) dalle sue esperienze sul frumento, potrebbe operarsi tanto allo scuro quanto alla luce], quali siano le sostanze riduttrici dei nitrati nell'organismo vegetale, se siano cioè gli ordinari riduttori o speciali sostanze probabilmente vive, e non abbiamo alcun fatto chimico che ci dimostri quali siano il primo o i primi prodotti organici azotati che dai nitrati derivano.

Secondo lo Schimper (4), l'assimilazione dei nitrati avviene nelle foglie per l'azione della clorofilla e della luce e nelle foglie si adunano molti nitrati. Tale constatazione avevano già fatto anche Berthelot e André (5) che trovavano diffusissimi i nitrati nelle piante.

Perchè la presenza di quantità relativamente ingenti di nitrati in un determinato organo di una pianta non significa certo che in quel punto queste sostanze siano di preferenza utilizzate anzichè altrove, come taluni mostrano di ritenere, mentre probabilmente non si tratta che di depositi tem-

(1) Ginevra, 1896.

(2) Comptes rendus, 1884, tome 93, pag. 591.

(3) Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Krakan, mars 1817, pp. 104-121.

(4) Botan. Zeit., 1888.

(5) Annalés de physique et de chemie, 6ème sésie, tom' VIII.

poranei, pronti a servire in varî punti forse lontani: quindi anche la loro scomparsa non implica utilizzazione nel luogo ove poco prima esistevano, dovendo considerare i nitrati quali le sostanze osmoticamente più movibili, come pure debbono esserlo i materiali relativamente semplici che per loro riduzione si debbono formare, i quali potranno portarsi agevolmente ove ne sia richiesta la presenza per la edificazione di sostanze organiche azotate complesse. Logicamente è ammesso l'accumulo di sostanze là ove non esistono cause di loro alterazione, e se il Berthelot trova adunati molti nitrati sulle foglie di alcune piante, ciò vuol dire semplicemente che nelle foglie essi non si utilizzano, almeno in quei determinati momenti fisiologici.

Anche prima di avere la conferma sperimentale che nei tubercoli radicali delle leguminose si formano amminoacidi a spese degli albuminoidi che costituiscono i microorganismi stessi viventi in simbiosi con le piante ospiti partendo dall'azoto elementare dell'atmosfera [1] [nelle radici delle graminacee non esistono aminoacidi, o, almeno, con i mezzi ordinarî di loro ricerca a me non fu possibile di constatarne la presenza], io sono sempre stato del parere che l'ufficio delle radici non si limiti a quello, certo immensamente importante, di semplici organi di assunzione di sostanze nutrienti, e che i primi e forse non i meno importanti lavori chimici che interessano le piante abbiano precisamente quivi, almeno in parte, la loro sede.

Il fosforo, lo zolfo, il potassio, l'azoto, che noi prestiamo alle piante sotto forma di combinazioni ossigenate non li troviamo poi che in piccola parte, in poche sostanze, sempre presenti in piccole quantità, uniti direttamente all'ossigeno nelle nuove combinazioni che affettano nelle piante, mentre per la maggior parte assumono forme assai più povere di ossigeno; si pensi che ai processi di riduzione in natura corrisponde accumulo di nuove sostanze organiche e che questi rappresentano i fenomeni più complessi ed i meno noti finora e ancor forse per un tempo non breve.

Ciò non toglie che anche con le più umili forze non si debba tentare di concorrere a risolvere l'ardua, complicata questione ed a diminuirne così le numerose incognite.

[1] Sani, R. Accad. dei Lincei, agosto 1910.

Patologia. — *Ricerche sperimentali sulle cause che determinano la refrattarietà nei trapianti.* V: *Nuove ricerche sulla azione disintegratrice del siero di sangue di una specie animale per le proteine dei tessuti (nervi) di altra specie* (¹). Nota di

RMANDO ALBANESE, presentata dal Corrisp. G. GALEOTTI (²).

In precedenti Note sono state esposte le ricerche sulla esistenza di fermenti disintegrativi, nel siero di sangue di una specie animale refrattaria per le proteine di tumori spontanei in un'altra specie (³) e le ricerche sulla esistenza di fermenti proteolitici, nel siero di sangue di una specie animale, per le proteine di tessuti (pelle, muscoli) appartenenti ad una specie animale differente (⁴).

Da queste ricerche è risultato:

1°) che il siero di sangue di ratto possiede proprietà proteolitiche per i tumori spontanei del topo, verso i quali l'organismo del ratto è refrattario;

2°) che il siero di sangue delle singole specie animali possiede proprietà disintegrative per i tessuti di animali di specie diversa, ciò che fa pensare che nell'organismo vivente esistono fermenti proteolitici preformati per i tessuti di organismi di specie diversa.

Tali fermenti « preformati » (Scaffidi) nell'organismo di ciascuna specie animale, cioè fermenti non specifici di reazione, come sarebbero quelli consecutivi alla introduzione nell'organismo di proteine eterogenee, potrebbero rappresentare un ostacolo all'attecchimento dei tessuti eterogenei trapiantati e ciò indipendentemente dalla possibile formazione nell'organismo dei fermenti « specifici di reazione » studiati da Abderhalden.

Occupandomi della questione controversa riguardante l'opportunità di trapiantare frammenti di nervi allo scopo di favorire il ripristino della continuità anatomica e della funzione tra i due monconi di un nervo resecato (ricerche che ho tuttora in corso), ho creduto opportuno di saggiare se accade per i nervi quello che accade per la cute ed i muscoli, posti a contatto con siero di sangue di animali di specie diversa.

(¹) Lavoro eseguito nell'Istituto di patologia generale della R. Università di Palermo, diretto dal prof. Vittorio Scaffidi.

(²) Pervenuta all'Accademia il 20 agosto 1919.

(³) V. Scaffidi, Rend. R. Acc. Lincei, vol. XXV, sem. 1°, pag. 363 (1916).

(⁴) A. Albanese, Rend. R. Acc. Lincei, vol. XXV, sem. 2°, pag. 501 (1916).

La presenza dei prodotti di disintegrazione delle proteine fu ricercata col metodo della dialisi e della ninidrina di Abderhalden, così come è stato dettagliatamente esposto in un mio precedente lavoro (¹).

Le ricerche sono state compiute sul cane, sulla cavia e sul coniglio; di essi venne reciprocamente ricercato se il siero di sangue di individui di ciascuna delle specie suddette, possedesse proprietà disintegrative per le proteine dei nervi di individui delle altre specie.

Ho ricercato prima, in ricerche preliminari, quali sono gli effetti della digestione tra siero di sangue di cavia, nervi della stessa cavia, nervi di altra cavia e nervi di un animale di altra specie (cane).

TABELLA I.

Numero dell'esperimento	Permanenza in termostato a 37° h.	RISULTATI							
		Siero cavia + tessuti stessa cavia		Siero cavia + tessuti altra cavia		Siero cavia + tessuti cane		Controllo: Siero	*Osservazioni*
		muscoli	nervi	muscoli	nervi	muscoli	nervi		
1	16	—	—					—	In tutti gli esperimenti le prove di controllo dei varii tessuti in H_2O distillata sterilizzata diedero risultati negativi.
2	16	—	—					—	
3	16	—		—		+		—	
4	16	—		—		+		—	
5	16		—		—		+	—	
6	16		—		—		+	—	

I risultati sono riportati nella tabella I, dalla quale risulta che manca qualsiasi azione proteolitica nel siero di sangue della cavia per i nervi della stessa cavia e per i nervi di altri individui della stessa specie; mentre si ha disintegrazione di proteine per i nervi di cane.

In seguito a questi risultati, ho compiuto una serie di esperimenti tra siero di sangue e nervi di animali di specie diversa.

In ciascun esperimento sono state disposte le seguenti prove:

1°) una prova di digestione con il siero di sangue dell'animale, di cui si voleva saggiare l'azione proteolitica, ed i nervi di un animale di specie diversa;

2°) una o più prove di digestione del solo siero, per il controllo della reazione;

(¹) Albanese, *Sulla esistenza di fermenti proteolitici nel siero di sangue di una specie animale per le proteine di tessuti appartenenti ad una specie animale differente.* Tumori, anno V, fasc. 1 (1917).

3°) una prova di controllo con frammenti di nervi in acqua distillata sterile.

Per indicare l'intensità della reazione mi sono avvalso dei segni grafici (+, —) indicando con — la reazione negativa, con + una leggera colorazione, nettamente rilevabile, e con la ripetizione del segno + una maggiore intensità della colorazione bleu violacea.

Con il segno + — ho indicato quell'accenno a colorazione, che non può valutarsi come positiva, anche per la considerazione che, spesso, la si trova nel dializzato del solo siero di sangue normale.

Le ricerche eseguite si possono distinguere nei seguenti gruppi:

1°) azione del siero di sangue di coniglio sui nervi di cane;
2°) azione del siero di sangue di coniglio sui nervi di cavia;
3°) azione del siero di sangue di cavia sui nervi di cane;
4°) azione del siero di sangue di cavia sui nervi di coniglio;
5°) azione del siero di sangue di cane sui nervi di coniglio;
7°) azione del siero di sangue di cane sui nervi di cavia.

I risultati sono riportati nella tabella II.

TABELLA II.

Numero dell'esperimento	Siero di sangue di	NERVI DI		
		Cane	Cavia	Coniglio
	Coniglio			
7 - 13		+	+ (debole)	
8 - 14		+ + +	+ +	
9 - 15		+ + +	+ +	
10		+		
11		+ + +		
12		+		
16			+ +	
17			+ +	
	Cavia			
18 - 26		+ + +		+ +
19 - 27		+ + +		+ +
20 - 28		+ +		+
21 - 29		+ + +		+ +
22 - 30		+ + +		+ +
23 - 31		+ + +		+ +
24		+ + +		
25		+ + +		
32				+ +
	Cane			
33 - 39			+	+
34 - 40			+	+
35 - 41			+ (debole)	+ (debole)
36 - 42			+ (»)	+ (»)
37 - 43			+	+
38			+	
44				+
45				+
46				+

Dai risultati delle ricerche riportate nella tabella II si possono trarre le seguenti considerazioni:

1°) il siero di sangue di coniglio possiede proprietà disintegrative per le proteine dei nervi periferici del cane e della cavia;

2°) la stessa proprietà, in misura spiccata, a giudicare dalla intensità della reazione alla ninidrina del liquido di diffusione, possiede il sangue di cavia per le proteine dei nervi di cane e per quelle dei nervi di coniglio;

3°) capacità disintegrativa per le proteine dei nervi del coniglio e della cavia possiede anche il siero di sangue del cane.

La presenza dei fermenti proteolitici nel siero di sangue di una specie animale, per le proteine dei nervi di una specie animale diversa, si può ammettere che rappresenti un ostacolo all'attecchimento dei trapianti nervosi eterogenei, i quali, come è noto (Merzbacher, Pitres, Ingebrigtsen, Zalla), a differenza degli auto ed omogenei, vanno sempre incontro ad un processo di necrosi, nell'organismo ospite.

La differente intensità di reazione, notata constantemente nelle diverse serie di ricerche comparative, fa pensare ad un diverso comportamento dei fermenti stessi verso i tessuti eterogenei, probabilmente in rapporto alle differenze ed alle affinità di specie e di razza.

Biologia. — *Correlazioni e differenziazioni* [1]. Nota III di Giulio Cotronei, presentata dal Socio Battista Grassi [2].

Nelle due Note [3] precedenti ho osservato che le prime (per il grado) modificazioni che si riscontrano nelle larve a litio di Anuri sono nella regione cefalica, nelle fossette olfattive e nel vestibolo boccale.

Ricordo con qualche nuovo dettaglio i fatti brevemente enunciati:

Mentre il territorio olfattorio va riducendosi (una sola fossetta mediana) si nota come la riduzione del vestibolo boccale si manifesta gradatamente. Si ottengono reperti (mi riferisco al *Bufo vulgaris*) i quali mostrano che tutte le parti del vestibolo sono presenti: solo si notano modificazioni di forma, la bocca è compressa, il becco è fuso; nella seriazione dei reperti si ottengono casi nei quali è inibita la formazione del labbro inferiore con

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto d'anatomia comparata della R. Università di Roma.

(2) Presentata nella seduta del 2 marzo 1919.

(3) Cotronei Giulio, *Correlazioni e differenziozioni*, Nota 1ª, Rendic. Acc. Lincei, 1° semestre 1915, pag. 1248; *Correlazioni e differenziazioni*, Nota 2ª, Rendic. Acc. Lincei, 2° semestre 1915, pag. 296.

La presente Nota segue a grande distanza le due precedenti, benchè le ricerche fossero espletate da tempo, per il ritardo causato da cure di guerra.

il linguale inferiore: il suo posto è invece occupato dalle papille laterali, mentre il labbro superiore coi palatini mostra da parte sua tendenza a saldarsi inferiormente: questa tendenza si può mostrare anche quando è ancora presente il labbro inferiore. Il divenire del processo ci mostra casi di pseudo-doppia formazione come ho già ricordato: mentre il labbro superiore o meglio una parte del labbro superiore, con un numero vario di papille (in un reperto otto e in un altro due) si trova all'estremità di una formazione a proboscide, inferiormente si nota un'altra piccola proboscide terminata da un numero vario di papille (nel 1° reperto quattro, nel 2° sei). Si ottengono pure larve con una unica proboscide terminata da sole papille: ne ho ottenute, con sedici, con sei, con quattro papille.

Infine si ottengono larve in cui ogni formazione vestibolo-boccale è inibita.

In tutti i casi ora riferiti è presente una fossetta olfattiva mediana: ma si ottengono anche reperti nei quali manca ogni traccia di essa come ulteriore fase del processo inibitorio.

Gli occhi pure tendono a portarsi medialmente. Nel *Bufo* ho ottenuto ciclopi in larve con proboscide unica terminata da sei o otto papille: vi ho riscontrato pure l'inibizione del cristallino.

I fatti descritti nel *Bufo* si ottengono in linea generale anche nella *Rana esculenta* con gli stessi fenomeni di inibizioni nella regione cefalica, con riduzione graduale dei territorî olfattivi, boccali e oculari [1]. Tali riduzioni si arrestano là dove termina la corda dorsale, le vescicole auditive non si riscontrano perciò fuse.

I fatti da me descritti e che saranno illustrati minutamente nel lavoro in esteso dimostrano uno sviluppo a mosaico, dal momento che varie parti di uno stesso organo (come ad esempio il vestibolo boccale) possono scindersi e essere inibite isolatamente; ma mostrano altresì per le variazioni di forma e di posizione come vi sia una deficienza di condizioni spaziali. Questo difetto di spazio impedisce il normale sviluppo delle potenze embrionali dei varî organi, come pure induce variazioni nello sviluppo dei singoli abbozzi.

Giunto al punto di aver mostrato dai reperti raccolti il delinearsi di una determinata influenza causale, è intuitiva la ricerca di essa. Quale può essere questa influenza che induce profonde variazioni spaziali nella regione cefalica?

Il nostro pensiero corre subito al cervello. Gli organi cefalici sopra descritti per svolgere le loro attività evolutive hanno bisogno di uno spazio

[1] La completa inibizione del territorio oculare rappresenta nei nostri esperimenti il massimo nel divenire del processo.

sempre maggiore. Se il cervello si mostra poco sviluppato esso non può *sostenere* se non un territorio di minore estensione: ne consegue che alcune parti, nell'ordine che abbiamo descritto in queste brevi note *non trovano spazio per svilupparsi*; la differenziazione di tutte le parti cefaliche richiede uno sviluppo sempre progressivo della massa cerebrale. Se c'è un arresto di sviluppo nel cervello ne consegue che possiamo ritenere come se esista una forza che costringe gli abbozzi embrionali a lasciare svilupparе una parte maggiore o minore di essi [1] o che impedisce nei casi estremi ogni sviluppo.

L'ipotesi è suffragata dai fatti: in effetto i reperti nei quali si riscontrano forti inibizioni mostrano deficiente sviluppo cerebrale, con l'inibizione di sviluppo degli emisferi cerebrali [2].

Studiati così correlativamente noi vediamo rientrare nella manifestazione di una causa unica tutti i reperti sperimentalmente ottenuti: il litio ha agito ostacolando e rallentando lo sviluppo del tubo neurale, che si manifesta con effetti morfogenetici nella parte non in rapporto con la corda dorsale; il cervello precordale non riesce a compiere la sua evoluzione, lasciando subentrare un momento in cui non è possibile il prosieguo dello sviluppo cerebrale perchè si sono stabilite nuove condizioni; ma intanto con un grado maggiore o minore dello sviluppo cerebrale consegue la possibilità di un maggiore o minore sviluppo spaziale nella regione cefalica e in conseguenza ne risulta ancora chè possono svilupparsi soltanto quegli organi o parti di organi che trovano in siffatte condizioni sperimentali il loro posto corrispondente.

Una chiara convalida ai miei risultati sperimentali viene dalle ricerche della Marchetti, la quale ha notato nello sviluppo normale di *Bufo vulgaris* che l'infossamento boccale si manifesta correlativamente allo sviluppo del cervello anteriore: ed è appunto questo ritmo successivo nello sviluppo delle varie parti che riceve luce e documentazione sperimentale dalle mie ricerche, per ora appena brevemente riassunte.

Su un altro punto richiamo l'attenzione del lettore: le modificazioni sperimentali si limitano alla regione cefalica, anteriormente. Le ricerche di Giardina [3], completate dalle mie, possono illuminarci in proposito. Giardina,

[1] È intuitivo che seguendo quest'ordine di idee la ciclopia viene a essere interpretata come una fusione degli abbozzi oculari più o meno ridotti, nelle nuove condizioni embrionali.

[2] La riduzione e l'inibizione degli emisferi cerebrali come fatti di arresto di sviluppo del tubo neurale, ci dicono che viene a mancare l'azione di turgore esercitata per opera del liquido contenuto nei ventricoli laterali verso le parti cefaliche corrispondenti: questo è uno dei fatti della massima considerazione per la valutazione delle modificazioni che presentano le larve a litio.

[3] Giardina, *Sul valore morfogenetico della corda dorsale. Studio sperimentale su embrioni e larve d'Anfibii*. Archivio d'anatomia e embriologia, vol. XII, 1914.

con le sue estese ricerche sperimentali, viene alla conclusione che negli embrioni di *Discoglossus pictus*, nei quali viene asportata una parte notevole della corda, i varî organi presentano tutti un più o meno forte rallentamento del lore sviluppo; l'intestino non si sviluppa affatto, altri in minor grado, come le branchie; anche per lo scheletro è probabile che il primo costituirsi degli abbozzi cartilaginei dipenda dalla corda: mancando la corda, manca l'accrescimento in senso longitudinale e la formazione della coda; pensa inoltre che non è eccessivamente ardito il presumere che la morfologia dell'encefalo embrionale, e in special modo l'ingrossamento del lume e la curvatura della base, non sia senza rapporto con la riduzione della lunghezza relativa della corda dorsale.

I fatti da me riferiti, in relazione con le altrui ricerche ora accennate, ci lasciano ritenere che la corda dorsale diriga lo sviluppo della parte che chiameremo cordale del corpo, mentre il sistema nervoso precordale, che si può sviluppare in tal guisa perchè non è sotto l'influenza della corda, dirige lo sviluppo (per condizioni spaziali) della regione cefalica corrispondente. Negli esperimenti riferiti in queste Note, la coda dorsale non è stata influenzata; ed allora non già che la parte cordale non possa presentare delle condizioni anormali, potendo esse dipendere da cause svariate (ad esempio, ho riscontrato talvolta fenomeni di idropisia), ma è possibile lo svolgimento delle direzioni d'accrescimento degli organi che sono per tal guisa più o meno direttamente legati alla corda. Si osserva pertanto che le vescicole auditive non tendono a fondersi, facendo esse parte della regione cordale

In conclusione, le nostre ricerche c'inducono ad ammettere che il litio ha come sua influenza prodotto un rallentamento di sviluppo in un determinato momento, producendo una stasi nelle funzioni cellulari che si manifesta naturalmente nelle direzioni d'accrescimento in quel determinato momento: il sistema nervoso centrale in sviluppo viene influenzato in tale condizione, assume uno sviluppo minore di quello che potrebbe permettere il normale sviluppo delle capacità evolutive di determinati organi cefalici: le potenze di questi organi sono perciò prese in sè indipendenti, ma dipendenti però nel loro sviluppo normale dalla possibilità di determinate condizioni spaziali le quali sono prodotte da un'influenza direttrice di alcuni organi: questa influenza direttrice per la parte anteriore viene esplicata dal cervello precordale; per il resto dalla corda dorsale. Lo sviluppo organico normale dipende da condizioni di tempo e di luogo; solo in un determinato tempo è possibile lo sviluppo di un determinato organo, e solo agendo sperimentalmente in un determinato tempo possiamo conoscere, caso per caso, le dipendenze e la natura delle correlazioni di un organo rispetto ad un altro.

Fisiologia. — *La fase di eccitamento nello stimolo da raggi X.* Nota del dott. ANTONINO PAIS, presentata dal Socio B. GRASSI [1].

I raggi X occupano la zona abiotica nella estesa gamma delle radiazioni.

Non tutte le cellule viventi presentano una stessa fragilità all'azione dell'energia radiante. Al contrario, il grado di suscettibilità personale dei diversi elementi è estremamente differente. Così, mentre le cellule del sistema nervoso sembrano godere di un'immunità quasi assoluta (possono resistere ad ogni modo a 600 unità X), i linfociti al contrario vengono distrutti talvolta alle piccolissime dosi di $^1/_{10}$ di X.

In questa diversa fragilità cellulare, che sembra dipendere dalla giovinezza della cellula e dalla sua attitudine a riprodursi, risiede il potere terapeutico dei raggi X, i quali elettivamente distruggono i tessuti patologici molto fragili, perchè in istato di continua riproduzione, e risparmiano gli elementi sani che li circondano, più resistenti perchè meno attivamente proliferanti. Tale teoria unanimemente accolta da tutti i biologi, io chiamo terapeutica perchè dalla terapia prese inizio ed alla terapia si ispira.

Siffatta concezione non è stata scossa nè meno dalla cognizione di alcuni fatti che sembravano doverne infirmare il valore.

Tre anni dopo la scoperta di Röntgen, Maldimey e Thouvenin (e successivamente Wolfenden, Forbes, Ross ed altri) dimostrarono come i raggi X in piccole dosi possano eccitare lo sviluppo dei semi e l'accrescimento delle piante. In seguito furono descritti fenomeni di eccitamento anche in tessuti animali. Max Numberg rivelò che piccole dosi di raggi X rendono più attiva la funzione galattogena. Kienböck descrisse per primo alcuni casi di alopecia nei quali tenui irradiazioni avevano potuto provocare la rigenerazione dei capelli. A questi fatti la teoria distruttiva o terapeutica oppose la considerazione che la funzione galattogena è legata a fatti veri e proprî di istolisi e che i fenomeni di maggiore attività proliferativa nei tessuti sono determinati in via secondaria da intensa reazione infiammatoria.

I fenomeni veri e proprî di eccitamento furono ristretti quindi ad alcune manifestazioni della cellula vegetale.

Osservazioni ulteriori modificarono per altro il concetto del potere necrobiotico dei raggi X.

Bergonié e Tribondeau, irradiando i testicoli dei topi bianchi, osservarono per i primi alcune forme di spermatozoidi giganti a teste multiple e

[1] Pervenuta all'Accademia il 25 luglio 1919.

mostruose. Ne trassero la conseguenza che i raggi X, invece di uccidere la cellula, possono, in alcuni casi, provocare l'atipia evolutiva, carattere essenziale delle cellule cancerigne.

Tale scoperta veniva a dare una base scientifica alle osservazioni cliniche precedenti, che accusavano i raggi X di suscitare lo sviluppo degli epiteliomi nei tegumenti dei radiologi esposti senza protezione a piccole e ripetute irradiazioni. Ménétrier, Mallet e Rountrée dettero una prova sperimentale a questa affermazione provocando nei topi bianchi lo sviluppo di tumori epiteliali. Ricerche recentissime di Marie e Clunet, di Wickham e Degrais, di Dominici, Barcat ecc., hanno messo infine in evidenza che alcuni tessuti irradiati (specialmente col radium), prima di raggiungere la fase delle alterazioni necrobiotiche, sono colpiti da gigantismo, regressione embrionaria, e attraversano un periodo di rapida senescenza.

Accanto al termine radiodistruzione si è recentemente creato il termine radioeccitamento. Ma radioeccitamento non significa generalmente esaltamento funzionale a carattere fisiologico, ma eccitamento morboso o, per lo meno, atipico.

A questa classica dominante teoria, che informa tutta la radiologia, e che non ha mai avuto dei decisi avversari, io oppongo la concezione seguente:

I raggi X in piccole ed opportune dosi esercitano sulla cellula sensibile *un'influenza eccitatrice costante e normale* (¹).

I fenomeni di eccitamento sfuggono alla nostra osservazione per un complesso di ragioni che succintamente qui riferisco:

1°) perchè il pregiudizio terapeutico ha creato una tecnica che deve necessariamente condurre alle alterazioni ed alla morte dei tessuti. Se i fenomeni di eccitamento nelle piante vennero a nostra cognizione, si è perchè la cellula vegetale è meno sensibile della cellula animale, e quindi le dosi comunemente distruttive furono, in tali casi, eccitanti;

2°) perchè l'energia radiante ha un potere biologico altissimo ed i nostri attuali apparecchi sono al contrario ancora imperfetti, incapaci di moderare le tenui quantità di energia e di mantenere un regime assolutamente costante;

3°) perchè, generalmente, non si tiene il dovuto conto della qualità dei raggi. Le più recenti osservazioni tendono a dimostrare che il fattore qualità ha un valore biologico altissimo indipendentemente dal fattore quantità. Una stessa dose, cioè, ha sopra uno stesso tessuto un effetto differente a seconda della lunghezza d'onda delle radiazioni emergenti dall'ampolla radiogena;

(¹) Le mie ricerche sperimentali sul potere eccitante dei raggi X datano dai primi mesi del 1917. Vedi: *L'influenza dei raggi X sulla malaria* in « Gazzetta degli ospedali e delle cliniche », n. 84. anno 1917; *L'influenza dei raggi X sulla curva termica della malaria*, Libreria fratelli Bocca, Roma.

4°) perchè gli attuali sistemi di misura fisici e chimici non sono così perfetti o sensibili da rivelarci le piccole quantità di energia che costituiscono appunto tali dosi eccitanti, ma sono appena sufficienti per la definizione delle dosi distruttive;

5°) perchè le cellule hanno una sensibilità diversa a seconda dell'istante in cui vengono irradiate, in rapporto alla loro attività funzionale. Tali variazioni di sensibilità sono a noi sconosciute, nè potrebbero venire rilevate dalle alte dosi distruttive che tendono a livellare tali lievi differenze nelle profonde reazioni metamorfiche;

6°) perchè l'esame dei fenomeni reattivi da raggi X è affidato generalmente alla istologia, mentre i fenomeni di eccitamento potrebbero meglio essere rivelati dalla fisiologia. Ma la fisiologia, solo raramente chiamata allo studio delle radio-reazioni, adotta la stessa tecnica distruttiva usata in terapia.

Queste io credo siano le cause principali alle quali si deve ascrivere l'ignoranza dei fenomeni di eccitamento, nello stimolo da raggi X.

Non ostante tante cause avverse io ritengo che i fenomeni di radioeccitamento normale siano numerosissimi.

Gli stessi quadri anatomo-patologici che sembrano documentare incontestabilmente con le loro figure metamorfiche la potente azione nociva dell'energia radiante: tali quadri distruttivi sui quali la radiologia fonda le sue leggi, si ravvivano, al nostro sguardo non prevenuto, di fenomeni di esaltamento funzionale, di rigogliosa attività cellulare, mal repressi dalle violente azioni reattive.

Manifestazioni mal comprese di questa attività funzionale esaltate io ritengo debbano considerarsi i fenomeni che seguono ad irradiazioni degli organi ematopoietici:

1°) la leucocitosi polinucleare neutrofila;

2°) la fagocitosi imponente dell'organo splenico e nel midollo delle ossa e nel letto vasale;

3°) l'iperplasia del midollo osseo il quale, da giallo. si trasforma in midollo funzionale con aumento del numero dei mielociti granulari e delle cellule madri, con aumento del numero assoluto degli eosinofili, delle mastzellen e con proliferazione eritroblastica.

L'insieme di questi fenomeni mi ha indotto a ritenere che gli organi ematopoietici così profondamente modificati da piccole irradiazioni, gli elementi bianchi del sangue radiosensibilissimi fra tutte le cellule viventi, e gli endotelii vasali, eccitati a più attiva funzione, potessero determinare un eccitamento transitorio dei poteri di resistenza e di difesa dell'organismo contro le malattie infettive.

Tale concetto è giustificato da due considerazioni principali:

1°) che gli organi ematopoietici hanno una funzione oramai universal-

mente riconosciuta, nelle reazioni dell'organismo contro un gran numero di malattie infettive;

2°) che lo stimolo da raggi deve essere necessariamente specifico dacchè la radiosensibilità di un elemento cellulare è tanto più elevata quanto la sua funzionalità è più attiva, quanto la sua attività riproduttrice è maggiore.

Gli elementi, che in ciascuna malattia infettiva saranno specificamente stimolati dagli agenti infettivi, acquisteranno per conseguanza una radiosensibilità specifica elevatissima e predominante.

Di tale ipotesi noi dobbiamo trovare la conferma nei reperti ematologici della leucemia, ove la radiosensibilità specifica è acquisita volta a volta dalla serie di leucociti che patologicamente divengono più attivi.

E. M.

// RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1919.

(Ogni Nota o Memoria porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

Matematica. — *Sulle superficie spirali.* Nota II del Socio LUIGI BIANCHI [1].

5. Dimostriamo ora che fra le superficie d'elemento lineare (II) le spirali sono caratterizzate dalle proprietà che *la superficie* $\overline{S}$ *corrispondente per ortogonalità d'elementi alla* S *si riduce ad un piano.* Per questo cominciamo dal provare che ogni superficie d'elemento lineare (II) ammette particolari configurazioni (in una doppia infinità) per le quali la superficie $\overline{S}$ definita dalle (12) diventa un piano. Assumendo questo piano per piano xy dovremo cercare quelle configurazioni nelle quali si annulli la $\bar{z}$ data dalla terza delle (12), cioè si abbia

$$z = v\,\psi(u),$$

con $\psi(u)$ funzione della sola u. Questa $\psi(u)$ sarà dunque da determinarsi in guisa [2] che la forma differenziale quadratica

$$v^2\,du^2 + U^2\,dv^2 - dz^2 = v^2\,du^2 + U^2\,dv^2 - [v\psi'(u)\,du + \psi(u)\,dv]^2$$

risulti a curvatura nulla e sia inoltre definita positiva. Ora i coefficienti E, F, G di questa forma differenziale sono

$$E = v^2(1 - \psi'^2) \quad , \quad F = -v\psi\psi' \quad , \quad G = U^2 - \psi^2,$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 18 ottobre 1919.

(2) Cfr. *Lezioni,* vol. I, § 109, pag. 240.

indi

$$\sqrt{EG - F^2} = v^2 \sqrt{U^2 - U^2 \psi'^2 - \psi^2}\,.$$

Se ne eguagliamo a zero la curvatura K_0 colla nota formola [1]

$$2K_0 \sqrt{EG - F^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left(\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{\partial G}{\partial u}\right)\right\} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left(2\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial u}\right)\right\},$$

dove si osservi che le tre quantità

$$\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\frac{\partial F}{\partial u}\ ,\quad \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\frac{\partial E}{\partial v}\ ,\quad \frac{F}{E\sqrt{EG - F^2}}\frac{\partial E}{\partial u}$$

sono indipendenti da v, mentre l'altra

$$\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{\partial G}{\partial u}$$

risulta eguale a $-2UU'$; ne risulta, per la funzione incognita $\psi(u)$, la equazione differenziale

$$\frac{d}{du}\left(\frac{UU'}{\sqrt{U^2 - U^2\psi'^2 - \psi^2}}\right) = 0,$$

coll'integrale primo

$$U^2 - U^2\psi'^2 - \psi^2 = c^2 U^2 U'^2 \quad (c \text{ costante}).$$

Non resta quindi altro che determinare $\psi(u)$ dall'equazione differenziale del 1° ordine

$$\psi'^2 + \frac{\psi^2}{U^2} = 1 - c^2 U'^2, \tag{16}$$

la cui integrazione introduce una nuova costante arbitraria [2], e ne risulta che il problema proposto ammette in effetto una doppia infinità di soluzioni. Di più le ∞^2 superficie (spirali), così definite, sono tutte differenti per la forma, come constatiamo calcolando i corrispondenti valori di D, D', D'' dalle formole

$$D = \frac{z_{11}}{\sqrt{1 - \Delta_1 z}}\ ,\quad D' = \frac{z_{12}}{\sqrt{1 - \Delta_1 z}}\ ,\quad D'' = \frac{z_{22}}{\sqrt{1 - \Delta_1 z}}.$$

(1) *Lezioni*, vol. I, pag. 93.

(2) Per l'integrazione delle equazioni di questo tipo vedi Darboux, *Leçons*, IVème Partie, note VI, p. 442 ss.

Siccome $z = v\psi(u)$, e dalla (16)

$$\Delta_1 z = 1 - c^2 U'^2 ,$$

ne deduciamo

$$(17) \qquad D = \frac{v(U^2\psi'' + \psi)}{cU^2 U'} \quad , \quad D' = -\frac{\psi}{cU} \quad , \quad D'' = \frac{U\psi'}{cv} ,$$

e da queste formole si vede che al variare della costante c, e dell'altra introdotta dalla integrazione, variano D, D', D'' e cangia quindi la configurazione della superficie.

6. Fra le superficie d'elemento lineare (II) le superficie spirali sono appunto caratterizzate dalla proprietà che: *Ogni superficie spirale* S *corrisponde per ortogonalità d'elementi ad un piano fisso in guisa che il piano tangente in ogni punto* P *di* S *passa pel punto corrispondente* $\overline{P}$ *del piano.*

Partendo da questa definizione delle superficie spirali, formiamo subito un'equazione a derivate parziali del 1° ordine di cui queste superficie sono gli integrali, e ne deduciamo le ordinarie equazioni in termini finiti. Sia $z = z(x, y)$ l'equazione della supposta superficie S e prendiamo il piano fisso per piano xy a cui facciamo corrispondere la S per ortogonalità d'elementi. Indicando con $\overline{x}, \overline{y}$ le coordinate del punto $\overline{P}$ sul piano $\overline{z} = 0$ che corrisponde al punto $P \equiv (x, y, z)$ della S, le formole di corrispondenza, disponendo dell'origine, possono scriversi

$$\overline{x} = \frac{y}{h} \quad , \quad \overline{y} = -\frac{x}{h} ,$$

dove h è una costante [1]. E se esprimiamo che il piano tangente in (x, y, z) alla S passa pel detto punto $\overline{P} \equiv \left(\frac{y}{h}, -\frac{x}{h}, 0\right)$, troviamo per z la equazione del 1° ordine

$$(hx - y)\frac{\partial z}{\partial x} + (hy + x)\frac{\partial z}{\partial y} = hz \ [2],$$

che, introducendo coordinate cilindriche (r, θ, z) col porre

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r \operatorname{sen}\theta ,$$

si scrive

$$hr\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial \theta} = hz .$$

[1] Cfr. ***Lezioni***, vol. II, pag. 3, nota.

[2] Questa esprime che la superficie ammette la trasformazione conforme infinitesima:

$$Xf = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} + h\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Cfr. Lie-Scheffers, *Geometrie der Berührungstransformationen.*

L'integrale generale è

$$z e^{-h\theta} = \Phi(r e^{-h\theta}),$$

dove Φ indica una funzione arbitraria, e questa ci dà l'equazione in termini finiti delle superficie spirali. In forma parametrica, indicando con θ, u i parametri, si scriverà

$$(18) \qquad x = \mathrm{U} e^{h\theta} \cos\theta \quad , \quad y = \mathrm{U} e^{h\theta} \operatorname{sen}\theta \quad , \quad z = \mathrm{U}_1 e^{h\theta},$$

dove U, U_1 rappresentano funzioni arbitrarie del parametro u. Sotto questa forma è evidente che le linee $u = \text{cost.}$ sono eliche cilindro-coniche [1] descritte su coni circolari retti col vertice nell'origine, aventi per asse di rotazione l'asse Oz.

Si verifica subito, sulle (18), che: *la tangente in un punto* (x, y, z) *all'elica cilindro-conica incontra il piano* xy *nel punto* $\left(\frac{y}{h}, -\frac{x}{h}, 0\right)$, *centro di curvatura geodetica delle trajettorie ortogonali delle eliche* $u = \text{cost.}$

7. Risulta dal § 4 che, per riconoscere se una data superficie S è applicabile sopra una superficie spirale, basta esaminare se esiste una superficie $\overline{\mathrm{S}}$, corrispondente per ortogonalità di elementi alla S, i cui singoli punti $\overline{\mathrm{P}}$ giacciano nei piani tangenti alla S nei punti corrispondenti P. Se la S è riferita ad un sistema ortogonale qualunque con

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{G}\,dv^2,$$

le coordinate $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ di P potranno scriversi, nelle solite notazioni,

$$\overline{x} = x + \mathrm{AX}_1 + \mathrm{BX}_2 \ , \ \overline{y} = y + \mathrm{AY}_1 + \mathrm{BY}_2 \ , \ \overline{z} = z + \mathrm{AZ}_1 + \mathrm{BZ}_1,$$

dove A, B sono funzioni di u, v. Le condizioni di corrispondenza per ortogonalità d'elementi fra $\mathrm{S}, \overline{\mathrm{S}}$ si traducono per A, B nel sistema delle tre equazioni simultanee

$$(a) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial u} + \frac{\mathrm{B}}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v} + \sqrt{\mathrm{E}} = 0 \\ &\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial v} + \frac{\mathrm{A}}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u} + \sqrt{\mathrm{G}} = 0 \\ &\sqrt{\mathrm{E}}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial v} - \mathrm{B}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u} + \sqrt{\mathrm{G}}\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial u} - \mathrm{A}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v} = 0, \end{aligned}\right.$$

le quali dunque ammettono soluzioni nel solo caso che la S sia applicabile sopra una superficie spirale. Ora proviamo che in tal caso la soluzione è

[1] *Lezioni*, vol. I, pag. 21.

generalmente unica, salvo per una speciale classe di superficie spirali, ove si hanno invece ∞^1 soluzioni.

Perciò supponiamo già in un modo ridotto il ds^2 alla forma tipica (II) con

$$\sqrt{E} = v \quad , \quad \sqrt{G} = U$$

e vediamo se il corrispondente sistema (a)

$$(19) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial A}{\partial u} + \frac{B}{U} + v = 0 \\ & \frac{\partial B}{\partial v} + \frac{U'}{v} A + U = 0 \\ & v \frac{\partial A}{\partial v} - U'B + U \frac{\partial B}{\partial u} - A = 0 \end{aligned} \right.$$

ammette altre soluzioni oltre quella del n. 4

$$A = 0 \quad , \quad B = -vU .$$

Scriviamo il sistema (19), coll'introduzione di una terza funzione incognita C, sotto la forma

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial A}{\partial v} = -\frac{B}{U} - v \quad , \quad \frac{\partial B}{\partial u} = \frac{A}{U} - \frac{C}{U} \\ & \frac{\partial A}{\partial u} = \frac{U'}{v} B + \frac{C}{v} \quad , \quad \frac{\partial B}{\partial v} = -\frac{U'}{v} A - U . \end{aligned} \right.$$

Le condizioni d'integrabilità dànno subito

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial C}{\partial u} = \frac{U'}{U} C - U''B \\ & \frac{\partial C}{\partial v} = \frac{C}{v} + \frac{UU''}{v} A , \end{aligned} \right.$$

e da queste, costruendo nuovamente la condizione d'integrabilità, otteniamo [1]

$$(20) \qquad B + vU = \frac{UU''' - U'U''}{2U''} A ;$$

indi, dalla (19_1),

$$\frac{\partial \log A}{\partial u} = \frac{1}{2} \left(\frac{U'}{U} - \frac{U'''}{U''} \right) .$$

[1] Si avverta che $U'' \neq 0$.

Integrando risulta

$$A = V\sqrt{\frac{U}{U''}}$$

con V funzione di v e, dalla (20),

$$B + vU = -\frac{V}{2}\sqrt{UU''}\,\frac{d}{du}\left(\frac{U}{U''}\right).$$

Ora la (19_2) dà

$$\frac{V'}{2}\sqrt{UU''}\,\frac{d}{du}\left(\frac{U}{U''}\right) = \frac{U'V}{v}\sqrt{\frac{U}{U''}}; \tag{21}$$

ed escludendo il caso $V = 0$ che riporta alla soluzione già nota $A = 0$, $B = -vU'$, sarà anche $V' \neq 0$, e la (21) si scrive

$$\frac{2V}{vV'} = \frac{U''}{U'}\,\frac{d}{du}\left(\frac{U}{U''}\right) = 1 - \frac{UU'''}{U'U''}.$$

Ne segue che si ha necessariamente

$$\frac{UU'''}{U'U''} = k \quad \text{(costante)}, \tag{22}$$

con $k \neq 1$, indi

$$\frac{V'}{V} = \frac{2}{(1-k)\,v}, \tag{22*}$$

e integrando

$$V = av^{\frac{2}{1-k}} \tag{23}$$

con a nuova costante, come anche dalla (22)

$$U'' = cU^k \tag{24}$$

con c costante. Rimane ancora da soddisfare la terza delle (19), per il che si osservino le formole

$$\sqrt{UU''} = \sqrt{c}\,U^{\frac{1+k}{2}},\quad \frac{U}{U''} = \frac{1}{c}U^{1-k},\quad \frac{d}{du}\left(\frac{U}{U''}\right) = \frac{1-k}{c}U^{-k}.U',$$

$$A = \frac{V}{\sqrt{c}}U^{\frac{1-k}{2}},\quad B + vU = -\frac{V}{2}\,\frac{1-k}{\sqrt{c}}\,U^{\frac{1-k}{2}}U';$$

e sostituendo nella (19_3) e riducendo, viene

$$\frac{(1+k)(1-k)}{4}U'^2 = \frac{(1-k)c}{2}U^{1+k} - \frac{1+k}{1-k}.$$

Di qui si vede che, oltre al valore $k=1$, deve escludersi anche $k=-1$, e resta la formola

$$U'^2 = \frac{2c}{1+k} U^{1+k} - \frac{4}{(1-k)^2}, \tag{25}$$

dalla quale, derivando, segue la (24).

Per questa classe di superficie spirali avviene che il sistema differenziale (19) ammette ∞^1 soluzioni, dipendenti dalla nuova costante a arbitraria nella formola (23) per V. Esse sono quindi applicabili sopra infinite altre superficie spirali senza che si corrispondano nell'applicabilità le eliche cilindro-coniche, e può dirsi che fra le superficie spirali esse tengono il posto analogo a quello che compete alle superficie di curvatnra costante fra le superficie di rotazione.

Fisica. — *Sulla gravitazione.* Nota II del Corrisp. Q. Majorana [1].

Probabile natura energetica della gravitazione. — Secondo le fatte ipotesi, si può ammettere, per spiegare il fenomeno gravitazionale, che dalla materia, qualunque essa sia, si sprigioni continuamente un flusso di energia, che voglio chiamare *flusso gravitazionale*; questo, andando a colpire altra materia, e con un meccanismo di cui sarebbe ora prematuro il parlare, determinerebbe la formazione delle forze newtoniane. Esso inoltre, pur essendo dotato di un grandissimo potere di penetrazione, finirebbe per essere assorbito, sia pure parzialmente, dalla materia.

Ora, per rispettare il comune principio della conservazione dell'energia, occorre complétare queste vedute con l'altra che *la materia sia in uno stato continuo di trasformazione*; la perdita di energia da sua parte, corisponderebbe a tale lenta trasformazione. Un tale ordine di idee non è del resto nuovo nella scienza: basta pensare alle moderne teorie di fisica corpuscolàre, ed alla radioattività; colla differenza che p. e., il radio si trasforma in qualche migliaio di anni, mentre per tutte le altre specie di materia occorrerebbero tempi, di ordini di grandezza assai superiori.

Le nuove caratteristiche del fenomeno gravitazionale sarebbero dunque: emissione di energia da parte della materia, progressivo assorbimento di questa col propagarsi della forza gravitazionale a traverso altra materia esistente nello spazio; la forza attrattiva potrebbe essere una conseguenza di tale assorbimento. A questo punto, e sempre se le ipotesi fatte sono atten-

[1] Pervenuta all'Accademia il 13 ottobre 1919.

dibili, si arriva ad un'altra conseguenza di estrema importanza: *l'energia gravitazionale assorbita dalla materia non può perdersi; dovrà, se mai, trasformarsi e ciò potrà avvenire dando luogo p. e., ad energia calorifica.* Ciò equivale a dire che *materia, in presenza di altra materia, si riscalda.* Non mi nascondo la sorpresa che tale ipotesi possa suscitare fra i cultori di fisica; è perciò che, come ho già detto, io la avanzo con tutte le riserve possibili, pronto a prendere in considerazione tutti quegli elementi, che ora possono sfuggirmi. Ma, sin da ora, a conforto di tale ipotesi richiamo l'attenzione del lettore su qualche fatto astronomico o cosmogonico. È noto il disaccordo tra i fisici ed astronomi da un canto, ed i geologi e biologi dall'altro, circa l'origine del calore solare. La teoria di Helmholtz sulla progressiva contrazione del sole non concede a questo astro un'età superiore a 50 milioni di anni ([1]). Più recentemente il Véronnet ([2]) crede poter ridurre questa cifra a soli 2 milioni. Per contro i geologi stimano l'età della terra a cifre comprese tra 50 milioni ed un miliardo di anni. Essendosi, secondo la teoria di Laplace, la terra formata dopo del sole, ne deriva che questo astro deve avere un'età almeno eguale, il che è in contraddizione con la teoria di Helmholtz. Non mancano però teorie cosmogoniche che attribuiscono alla terra una vita passata superiore a quella del sole ([3]); e vi ha chi, come il Véronnet, accusa i geologi di errare nelle loro determinazioni. Tutto ciò indica il contrasto di idee ancor oggi esistente, fra gli scienziati, nell'interpretazione di uno fra i più grandiosi fenomeni naturali; questo contrasto fa quindi pensare alla nostra ignoranza di qualche fatto, che potrebbe contribuire a mantenere il calore solare. Un sospetto del genere venne, quando si scoprì il radio, che, con il suo continuo sviluppo di calore, avrebbe potuto fornire un'elegante via di uscita nella controversia; ma la vita relativamente breve di quel corpo, ed il fatto che esso non si rivela come esistente alla superficie del sole, sono argomenti che tolgono valore ad una spiegazione del genere. La questione della origine del calore solare, non è dunque ancora risolta con sicurezza.

Un altro fatto che voglio richiamare, è quello della relativa assenza di stelle oscure nel cielo. Si sa anzitutto che la proporzione fra le stelle bianche, o leggermente gialle, e quelle rosse, o vicine alla cosiddetta fase di estinzione, è di circa 95 a 5 ([4]); questo è un fatto rilevato direttamente, il quale può venire posto in raffronto col ragionamento di Poincaré citato in principio di questa Nota. Sembrerebbe da ciò, che si possa concludere, per spiegare la costituzione del nostro cielo, che tutte le stelle che vediamo si sieno accese

([1]) Vedi Poincaré, loc. cit., pag. 209; Bosler, loc. cit., pag. 149.

([2]) *Les hypothèses cosmogoniques*. Paris, Hermann, 1914, pag. 121.

([3]) Faye, *L'origine du monde*. Paris, 1907, pag. 281.

([4]) Faye, loc. cit., pag. 253.

quasi contemporaneamente. Ciò vale secondo le idee sin qui ammesse; e siccome a taluno sembra strana questa coincidenza di età degli innumerevoli astri che ci circondano, così si è voluto far intervenire la mano di Dio, per spiegare la formazione di questi. Ora è evidente che una tale concezione esce dall'àmbito delle scienze positive, e che ad essa si deve solo ricorrere, quando il fisico non ha da applicare leggi e principii, precedentemente riconosciuti.

Le nuove teorie da me proposte, ed in particolare quella della trasformazione in calore dell'energia gravitazionale, darebbero ragione, tanto della enorme quantità di calore emessa dal sole (e quindi di un'età di questo assai superiore a quella derivante dalla teoria di Helmholtz), quanto della relativa assenza di stelle oscure. Si potrà concludere infatti, secondo tali teorie, che le agglomerazioni di materia debbono dar luogo ad una sopraelevazione di temperatura tanto maggiore, quanto più grande è la quantità di materia raccolta in un determinato spazio. Gli astri di dimensioni paragonabili a quella del sole non potrebbero essere che incandescenti, e solo quelli simili al nostro globo terrestre, sarebbero freddi. Ma tutto ciò non costituisce che un'ipotesi, sulla cui probabilità, un'accurata discussione, o, meglio, ricerche delicate di laboratorio, potranno in avvenire gettar luce.

Matematica. — *Un teorema su certe equazioni funzionali e sua interpretazione meccanica.* Nota di GIULIO ANDREOLI, presentata dal Corrisp. MARCOLONGO [1].

1. In alcune ricerche sulle equazioni integrali singolari, sono state da me considerate funzioni del tipo

$$f(x+\alpha t)\,.$$

Su queste funzioni si può enunciare un teorema semplicissimo che ammette una immediata interpretazione fisica. Il teorema è:

Non si possono trovare n *funzioni* $f_1, f_2, \ldots f_n$, *le quali soddisfano identicamente, per ogni* x *e per ogni* t, *alla*

$$\text{(A)} \qquad F = f_1(x+\alpha_1 t) + f_2(x+\alpha_2 t) + \cdots + f_n(x+\alpha_n t) = 0$$

a meno che esse non siano polinomî di grado $n-2$ *al più, se le* α *sono costanti tutte diverse fra loro.*

Ne segue immediatamente il corollario:

[1] Pervenuta all'Accademia il 26 ottobre 1919.

Non esistono mai funzioni f soddisfacenti alla (A) *se ad esse si impone la condizione di avere, in tutto l'intervallo* $(-\infty, +\infty)$, *modulo massimo finito.*

Sulle f non faremo nessuna ipotesi, salvo che esse non siano totalmente discontinue.

Nel caso però che esse ammettano derivate, sino all'ordine $n-1$ incluso, la dimostrazione è quasi immediata. Infatti, indicando con $g_1, g_2, \dots g_n$ tali derivate, si avrà ovviamente

$$\frac{\partial^{n-1} F}{\partial x^{n-1}} = g_1 + g_2 + \cdots + g_n = 0$$

$$\frac{\partial^{n-1} F}{\partial x^{n-2} \partial t} = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \cdots + \alpha_n g_n = 0$$

. . . .

$$\frac{\partial^{n-1} F}{\partial t^{n-1}} = \alpha_1^{n-1} g_1 + \alpha_2^{n-1} g_2 + \cdots + \alpha_n^{n-1} g_n = 0$$

Ora queste ultime relazioni dànno precisamente un sistema di n equazioni omogenee ad n incognite (le g). Siccome il determinante di tale sistema è precisamente il determinante di Vandermonde relativo alle $\alpha_1 \dots \alpha_n$, e questo è diverso da zero, così avremo, come solo sistema di valori che le risolva,

$$g_1 = g_2 = g_3 = \cdots = g_n = 0 .$$

E siccome queste sono le derivate $(n-1)$-esime delle f, si deduce che le f stesse (se derivabili $n-1$ volte) devono essere dei polinomî di grado $n-2$: si vede che in tal caso esse possono effettivamente soddisfare la (A). Un'altra via, in tal caso, è indicata in fondo.

2. Nel caso che invece le f non si suppongano derivabili, bisogna procedere alla dimostrazione per induzione completa. Supponiamo quindi vero il teorema per n, e dimostriamo che esso è vero anche per $n+1$.

Consideriamo perciò la funzione

$$\Phi(x, t) = f_1(x + \alpha_1 t) + \cdots + f_{n+1}(x + \alpha_{n+1} t)$$

e diamo ad x un aumento h, alla t un aumento k; avremo

$$\Phi(x + h, t + k) = f_1(x + \alpha_1 t + l_1) + \cdots + f_{n+1}(x + \alpha_{n+1} t + l_{n+1})$$

ove si ponga

$$l_r = h + \alpha_r k .$$

Ora poniamo $l_{n+1} = 0$, cioè $h = -\alpha_{n+1} k$: supponendo, ciò che non lede la generalità, $\alpha_{n+1} \neq 0$. Se α_{n+1} fosse nullo, vi sarebbe almeno un altro α diverso da zero, e muteremo gli indici.

In tale ipotesi, la l_i diventa

$$\lambda_i = (\alpha_i - \alpha_{n+1}) \,.\, k \;\; ; \;\; \lambda_{n+1} = 0 \,.$$

Avremo quind

$$\Phi(x - \alpha_{n+1} k) \; t + k) =$$
$$= f_1(x + \alpha_1 t + \lambda_1) + \cdots + f_n(x + \alpha_n t + \lambda_n) + f_{n+1}(x + \alpha_{n+1} t) \,;$$

e se la Φ fosse identicamente nulla, anche quest'ultima sarebbe tale; dunque, in questa ipotesi, la loro differenza sarebbe ancora identicamente nulla; avremo cioè

$$\{ f_1(x + \alpha_1 t + \lambda_1) - f_1(x + \alpha_1 t) \} +$$
$$+ \cdots + \{ f_n(x + \alpha_n t + \lambda_n) - f_n(x + \alpha_n t) \} +$$
$$+ \{ f_{n+1}(x + \alpha_{n+1} t) - f_{n+1}(x + \alpha_{n+1} t) \} =$$
$$= \{ f_1(x + \alpha_1 t + \lambda_1) - f_1(x + \alpha_1 t) \} +$$
$$+ \cdots + \{ f_n(x + \alpha_n t + \lambda_n) - f_n(x + \alpha_n t) \} = 0$$

identicamente.

Ora noi abbiamo supposto vero il teorema per n; le differenze

$$f_i(x + \alpha_i t + \lambda_i) - f_i(x + \alpha_i t)$$

sono a lor volta funzioni di $x + \alpha_i t$; dunque tutte le prime n fra le f sono tali che

$$f(y + \lambda) - f(y)$$

è un polinomio di grado $n - 2$ al più: e quindi se esse hanno un sol punto di continuità [1] dovranno essere le f polinomî di grado $(n - 1)$ al più.

Ed allora, essendo

$$_{n+1} = - f_1 - f_2 - \cdots - f_n \,,$$

anche la f_{n+1} sarà un polinomio di grado $n - 1$, e resta dimostrato vero il teorema per $n + 1$, se esso vale per n.

Intanto, per $n = 2$, si ha l'equazione

$$f_1(x + \alpha_1 t) + f_2(x + \alpha_2 t) = 0 \,.$$

Ponendo in essa $x = -\alpha_1 t$, si trae, qualunqne sia t,

$$f_1(0) + f_2\Big((\alpha_2 - \alpha_1) t\Big) = 0 \,;$$

ciò che ci dice essere f_2 (e quindi f_1) costante (polinomio di grado zero).

[1] Basta ripetere, per dimostrare ciò, quanto si fa nel caso dell'equazione

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \,.$$

Così, per il principio d'induzione completa, resta dimostrata la validità del teorema.

3. Una conseguenza importantissima di tutto quanto precede è che:

Teorema II. — *Se una funzione* $F(x, t)$ *è rappresentabile mediante la somma di* n *funzioni* $f_i(x + \alpha_i t)$, *essa non lo è che in un sol modo, escluso tutt'al più dei polinomî di grado* $2n - 2$.

Infatti, supponiamo dapprima che sia

$$F(x, t) = \sum_1^m f_i(x + \alpha_i t) + \sum_m^n g_i(x + \beta_i t)$$

e che sia anche

$$F(x, t) = \sum_1^m \varphi_i(x + \alpha_i t) - \sum_m^n h_i(x + \gamma_i t),$$

scrivendo nei primi due sommatori i termini che hanno le stesse α, ed ove può essere anche $m = n$, o $m = 0$, e quindi possono mancare rispettivamente il primo o il secondo sommatorio.

Se tale doppia rappresentazione esiste, facendo la differenza si avrà

$$0 = \sum_1^m \theta_i(x + \alpha_i t) + \sum_m^n g_i(x + \beta_i t) + \sum_m^n h_i(x + \gamma_i t)$$

ove $\theta = f - \varphi$.

Intanto, per il primo teorema tale identità è impossibile, a meno che le θ, y, h siano polinomî di grado $2n - m - 2$ al più; e resta dimostrato l'assunto.

Ne segue il corollario:

Una funzione $F(x, t)$ *il cui modulo massimo sia finito, se è decomponibile nella somma di* n *funzioni* $f(x - \alpha t)$, *anche esse aventi modulo massimo finito, lo è in modo unico e determinato.*

Infatti sarà allora

$$\text{mod}\, f\ ;\ \text{mod}\, g\ ;$$

tutti minori di A; quindi mod F limitato. Ora un'altra decomposizione differisce da questa per dei polinomî, e quindi non potremo avere

$$\text{mod}\, \varphi\ ;\ \text{mod}\, h$$

finiti. In altri termini: per il ragionamento fatto, le θ, g, h devono essere dei polinomî da un lato e quindi il loro modulo massimo è l'∞. Dall'altro, se esistesse una doppia decomposizione del tipo detto, i loro moduli debbono restare finiti; e quindi vi è contraddizione.

4. È facile poi notare che, nell'ipotesi che vi sieno derivate n-sime, la decomponibilità della F in n funzioni del tipo detto equivale ad affermare

che essa soddisfa a

$$a_0 \frac{\partial^n F}{\partial x^n} + a_1 \frac{\partial^n F}{\partial x^{n-1} \partial t} + \cdots + a_n \frac{\partial^n F}{\partial t^n} = 0$$

ove le radici di

$$a_0 \xi^n + \cdots + a_n = 0$$

sieno le α. Cioè vale il

TEOREMA III. — *Se abbiamo*

$$F = f_1(x - \alpha_1 t) + f_2(x - \alpha_2 t) + \cdots + f_n(x - \alpha_n t),$$

avremo anche

$$\Theta_n(F) = a_0 \frac{\partial^n F}{\partial x^n} + a_1 \frac{\partial^n F}{\partial x^{n-1} \partial t} + \cdots + a_n \frac{\partial^n F}{\partial t^n} = 0$$

e reciprocamente, sempre che le radici della

$$a_0 \xi^n + \cdots + a_n = 0$$

sieno le α.

La dimostrazione della diretta è semplice e si riduce ad una verifica.

Per dimostrare l'inversa, si ponga

$$\Theta_n(F) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{\alpha_n} \frac{\partial}{\partial t}\right) \Theta_{n-1}(F) = 0 .$$

Si ricava subito

$$\Theta_{n-1}(F) = \psi_{11}(x - \alpha_n t) \qquad (\psi \text{ arbitrario})$$

e si ponga allora

$$\Theta_{n-1}(F) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{\alpha_{n-1}} \frac{\partial}{\partial t}\right) \Theta_{n-2}(F) = \psi_{11}(x - \alpha_n t) .$$

Si avrà

$$\Theta_{n-2}(F) = \psi_{21}(x - \alpha_n t) + \psi_{22}(x - \alpha_{n-1} t)$$

ove ψ_{21} si ricava facilmente da ψ_{11}, e ψ_{22} è arbitrario.

Così proseguendo, arriveremo proprio a scrivere

$$F = f_1(x - \alpha_1 t) + \cdots + f_n(x - \alpha_n t) .$$

È facile poi risalire da tale teorema a quello enunciato in principio.

5. Passiamo infine a dare l'interpretazione fisica di tale teorema di analisi.

Se in un certo corpo alcune proprietà subiscono una variazione, e questa si trasmette progredendo con velocità α e restando immutata come intensità, tale variazione si porrà [1] sotto la forma $f(x+\alpha t)$: intendendo che in un punto x_1 al tempo t_1, la variazione abbia lo stesso valore che in x_2 al tempo t_2, se

$$(x_2 - x_1) = \alpha(t_1 - t_2).$$

Se per una qualunque causa si sovrappongono diverse di tali variazioni, supposte piccole e minori in valore assoluto di A *fisso, esse con la loro sovrapposizione non daranno mai luogo ad un movimento della stessa natura, se le velocità delle componenti sono tutte diverse fra loro* (le diremo *perturbazioni* semplici).

Infatti, da quanto si è detto, non potrà mai aversi

$$\sum_1^{n-1} f_r(x+\alpha_r t) = f_n(x+\alpha_n t)$$

se le α sono diverse tra loro, a meno che le f sieno polinomî; ed in tal caso contraddiremo all'ipotesi fatta:

$$\text{Mod}\, f_r < \text{A} \qquad (r=1,2,\dots n).$$

In un caso speciale, ciò equivale a dire:

In tutti i problemi fisici, la cui soluzione dipende da

$$\alpha \frac{\partial}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2},$$

la sovrapposizione di n di queste perturbazioni

$$\zeta = z_1 + \cdots + z_n \quad ; \quad \alpha_i \frac{\partial z_i}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z_i}{\partial t^2} \qquad (i=1,2,\dots n)$$

non dà mai luogo ad una perturbazione tale che

$$\beta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}.$$

Infatti, per note teorie, le soluzioni di tali equazioni sono:

$$f_i(x+\sqrt{\alpha_i}\, t) + \varphi_i(x-\sqrt{\alpha_i}\, t) \qquad (\beta = \alpha_n).$$

[1] Almeno nel caso più semplice di variazione per piani paralleli ad un dato; in altra Nota tratteremo il caso più generale ed anche l'estensione del teorema per funzioni

$$f(x+\alpha t, y+\beta t) \quad \text{oppure} \quad f(\mu x + \nu y + \alpha t).$$

Quindi, escluso il caso dei polinomî, non potremo trovare delle f, φ tali che

$$\sum_1^n f_i(x + \sqrt{\alpha_i}\, t) + \sum_1^n \varphi_i(x - \sqrt{\alpha_i}\, t) = 0 ,$$

poichè, trattandosi di perturbazioni, i moduli delle f, φ restano finiti.

Nasce quindi il problema, che ci proponiamo di studiare: *Trovare le perturbazioni semplici, che compongono una assegnata* $F(x, t)$ *a modulo finito, dopo che siasi riconosciuta la possibilità di tale decomposizione* (vedi teor. III).

Tale teorema e tale problema possono avere una importanza capitale nella marea e nella previsione del tempo.

Meccanica. — *Deformazioni simmetriche del suolo elastico.* Nota I di Rocco Serini, presentata dal Socio T. Levi-Civita [1].

Del problema della deformazione del suolo elastico omogeneo ed isotropo si conoscono più metodi di risoluzione: nessuno di questi considera però specialmente il caso della deformazione simmetrica rispetto ad una normale al piano, deformazione generata da condizioni al contorno che godano della stessa simmetria. Questo caso, che mi pare di qualche interesse, viene considerato nel presente lavoro.

Mi servo perciò di alcune formole semplici del Beltrami per la determinazione di funzioni armoniche simmetriche nel semispazio limitato da un piano.

Nel § 1 enuncio il problema, mentre nel § 2 trovo la soluzione generale delle equazioni indefinite dell'equilibrio. Tale soluzione contiene due funzioni armoniche arbitrarie.

In una Nota successiva, §§ 3 e 4, mostrerò come si possano determinare queste due funzioni, rispettivamente per dati spostamenti e per date tensioni al contorno, accennando anche ai casi misti, che si risolvono pure senza difficoltà.

Tutto si riduce alla risoluzione di due semplicissimi tipi di equazioni integrali, uno dei quali fu già considerato dal Beltrami [2].

1. Equazioni indefinite dell'equilibrio. — Prendiamo il piano del suolo per piano $z = 0$, e il suolo occupi la regione $z > 0$. Possiamo sempre supporre che siano nulle le forze di massa, cosicchè le equazioni indefinite

[1] Pervenuta all'Accademia il 16 ottobre 1919.

[2] E. Beltrami, *Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche*, Mem. Accad. Bologna, serie IV, tomo II oppure *Opere*, tomo 3.

dell'equilibrio sono, indicando con u, v, w le componenti dello spostamento [1]

$$(1)\qquad \begin{cases} (\Omega^2 - \omega^2)\dfrac{\partial\theta}{\partial x} + \omega^2 \Delta^2 u = 0\,, \\ \dots\dots\dots\dots \\ (\Omega^2 - \omega^2)\dfrac{\partial\theta}{\partial z} + \omega^2 \Delta^2 w = 0\,, \\ \theta = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\,. \end{cases}$$

Se le condizioni ai limiti sono simmetriche rispetto all'asse z, la w sarà funzione soltanto di z, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, e inoltre

$$(2)\qquad u = x f(r, z)\ ,\ v = y f(r, z),$$

cosicchè le prime due delle (1) saranno in sostanza identiche.

Dalle (1) si ricava in modo ben noto

$$(3)\qquad \Delta^2\theta = 0\,.$$

Supponiamo di conoscere θ: si osservi allora che, per la (3),

$$\Delta^2(z\theta) = 2\frac{\partial\theta}{\partial z}\,,$$

e quindi dalla terza delle (1) si avrebbe

$$(4)\qquad w = -\frac{\Omega^2 - \omega^2}{2\omega^2} z\theta + \mathrm{W}\,,$$

essendo W una funzione armonica da determinarsi.

Dimostrerò ora che la conoscenza delle due funzioni θ, W permette di determinare la soluzione generale del sistema (1); per il quale scopo basterà ora trovare la funzione $f(r, z)$ che entra nelle (2).

2. Integrale generale delle equazioni indefinite. — Si consideri la funzione cilindrica di prima specie d'ordine zero, $\mathrm{I}_0(x)$.

Allora la funzione

$$(5)\qquad \varphi(r, z) = \int_0^\infty e^{-zs}\, \mathrm{I}_0(rs)\, \psi(s)\, ds\,,$$

dove $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, è nel semispazio $z \geq 0$ una funzione armonica, simmetrica rispetto all'asse z ed anche la più generale, potendosi, data $\varphi(r, 0)$, cioè i valori della funzione sul piano, determinare in modo unico la funzione $\psi(r)$ [2].

[1] Vedi p. es. R. Marcolongo, *Teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici*, cap. IV. Milano, Hoepli.

[2] Vedi Beltrami, loc. cit., §§ 2, 3, 4.

Le due funzioni armoniche θ e W saranno allora date rispettivamente dalle formole

$$\theta = \int_0^\infty e^{-zs}\, I_0(rs)\, \chi(s)\, ds\,, \tag{6}$$

$$W = \int_0^\infty e^{-zs}\, I_0(rs)\, \lambda(s)\, ds\,. \tag{7}$$

Veniamo ora alla determinazione della funzione f. Perciò osserviamo che dalla quarta delle (1) si ricava

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \theta - \frac{\partial w}{\partial z}\,,$$

ossia, per le (2),

$$2f + r\frac{\partial f}{\partial r} = \theta - \frac{\partial w}{\partial z}\,. \tag{8}$$

Dalle (2) si ha

$$\Delta^2 u = x\Delta^2 f + 2\frac{\partial f}{\partial x} = x\Delta^2 f + 2\frac{x}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\,;$$

essendo poi

$$\Delta^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,,$$

si ottiene, coi risultati precedenti, dalla prima delle (1), dividendo per x,

$$\frac{\Omega^2 - \omega^2}{\omega^2}\frac{1}{r}\frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(2f + r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0\,,$$

e quindi, per la (8),

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\frac{1}{r}\left(\frac{\Omega^2}{\omega^2}\frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial z}\right). \tag{9}$$

Ridurrò ora il secondo membro alla forma $\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$; avremo quindi

$$f = F + z\,l(r) + m(r)\,,$$

e le funzioni $l(r)$, $m(r)$ saranno poi da determinarsi in base alla (8).

Consideriamo perciò la funzione

$$\theta_1 = \int_0^\infty e^{-zs}\, I_0'(rs)\, \frac{\chi(s)}{s}\, ds\,. \tag{6'}$$

[La funzione sotto il segno si mantiene finita anche per $s = 0$, perchè $I_0'(x)$

si annulla di primo ordine per $x = 0$]. Per la θ_1 vale la relazione, facile a verificarsi,

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2} = \frac{\partial \theta}{\partial r}. \tag{10}$$

Si osservi inoltre che, per la (4),

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r\, \partial z} = -\frac{\Omega^2 - \omega^2}{2\omega^2}\left[\frac{\partial \theta}{\partial r} + z\frac{\partial^2 \theta}{\partial r\, \partial z}\right] + \frac{\partial^2 W}{\partial z\, \partial r}.$$

Ma ora, per la (10),

$$z\frac{\partial^2 \theta}{\partial r\, \partial z} = z\frac{\partial^3 \theta_1}{\partial z^3} = z\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial \theta_1}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(z\frac{\partial \theta_1}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2}; \tag{10'}$$

per di più, posto

$$W_1 = -\int_0^\infty e^{-zs}\, I_0'(rs)\, \lambda(s)\, ds, \tag{7'}$$

si ha

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r\, \partial z} = \frac{\partial^2 W_1}{\partial z^2}. \tag{10''}$$

Dalla (9), tenendo presente l'osservazione fatta e le formole (10), (10'), (10''), otteniamo

$$f(r, z) = -\frac{1}{r}\left(\alpha\theta_1 + \beta z\frac{\partial \theta_1}{\partial z} - W_1\right) + z\,l(r) + m(r), \tag{11}$$

avendosi posto

$$\alpha = \frac{\Omega^2 + \omega^2}{2\omega^2}, \quad \beta = \frac{\Omega^2 - \omega^2}{2\omega^2}. \tag{12}$$

Rimane ora da verificare la (8). Osserviamo perciò che dalla (11) si ottiene

$$2f + r\frac{\partial f}{\partial r} = -\alpha\left(\frac{1}{r}\theta_1 + \frac{\partial \theta_1}{\partial r}\right) - \beta z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\theta_1 + \frac{\partial \theta_1}{\partial r}\right) +$$
$$+ \frac{1}{r}W_1 + \frac{\partial W_1}{\partial r} + z(2l + rl') + 2m + rm'.$$

Dimostriamo ora che

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}\theta_1 + \frac{\partial \theta_1}{\partial r} &= -\theta, \\ \frac{1}{r}W_1 + \frac{\partial W_1}{\partial r} &= -\frac{\partial W}{\partial z}. \end{aligned} \tag{13}$$

Infatti, dalla (6'),

$$\frac{1}{r}\,\theta_1 + \frac{\partial \theta_1}{\partial r} = \int_0^\infty e^{-zs}\left[\frac{1}{rs}\,\mathrm{I}_0'(rs) + \mathrm{I}_0''(rs)\right]\chi(s)\,ds\,. \tag{13'}$$

Ora la $\mathrm{I}_0(x)$ soddisfa alla equazione differenziale [1]

$$\frac{d}{dx}\Big(x\,\mathrm{I}_0'(x)\Big) = -\,x\,\mathrm{I}_0(x)\,;$$

quindi nel nostro caso

$$\frac{d}{dr}\,\Big(r\,\mathrm{I}_0'(rs)\Big) = -\,rs\,\mathrm{I}_0(rs)\,,$$

ossia

$$\mathrm{I}_0'(rs) + rs\,\mathrm{I}_0''(rs) = -\,rs\,\mathrm{I}_0(rs)\,.$$

Dalla (13'), tenendo conto di quest'ultima relazione, ne scende la prima delle (13): analogamente per la seconda.

Ne viene

$$2f + r\,\frac{\partial f}{\partial r} = \alpha\theta + \beta z\,\frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial z} + z\,(2l + rl') + 2m + rm'\,;$$

ma dalla (4)

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\,\beta\theta - \beta z\,\frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial z}\,,$$

quindi, essendo

$$\alpha - \beta = 1\,,$$

ne risulta

$$2f + r\,\frac{\partial f}{\partial r} = \theta - \frac{\partial w}{\partial z} + z\,(2l + rl') + 2m + rm'\,.$$

Confrontando colla (18), si ottiene, per determinare l, m, l'equazione

$$z\,(2l + rl') + 2m + rm' = 0\,.$$

Questa dovendo essere verificata qualunque sia z, si scinde nelle due

$$2l + rl' = 0 \quad , \quad 2m + rm' = 0\,.$$

Ricaviamo di qui

$$l = \frac{\mathrm{C}_1}{r^2} \quad , \quad m = \frac{\mathrm{C}_2}{r^2}\,,$$

[1] Beltrami, loc. cit., § 2.

essendo C_1, C_2 costanti. Ma queste costanti devono essere nulle. Infatti esse portano alla deformazione il contributo

$$u = \frac{xz\,C_1}{r^2} + \frac{x\,C_2}{r^2}\ ,\quad v = \frac{yz\,C_2}{r^2} + \frac{y\,C_2}{r^2}\,.$$

Il primo termine, in entrambe le formole, tenendo x e y costanti, diventerebbe infinito per $z = \infty$: mentre il secondo diventa infinito per $r = 0$. Siccome queste circostanze non debbono presentarsi, così è necessario che $C_1 = C_2 = 0$.

Concludendo: Definite le due funzioni θ, W mediante le (6), (7) e le corrispondenti θ_1, W_1 mediante le (6′), (7′), la soluzione generale delle equazioni indefinite per l'equilibrio è data dalle relazioni

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases} u = xf(r\,,z)\,, \\ v = y\,f(r\,,z)\,, \\ w = -\beta z\theta + W\,, \end{cases}$$

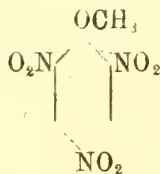
essendo

$$\text{(II)}\qquad f = -\frac{1}{r}\left(\alpha\theta_1 + \beta z\frac{\partial\theta_1}{\partial z} - W_1\right).$$

Si tratterà ora di vedere come le due funzioni θ, W possano determinarsi mediante i dati al contorno, ossia come si determinano le due funzioni $\chi(s)$, $\lambda(s)$ mediante le quali si costruiscono le θ, W e le corrispondenti θ_1, W_1.

Chimica. — *Ricerche sopra i nitroderivati aromatici.* IX: *Sul comportamento del trinitroanisolo* [1]. Nota di M. Giua e F. Cherchi, presentata dal Socio G. Paternò [2].

Il trinitroanisolo simmetrico

$$\begin{array}{c} OCH_3 \\ O_2N\diagup\quad\diagdown NO_2 \\ |\qquad| \\ NO_2 \end{array}$$

oltre che per le proprietà peculiari di etere dell'acido picrico, ha acquistato recentemente importanza per l'impiego nella tecnica degli esplosivi. Data la sua costituzione chimica si può prevedere che il suo comportamento, dal

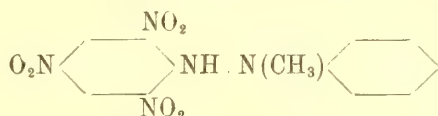
[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica generale della R. Università di Sassari.

[2] Pervenuta all'Accademia il 16 ottobre 1919.

punto di vista della stabilità e della facile reattività, lo metta alla pari con gli esplosivi organici nitrati più stabili, come il trinitrotoluene e lo stesso trinitrobenzene. Studî recenti sul trinitroanisolo sono stati eseguiti da Masland e Sparre ([1]) e da Broadbent e Sparre ([2]).

Il gruppo ossimetilico del trinitroanisolo è facilmente sostituibile per l'influenza *orto-para* dei gruppi nitrici presenti nella sua molecola. Il comportamento del trinitroanisolo è da porre così in relazione con quello del cloruro di picrile, il cui atomo alogenico subisce la stessa influenza *orto-para*. Il trinitroanisolo reagisce facilmente con le basi organiche dando prodotti di sostituzione e può essere adoperato con vantaggio, in luogo del cloruro di picrile, in molte reazioni sintetiche. Con l'idrato d'idrazina viene trasformato nella 2-4-6-trinitrofenilidrazina, con la fenilidrazina, nel trinitroidrazo-benzene, e con l'anilina nella trinitrodifenilamina.

Trattando il trinitroanisolo in soluzione alcoolica con la metilfenilidrazina asimmetrica si ottiene il trinitrometilidrazobenzene seguente:

$$\overset{NO_2}{\underset{NO_2}{O_2N\langle\quad\rangle}}NH\,.\,N(CH_3)\langle\quad\rangle$$

Gr. 10 di trinitroanisolo disciolti in 130 cc. di alcool etilico assoluto, si trattano con grammi 5 di metil-fenilidrazina as.; dalla solizione rossa, dopo poco tempo, si precipita una sostanza rossa oleosa dalla quale, per cristallizzazione dall'alcool, si ottengono aghetti colorati in rosso-granato, che fondono a 153° in un olio denso rossastro.

Gr. 0,1233 di sostanza: cc. 23,3 di N ($t = 24°$, $H = 732$ mm).

Per $C_{13}H_{11}O_6N_5$ — N % trovato 21,03; calcolato 21,02.

La sostanza è solubile in alcool, etere e benzene, molto solubile anche a freddo in acetone e cloroformio; poco solubile in ligroina. Si discioglie nell'acido solforico conc. con colorazione rosso-oscura; negli alcali si discioglie con colorazione verde-oscura.

Le reazioni fra trinitroanisolo e fenilidrazina, idrato d'idrazina ed anilina, verranno descritte per esteso nella *Gazzetta chimica italiana*.

([1]) Eigh. int. Congr. of appl. Chem. *4*, 77, (1912).
([2]) Ibid., pag. 15.

Chimica. — *Sui prodotti di riduzione del pulegone: il pulegolo* [1]. Nota II del dott. V. Paolini, presentata dal Corrispondente P. Peratoner [2].

Materiale di partenza. — Dall'olio di menta pulegio fu isolato per mezzo del composto bisolfitico il puro pulegone bollente a 221°-222°, destrogiro, con $[\alpha]_D = +22°,85'$.

Riduzione. Gr. 50 di pulegone vengono disciolti in 200 cc. di alcool etilico assoluto, e nella soluzione si introducono a poco a poco gr. 15,15 di sodio in pezzi: verso la fine dell'operazione si aggiunge ancora un po' di alcool sino a scomparizione del sodio. Il liquido, da principio appena giallognolo, si colora fortemente in bruno verso la fine della reazione; si riprende con acqua, e si estrae con etere. Si lava l'etere per togliere l'alcalinità, e, dopo distillazione del solvente, si sottopone il residuo oleoso, bruno, alla distillazione in corrente di vapore. Col vapor d'acqua distilla la frazione alcoolica (70 %) che resta facilmente separata dal prodotto resinoso. Disseccato accuratamente con carbonato potassico fuso, bolle fra 210 e 215°; nel vuoto bolle a 104°-105°, H = 16 mm. Possiede odore penetrante di menta, è sinistrogiro: $\alpha_D = -9°30'$ (tubo da 1 dcm.).

Presenta insomma tutti i caratteri del così detto pulegolo del Thiemann.

Ftalati acidi. — Gr. 25 di frazione alcoolica ben secca vengono disciolti in 70-80 cc. di benzina di petrolio, ed aggiunti in due riprese di un leggiero eccesso di sodio metallico (gr. 5 invece di 3,5).

Dopo 4-5 ore si decanta la soluzione del sale sodico dall'eccesso di metallo, e si fa gocciolare sulla quantità teorica di anidride ftalica (gr. 24,00) sospesa in 300-400 cc. di benzina di petrolio.

Si agita continuamente finchè l'aggiunta sia completa, e si lascia in riposo.

Dopo 40 ore il prodotto della reazione si tratta con 400-500 cc. di acqua alcalina per idrato sodico, con che passano in soluzione, sotto forma di sale sodico, gli eteri ftalici acidi, mentre nella benzina di petrolio rimane una traccia trascurabile di alcool.

Ftalato di l-mentolo. — Il liquido acquoso alcalino, separato dalla benzina, viene acidificato con acido solforico diluito; si separa ben presto una

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto chimico-farmaceutico della R. Università di Roma.
[2] Pervenuta all'Accademia il 22 settembre 1919.

massa molle appiccicaticcia, che non indurisce nemmeno col tempo. Solubilissimo in tutti i comuni solventi organici, si riesce tuttavia facilmente ad effettuare una prima depurazione sciogliendo lo sciroppo nella quantità strettamente necessaria di bènzina (70°-80°), ed abbandonando la soluzione alla evaporazione spontanea. Ben tosto si separa una notevole quantità di aghi, soffici, bianchi, riuniti a ciuffetto, che ricristallizzati dall'etere di petrolio bollente, o dall'acido acetico al 90 %, mantengono costante il punto di fusione 107°-108°, ed il potere rotatorio specifico $[\alpha]_D = -107° 50'$.

L'analisi fornisce numeri teoretici per un ftalato acido di mentolo.

Gr. 0,500, sciolti in 10-15 cc. di alcool, consumano per la neutralizzazione cc. 16,30 di NaOH $\frac{n}{10}$, mentre un acido monobasico $C_6H_4 < \begin{matrix} COOH \\ COOC_{10}H_{19} \end{matrix}$ richiede cc. 16,35 di alcali $\frac{n}{10}$.

Gr. 6,1208 di sostanza, sciolti in 100 cc. di benzolo, dànno, in tubo lungo 2 dcm., $\alpha_D = -13°,10'$; onde $[\alpha]_D = -107°,50'$.

l-Mentolo. Gr. 20 di puro ftalato acido, fusibile a 108°, vengono disciolti in 70 cc. di potassa alcoolica normale; si riscalda per mezz'ora, e, dopo diluizione con acqua, si distilla in corrente di vapore. Dopo poco tempo lo straterello oleoso distillato, limpido, di odore spiccato di menta, ancora in contatto con l'acqua che lo aveva trasportato, si rapprende completamente in solido, cristallino.

Costanti osservate: p. f. 44°; p. eb. 214° (corr.); sinistrogiro.

Gr. 4,850 di mentolo, sciolti in 100 cc. di alcool etilico assoluto dànno in tubo lungo 20 cm., $\alpha_D = -4°50$; onde $[\alpha]_D = -49°,70'$.

Ftalato di l-mentolo e stricnina. — Si prepara da quantità equivalenti di etere ftalico acido puro e stricnina, in presenza di alcool; dalla soluzione alcoolica, per aggiunta di etere, precipita il sale ben cristallizzato in aghetti bianchi, soffici, fusibili a 157°-158°.

Gr. 0,2268 dànno 0,6018 CO_2 e 0,1454 H_2O.

$C_6H_4 < \begin{matrix} COOC_{10}H_{19} \\ COOHC_{21}H_{22}N_2O_2 \end{matrix}$					
	Calcolato	C	73,35	H	7,21
	Trovato	"	73,2	"	7,2

Una soluzione contenente gr. 5,2104 di sale in 100 cc. di alcool metilico dà $\alpha_D = -4°,38'$; onde $[\alpha]_D = -44°,46'$.

Ftalato acido di d-mentolo e stricnina. — Le acque madri dell'etere di petrolio, da cui spontaneamente erasi deposto lo ftalato di *l*-mentolo, si evaporano a b. maria, sino ad allontanare le ultime tracce di benzina; il residuo sciropposo si discioglie in poco alcool assoluto, ed alla soluzione alcoolica si aggiunge la quantità equivalente di stricnina.

Il sale di stricnina, facilmente solubile in alcool, precipita però per aggiunta di etere solforico. Cristallizzato ripetutamente dall'etere acetico alla

ebollizione, mantiene costante il suo punto di fusione 207°-208° ed il suo potere rotatorio specifico $[\alpha]_D = -11°{-}70'$.

Gr. 2,8469 di sale, sciolti in 25 cc. di alcool metilico, dànno in tubo lungo 20 cm., $\alpha_D = -2°,41'$; onde $[\alpha]_D = -11°,70'$.

Ftalato acido di d-mentolo. — La soluzione alcoolica del sale di stricnina, per aggiunta di acido cloridrico diluito e successiva aggiunta di acqua, lascia precipitare lo ftalato acido solido che, ricristallizzato dall'alcool diluito, fonde costantemente a 107°-108°, e mantiene costante il suo potere rotatorio s ecifico.

Gr. 1,331 di ftalato acido fusibile a 107°-108°, sciolti in 25 cc. di alcool etilico assoluto, dànno in tubo lungo 20 cm. $\alpha_D = +2°,58'$, onde $[\alpha]_D = +18°,40'$.

d-Mentolo. — Per saponificazione dello ftalato acido con potassa alcoolica all'ebollizione, e distillazione in corrente di vapore d'acqua, si ricava l'alcool solido che fonde a 88-89°, e bolle a 214°.

Una soluzione contenente gr. 0,4974 in 25 cc. di alcool etilico assoluto, dà in tubo lungo 20 cm., $\alpha_D = +0,52$, onde $[\alpha]_D = +21°,8'$.

0,1801 sostanza 0,507 CO^2 e 0,206 H_2O

$C_{10}H_{20}O$	Calcolato	C	76,92	H	12,82
	Trovato	»	76,77	»	12,58

Il composto è saturo, dappoichè non addiziona bromo nè decolora il permanganato nella prova di Bayer. Esso va quindi indicato quale mentolo destrogiro. Questo mentolo forse non è diverso dall' α-pulegomentolo che Haller e Martine [1] hanno ottenuto riducendo il pulegone col metodo Sabatier.

Ftalato acido di pulegolo. — Le acque madri alcoolico-eteree, dalle quali si è separato il sale di stricnina del mentolo destrogiro, vengono evaporate a secchezza; il residuo si discioglie in alcool; da questa soluzione alcoolica, per trattamento con acido cloridrico diluito e successiva aggiunta di acqua, si separa l'etere ftalico acido del pulegolo che da prima è molle, poi indurisce rapidamente e può cristallizzarsi senza inconvenienti dall'etere di petrolio.

Si presenta come massa bianca costituita di aghi soffici, fusibili a 212°.

Gr. 2,638 di ftalato acido, sciolti in 25 cc. di alcool etilico assoluto, dànno in tubo lungo 2 dcm., $\alpha_D = -18°,10'$; onde $[\alpha]_D = -86°,8'$.

0,169 gr. 0,4801 CO_2 e 0,181 H_2O

$C_{10}H_{18}O$	Calcolato	C	77,92	H	11,68
	Trovato	»	77,47	»	11,11

[1] Loco citato.

l-Pulegolo. — Per saponificazione con potassa alcoolica dello ftalato precedente, e distillazione in corrente di vapore, si ottiene un olio che col raffreddamento si rapprende in aghi bianchi, soffici, fusibili a 46°-47°, con debole odore di mentolo. È sinistrogiro.

Gr. 1,2353 di pulegolo, sciolti in 25 cc. di alcool etilico assoluto dànno, in tubo lungo 2 dcm., $\alpha_D = -5°,24'$; onde $[\alpha]_D = -54°,6'$.

La sua natura di composto non saturo è rivelata dalla prova positiva al permanganato secondo Bayer e dall'assorbimento di bromo, decolorandone la soluzione.

Infatti, una soluzione in alcol assoluto (1 : 10) decolora in meno di un minuto 3 goccie di una soluzione di permanganato 1 $^0/_0$.

Una soluzione in benzina di petrolio assorbe rapidamente bromo, decolorandone la soluzione; ma il prodotto bromurato incolore, liquido denso oleoso, sottoposto a distillazione, imbrunì lievemente, e fornì alla determinazione di bromo numeri un poco inferiori a quelli richiesti per la formula $C_{10}H_{18}OBr^2$.

Data l'esiguità della sostanza rimastami, non sono in grado di precisare se tale deficienza fosse dovuta a lievi impurezze rimaste nel prodotto, o, come ritengo più verosimile, a parziale decomposizione avvenuta durante la distillazione.

Chimica-fisica. — *Calori di fusione, velocità di cristallizzazione ed affinità chimica nei cristalli.* Nota di M. Padoa, presentata dal Socio G. Ciamician [1].

Richiamo brevemente i risultati esposti in due Note precedenti [2].

Paragonando le velocità lineari di cristallizzazione di corpi notoriamente isomorfi, e però di uguale struttura molecolare (almeno allo stato solido), ho fatto rilevare che quelli che contengono doppi legami sono dotati di velocità di gran lunga superiori ai corpi saturi corrispondenti; da questo ho presunto che l'affinità chimica (che nei corpi non saturi si presenta più intensa sotto forma di valenze residuali) estenda la sua azione anche nel processo di formazione dei cristalli. Una conferma di questo modo di vedere ho poi trovato dimostrando con calcoli ed esperienze termochimiche che il valore termochimico (quantitativamente equivalente all'affinità) dei legami fra atomi di carbonio in composti organici corrisponde al valore dei legami fra gli atomi di carbonio della grafite. Sviluppando il concetto ora esposto, si viene alla conclusione che il processo della cristallizzazione è un caso particolare

[1] Pervenuta all'Accademia il 30 ottobre 1919.

[2] Questi Rendiconti, 1918, II, pag. 59 e 327.

di reazione chimica [1]; l'affinità di questo processo dovrà essere espressa o per lo meno inclusa nel calore di fusione del corpo considerato; pertanto, a parità di condizioni (grandezza molecolare, struttura), quei corpi che sono dotati della maggiore velocità di cristallizzazione dovranno avere il calore di fusione più alto.

Non esistono nella letteratura dati sufficienti per poter istituire siffatti confronti; e però ho dovuto eseguire parecchie misure, le quali hanno dimostrato che le previsioni erano perfettamente attendibili. Ho riunito, nella tabella che segue, i numeri riguardanti i calori di fusione espressi in piccole calorie per grammo di sostanza. Veramente sarebbe più giusto di fare il confronto tra i calori molecolari di fusione; ma anche nel modo predetto i risultati non vengono svisati perchè le sostanze fra le quali si istituisce il confronto hanno pesi molecolari assai poco diversi. Nella stessa tabella sono anche riportate le velocità di cristallizzazione in mm. per minuto: fra queste è stata corretta la cifra riguardante l'idrazobenzolo perchè la determinazione precedente non era esatta, essendosi impiegato un prodotto contenente molto azobenzolo; è stata poi aggiunta quella riguardante il diidrofenantrene, che non era nota.

I calori di fusione vennero tutti determinati col calorimetro a ghiaccio di Bunsen.

	Formula	P. f.	Cal. fus.	Velocità
Naftalina	$C_{10} H_8$	81°	35,5	9000
Diidronaftalina	$C_{10} H_{10}$	15°	5,22	150
Benzolo	$C_6 H_6$	5°,4	30,4	34500
Cicloesano	$C_6 H_{12}$	5°	5,87	3600
Azobenzolo	$C_6 H_5 . N : N . C_6 H_5$	68°	32,39	800
Idrazobenzolo	$C_6 H_5 . NH . NH . C_6 H_5$	134°	22,88	30
Stilbene	$C_6 H_5 . CH : CH . C_6 H_5$	124°	40	6000
Dibenzile	$C_6 H_5 . CH_2 \; CH_2 . C_6 H_5$	51°	31,02	580
Etere dimetilico dell'ac. fumarico	$CH_3COO . CH \, \Vert \, CH . COOCH_3$	102°	57,86	13500
Etere dimetilico dell'ac. succinico	$CH_3 . COO \, CH_2 \, \vert \, CH_2 . COO \, CH_3$	18°	35,72	580
Acido cinnamico	$C_6 H_5 . CH : CH . COOH$	133°	36,51	480
Acido idrocinnamico	$C_6 H_5 \, CH_2 . CH_2 . COOH$	48°	28,13	210
Fenantrene	$C_{14} H_{10}$	100°	23,7	1600
Diidrofenantrene	$C_{14} H_{12}$	94°	17,55	1200

[1] Questo concetto è implicito nelle considerazioni svolte da Nernst [Theoretische Chemie, VII ediz. (1913), 614, 705] sulla velocità di cristallizzazione considerata come reazione in sistema eterogeneo, e da Marcelin [Compt. Rend. 151 (1910), 1052].

Che le forze alle quali sono da attribuire certi fenomeni considerati d'indole fisica, come quelli di capillarità ed altri, siano della stessa natura delle forze chimiche, è stato anche recentemente sostenuto da Langmuir [*The constitution and fundamental properties of solids and liquids*. Journal of the Am Chem. Soc. (1916), 2221, (1917), 1848].

Come si vede, per ciascuna delle varie coppie di corpi isomorfi presi in esame, alla maggiore velocità di cristallizzazione caratteristica dei composti contenenti doppi legami corrisponde il maggior calore di fusione. Si può anche notare che i corpi non saturi fondono in generale a temperatura più alta dei corrispondenti saturi, ciò che denoterebbe la maggiore stabilità dei relativi cristalli. Per ciò che riguarda i calori di fusione, non si possono confrontare i valori inerenti a serie diverse di composti; così l'etere succinico, benchè composto saturo, ha un calore di fusione superiore al benzolo: ciò potrebbe significare che il calore di fusione è la risultante di varie tonalità termiche e non della sola affinità inerente all'unione delle molecole nel cristallo, nello stesso modo come il calore di soluzione è la somma algebrica dei varii calori di ionizzazione, idratazione ecc.

	Formula	P. f.	Cal. fus.	Velocità
Tolano	$C_6H_5 . C \equiv C . C_6H_5$	60°	28,68	330
Stilbene	$C_6H_5 . CH \equiv C_6H_5$	124°	40,00	6000
Etere metilico dell' ac. fenilpropiosilico .	$C_6H_5 . C \equiv C. COO CH_3$	18°	22,87	25
Etere metilico dell' ac. cinnamico . . .	$C_6H_5 . CH = CH . COO CH_3$	33°	26,16	60

Si noti che per questi corpi a legami tripli la velocità di cristallizzazione è inferiore a quella dei corrispondenti isomorfi a legami doppî e si avvicina a quella dei corpi, pure corrispondenti, a legami semplici (si confrontino i dati relativi al tolano con quelli del dibenzile). La corrispondenza coi calori di fusione è però mantenuta, e, alle minori velocità di cristallizzazione dei composti a tripli legami, corrispondono minori calori di fusione. I punti di fusione dei corpi a legami tripli sono pure inferiori a quelli dei corpi a legami doppii.

Per interpretare questo comportamento, si può dare, a mio parere, una duplice spiegazione.

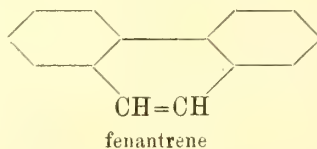
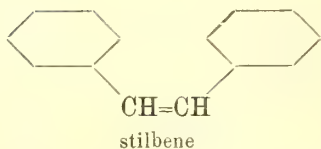
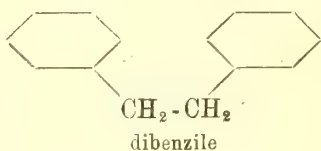
I. Che le molecole dei composti a tripli legami abbiano nello stato cristallino la medesima forma delle corrispondenti a legami doppî e semplici è dimostrato dall'isomorfismo cristallino trovato da Boeris [1] fra tolano, stilbene e dibenzile e dalla formazione di soluzioni solide dimostrata da Bruni [2].

La necessità di ammettere in questo caso pei derivati acetilenici forme fumariche è stata discussa da Pfeiffer [3] e da Bruni [4]; questi autori

(1) Questi Rendiconti, 1900, I, 382.
(2) Ibid., 1899, I, 462; 1902, II, 194.
(3) Zeitscrift für physikal. Chemie, XLVIII. 40.
(4) Questi Rendiconti, 1904, I, 626.

ritengono che ciò non sia facilmente conciliabile con le formule stereochimiche di van't Hoff e ammettono la rottura dei tripli legami e l'esistenza di valenze non soddisfatte.

Come argomento chimico viene portato il fatto che da derivati acetilenici si ottengono spesso in prevalenza derivati fumarici; comunque sia, mi sembra che, se l'isomorfismo su ricordato ci costringe ad ammettere che tutte le molecole a tripli legami siano a forma *anti* nello stato cristallino, ciò non sia affatto dimostrato per lo stato liquido: la possibilità di ottenere con processi di addizione forme maleiche e fumariche, sia pure in proporzioni diverse, autorizza piuttosto a credere che allo stato liquido sarebbero in equilibrio molecole dell'una forma e dell'altra. Ciò che si dice pei tripli legami, vale anche per quelli semplici, nei quali la trasposizione apparisce molto più facile.

La conseguenza di tutto questo, dal punto di vista della velocità di cristallizzazione, è ovvia: le molecole a legami doppî, nel cristallizzare, non hanno bisogno di cambiar forma, perchè allo stato liquido son tutte fumariche (oppure, se del caso, tutte maleiche) e però, con l'aiuto delle valenze latenti, cristallizzano con grande rapidità; al contrario, quelle a legami semplici e tripli debbono, in parte almeno, subire una preventiva trasposizione, ciò che è cagione di ritardo. Alla stessa conclusione si arriva se si considerano i liquidi relativi come soluzioni della forma maleica nella fumarica, perchè è noto che i corpi sciolti ritardano la cristallizzazione. L'influenza della configurazione molecolare mi pare bene illustrata dal seguente esempio: il dibenzile, come si rileva dai dati sopra riportati, ha una velocità di cristallizzazione di 580 mm. al minuto; il diidrofenantrene, dal quale il primo non differisce se non per la chiusura di un terzo anello, ha la velocità di 1200; ora, nel primo è possibile l'equilibrio allo stato liquido fra la forma maleica e la fumarica, mentre ciò non è nel secondo.

Nè si saprebbe a quale altra ragione attribuire tale differenza nella velocità di cristallizzazione, ove si rifletta che la chiusura del nucleo dovrebbe al contrario provocarne una diminuzione, come accade pel caso per-

fettamente parallelo dello stilbene e del fenantrene, che hanno rispettivamente le velocità di 6000 e di 1600.

II. La seconda spiegazione consisterebbe nell'ammettere che le valenze latenti dei legami tripli non entrino in azione nella formazione dei cristalli.

Dai calcoli termochimici di Thomsen [1] si rileva che il valore del legame semplice fra due atomi di carbonio (nei primi termini della serie delle paraffine) è di 14,71 cal., quello del legame doppio nelle corrispondenti olefine è di 13,27, e quello del legame triplo nell'acetilene, allilene, dipropargile è molto vicino a zero. Se nel processo di cristallizzazione dovessero entrare in giuoco le valenze latenti dei legami tripli, si dovrebbe pertanto avere un forte sviluppo di calore, ciò che sarebbe contraddetto dai valori bassi ottenuti pei calori di fusione. Non mancano accenni ad un comportamento chimico anormale dei composti a tripli legami: così l'acetilene purissimo non si combina che lentamente col cloro alla luce del sole [2], mentre è ben noto che l'etilene vi si combina assai bene alla luce diffusa. Molinari [3] ha poi sostenuto che l'ozono non attacca i legami tripli; e, sebbene Harries [4] abbia poi trovato che anche in questo caso si formano ozonidi, dalla polemica che ha avuto luogo fra questi autori risulta che, con aria ozonizzata a tenore non troppo elevato, i legami tripli non vengono intaccati, mentre, a parità di concentrazione, ciò avviene in modo completo coi legami doppî.

Non si può per ora dire se l'una o l'altra spiegazione sia da preferire, o se l'una escluda l'altra, o se finalmente entrambe concorrano in realtà a dar ragione dei fatti osservati. Certamente non si poteva pensare, come ho detto fin dall'inizio dei miei lavori sopra questo argomento, che la velocità di cristallizzazione fosse soltanto una funzione dell'affinità chimica; ma intanto, nei casi in cui non vi può essere dubbio sulla univocità della struttura molecolare allo stato liquido, come nei composti ciclici qui considerati, l'azione delle valenze latenti come acceleratrici del processo di cristallizzazione risulta evidente. In tutti i casi poi, alle maggiori velocità di cristallizzazione corrispondono, come espressione della tonalità termica complessiva del processo, i maggiori calori di fusione, e viceversa.

Debbo qui ringraziare il capitano dott. Antonio Laudati, che mi ha validamente coadiuvato nella esecuzione delle misure, di cui sono qui riportati i risultati.

(1) Thermochemische Untersuchungen (1906), 310.
(2) Römer, Liebigs Annalen, *233*, 183.
(3) Berichte, *40*, 4154; *41*, 585.
(4) Berichte, *40*, 4905; *41*, 1227.

Chimica fisiologica. — *Intorno alla attività riduttrice delle radici delle graminacee: la riduzione del nitrato di calcio per le radici delle graminacee* [1]. Nota II di **Giovanni Sani**, presentata dal Socio G. **Körner** [2].

Ho l'onore di riferire brevemente, a codesta illustre Accademia, i risultati di alcune ricerche che miravano a stabilire l'entità della attività riducente delle radici delle graminacee in genere e della riduzione del nitrato di calcio in ispecie, perchè hanno portato alla constatazione di fatti che non mi sembrano destituiti di ogni interesse; mentre, scopo principale dello studio che ho in corso, e che spero di presentare fra breve, è la prima sostanza organica azotata che si forma nella riduzione dei nitrati nelle graminacee.

Come era da prevedersi, anche il contenuto cellulare dei tessuti delle radici delle graminacee comunemente coltivate frumento, avena, orzo, mais, contiene sostanze riduttrici; ne ho determinato la quantità tanto nell'estratto acquoso come tale, quanto nell'estratto acquoso previamente defecato.

A tale scopo, porzioni pesate di radici vennero soppestate energicamente in grosso mortaio d'acciaio ed esaurite poi con acqua bollente aggiunta a piccoli volumi; le determinazioni quantitative vennero compiute tanto nel liquido come tale, quanto sul liquido dopo defecazione con acetato basico di piombo, eliminando poi il piombo in eccesso con carbonato sodico e pesando il rame ottenuto dall'ossidulo di rame con il metodo di Allihn.

Ricerche al microscopio mi confermarono l'assenza completa di amido nelle radici delle graminacee, ciò non esclude la possibilità che nelle radici vi sia anche glucosio; però, non avendo materiale sufficiente per ricercare la natura delle sostanze riducenti, ho riferito i risultati in rame metallico, riserbandomi, s' intende, di vedere nel prossimo anno da che è provocata la riduzione. Trascrivo i dati analitici ottenuti:

Radici di frumento.

Sostanza fresca.	gr.	9,15	
Sostanza secca	»	4,14	
Sostanza secca	°/o	45,24	= 36,08
Umidità	»	54,76	= 63,92

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio chimico agrario del R. Istituto superiore agrario di Perugia.

(2) Pervenuta all'Accademia il 19 ottobre 1919.

Attività riducente delle radici di frumento per il liquido di Fehling:

gr. 12,61 di radici di frumento forniscono gr. 0.1461 di rame metallico, il che dà per cento 1.16:

Radici di granoturco (mais).

Sostanza fresca	gr.	15,619
Sostanza secca	»	3,196
Sostanza secca	°/₀	20,43
Umidità	»	79,57

Attività riducente delle radici di granoturco per il liquido di Fehling (riduzione diretta):

gr. 5,767 di radici secche forniscono gr. 0,6464 di rame metallico; il che dà per cento 11.20;

gr. 5,767 di radici secche di granoturco, dopo defecazione del liquido, forniscono gr. 0,369 di rame metallico; il che dà, per cento, gr. 6.39.

NB. Nelle radici esistono in copia nitrati (reazione marcatissima con la difenilammina).

Radici di avena.

Sostanza fresca	gr.	3,9688
Sostanza secca	»	2,40
Sostanza secca	°/₀	60.60
Umidità.	»	39,40

Radici di avena.

Gr. 11,077 forniscono gr. 0,210 di rame metallico; il che dà °/₀ gr. 1.89.

Radici di orzo.

Gr. 6,086 forniscono gr. 0,3770 di rame metallico; il che dà °/₀ gr. 6.20.

Per tutte le piante le determinazioni vennero fatte all'inizio della fioritura, momento nel quale la necessità di utilizzare nitrati, se non è cessata, è certo assai attenuata (però l'attività riducente è tutt'altro che diminuita); mentre pel mais furono eseguite con piante aventi poco più di un mese di vita e la riduzione venne operata non solo alla ebollizione ma ancora in mezzo eminentemente alcalino, come è il liquido di Fehling.

Ma le radici delle piante hanno reazione acida; restava a vedere se, nelle condizioni naturali, nelle radici avveniva o no riduzione di nitrati. A tale scopo ho preso radici di piantine di mais, le ho schiacciate in mortaio d'acciaio in modo da ottenerne fine pasta, poi le ho chiuse entro pallone

con soluzione di nitrato di calcio all'1 $^0/_{00}$; in altro pallone ho posto la stessa pasta di radici, la stessa soluzione di nitrato di calcio ed ho aggiunto 30 cmc. di soluzione sodica di sale di Seignette, quella stessa che serve, unita alla soluzione di solfato di rame, a dare il liquido di Fehling. Dopo 24 e dopo 48 ore ho determinato l'acido nitrico: 1°) nella soluzione di nitrato di calcio all' 1 $^0/_{00}$; 2°) nella soluzione di nitrato di calcio con la pasta delle radici; 3°) nella soluzione di nitrato di calcio più la pasta delle radici ed insieme la soluzione di sale di Seignette alcalina per soda, ed ottenni i seguenti risultati:

1°) Nitrato di calcio all' 1 $^0/_{00}$	2°) Nitrato di calcio all' 1 $^0/_{00}$ con radici di granoturco	3°)
V = 10,6	V = 6,53	V = 10,6
t = 25,2	t = 26	t = 25,3
p = 728,5	p = 728,5	p = 728,5
f = 23,5	f = 25	

il 39,63 $^0/_0$ viene ridotto, poi la riduzione si arresta.

Con determinazioni successive nel liquido ove era la pasta di radici volumi di ossido di azoto rimasero costanti; ciò, a mio parere, pone in rilievo fatti non scevri di interesse.

In primo luogo, dunque, a freddo (temp. ordinaria), in medio acido, si riduce il nitrato di calcio; in secondo luogo, la riduzione del nitrato di calcio si arresta ad un determinato momento e più non progredisce; in terzo luogo, l'attività riducente pel nitrato di calcio da parte del succo cellulare delle radici è assolutamente ostacolata dalla soluzione sodica del sale di Seignette e con ogni probabilità dalla soda contenuta: ciò (e sarebbe in opposizione con l'affermazione del Leuw citata prima), si vedrà quando nuovo materiale potrò avere a mia disposizione. Ho inoltre constatato che nel primo pallone, dopo alcuni giorni, si aveva un'abbondante vegetazione di muffe, pur essendo cessata la riduzione; nell'altro pallone il liquido contenuto appariva come sterilizzato.

Data la diffusione degli acidi organici nei tessuti e considerando i molteplici fenomeni di riduzione che continuamente si verificano nelle piante, nessuna meraviglia che la riduzione del nitrato di calcio si verifichi in medio acido; ma il fatto che tale riduzione si verifica *in vitro*, avvalora certo la mia convinzione che le radici vive possano compiere questa riduzione e quella di altri sali, specie fosfati e solfati.

Il fatto poi che la riduzione cessa ad un determinato momento per non più progredire, fa certamente pensare alla probabilità che il prodotto di riduzione del nitrato di calcio sia tossico per l'agente stesso di tale riduzione, sia esso un enzima od altra sostanza, forse proteica, sensibile, e, quando questo raggiunga una determinata concentrazione, ne inibisca l'ulteriore attività; ciò che non avverrà nelle piante, per l'immediata utilizzazione del materiale

stesso appena formato, il che ne impedisce l'accumulo e quindi l'azione nociva.

Data l' importanza di questo fatto posto in luce dalla semplice esperienza or ora esposta, volli vedere se si verificava anche con altre radici: a tale scopo presi delle radici di frumento non più fresche, ma secche all'aria ed all'ombra, ed ebbi conferma piena della cosa. Anche qui dopo un determinato momento, di poco minore del precedente, la riduzione non procede più oltre; ecco i dati ottenuti:

Nitrato di calcio all'1 ‰	Nitrato di calcio all'1 ‰ con radici di frumento	
V = 10,6	V = 6,8	il 35,88 % viene ridotto; poi la riduzione si arresta.
$p = 725$	$t = 26$	
$f = 26$	$p = 725$	
	$f = 25$	

Infine la soluzione del sale di Seignette, alcalina per soda, impedisce assolutamente ogni riduzione del nitrato di calcio per parte del succo delle radici delle graminacee; ha cioè un effetto che può paragonarsi a quello del prodotto che si genera nella riduzione del nitrato di calcio quando abbia raggiunto un determinato grado di concentrazione nel liquido di esperimento.

Si sa che gli alcali influiscono energicamente sull'attività ed anche sulla vita dei fermenti organizzati, come pure sui fermenti amorfi, che alcune fermentazioni non si verificano se non in medio acido e che agiscono anche sugli albuminoidi.

Date le diverse condizioni in cui si verifica la riduzione del liquido di Fehling e quella del nitrato di calcio per effetto del succo delle radici, penso che differenti debbono essere gli agenti di tali riduzioni, come pure non deve essere uguale l'intensità riducente. La prima è data dalla quantità di sostanze chimiche realmente presenti, in quanto che riducendo si ossidano e quindi scompaiono; l'altra, con ogni probabilità, è continuativa, cioè la quantità della sostanza operante la riduzione è limitata, non così la sua azione quando scompaia o si elimini il relativo prodotto generato.

La possibilità di ripetere la riduzione del nitrato di Ca, *in vitro*, a mezzo delle radici, senza alcuna aggiunta, permette di separare la sostanza organica azotata che si forma, tanto più che il numero delle sostanze organiche azotate e non azotate è assai più limitato in questi organi che non negli altri delle piante.

Per la scarsezza del materiale che io ebbi fin qui a disposizione, restano senza risposta molti fatti. Spero prossimamente di potere intanto stabilire quale è il primo prodotto organico azotato che nelle radici può formarsi per riduzione del nitrato di calcio e quale sia l'agente di riduzione dei nitrati; perciò non ritengo opportuno di formulare ipotesi nuove.

Fisiologia. — *Radioeccitamento degli organi ematopoietici nella malaria.* Nota del dott. Antonino Pais, presentato dal Socio B. Grassi [1].

La conferma della mia tesi, che « i raggi X, eccitando gli organi ematopoietici, possono temporaneamente esaltare i poteri di resistenza dell'organismo in alcune malattie infettive », ho voluto cercare nella malaria.

All'esperimento mi incoraggiarono le considerazioni seguenti:

1°) La vivace reazione degli organi ematopoietici nell'infezione palustre. La fagocitosi attivissima negli organi ematopoietici e specialmente nella milza; l'iperattività del midollo osseo; i movimenti leucocitarî del sangue, nella malaria acuta, attestano la viva e diretta partecipazione di questi organi e di questi tessuti alle vicende dell'infezione. La mancanza di queste stesse reazioni, e la profonda leucopenia, e le alterazioni midollari nella malaria cronica, alle quali fanno riscontro la più grande tenacia o gravità dell'infezione e la mancanza delle vivaci periodiche manifestazioni reattive dell'organismo, sembrano esserne la conferma.

Poichè i raggi X si mostrano appunto capaci di suscitare le forme reattive che noi ritroviamo nella malaria — fagocitosi, modificazioni leucocitarie del sangue, trasformazione del midollo giallo delle ossa in midollo iperfunzionante con esaltata attività eritroblastica — mi sembrò che si dovesse esperimentare se a tali modificazioni degli organi ematopoietici corrispondessero modificazioni nel decorso della malattia.

2°) La curva termica della malaria si presta molto bene a rivelare le modificazioni reattive dell'organismo sotto lo stimolo dei raggi X. La curva termica è contemporaneamente rivelatrice del ciclo di vita dell'emosporidio e di ben definite fasi funzionali dei leucociti.

Golgi ha per primo dimostrato che « il fagocitismo è processo che svolgesi periodicamente quale regolare funzione dei globuli bianchi, funzione che si svolge con precisabili modalità in corrispondenza di determinate fasi del ciclo evolutivo dei parassiti malarici ed in determinato periodo di ciascun accesso febrile ».

3°) Le reazioni eventualmente provocate dai raggi X non avrebbero potuto attribuirsi che ad azione diretta negli organi ematopoietici, dovendo escludersi sicuramente l'influenza dell'energia radiante sulla vita e sullo sviluppo dell'emosporidio.

[1] Pervenuta all'Accademia il 25 luglio 1919.

È noto infatti come i raggi X, a differenza dei raggi ultravioletti, α, β del radium, non esercitino alcun potere sui microrganismi, nelle dosi, pur elevatissime, usate in terapia.

A maggior ragione le dosi più piccole che mi proponevo di usare non avrebbero potuto influire se non sugli organi ematopoietici ed in modo speciale sui leucociti che occupano il grado più elevato nella gerarchia delle radio-sensibilità.

Sulla guida della mia ipotesi iniziai le esperienze nella primavera del 1917, nelle diverse forme e tipi di malaria.

Le irradiazione venivano dirette diffusamente sulla milza; i raggi, filtrati con filtri spessi da 1 a 4 mm., emergevano da un tubo molto duro a regime molto costante. La quantità di energia usata nelle varie esperienze fu molto varia: dalle alte dosi, comunemente usate in terapia distruttiva, alle dosi piccolissime, frazioni di unità X, non mai, io credo, esperimentate sinora.

Da 3000 osservazioni su 250 casi di malaria, emersero le conclusioni seguenti:

Le alte dosi di raggi X aggravano le manifestazioni termiche dell'infezione malarica; rendono anticipante l'accesso febrile; più elevata e prolungata la curva termica; rendono doppie e triple rispettivamente la terzana e quartana; tendono ad aggravare sino alla sub-continuità la estivo-autunnale.

Le piccole dosi, al contrario, rendono più tenui le manifestazioni termiche; gli accessi febrili postecipanti, meno elevati, di minor durata; e possono sopprimere le manifestazioni febbrili dell'infezione.

Tali manifestazioni dipendono non solo dalla dose, ma da questi altri due fattori:

1°) tipo e periodo dell'infezione;

2°) momento in cui viene irradiato l'infermo.

Tipo e periodo dell'infezione. — Le varie forme di malaria e i varî periodi dell'infezione esigono quantità diverse di energia. Una eguale dose è capace di attenuare o aggravare le manifestazioni termiche a seconda si tratti d'una forma terzana, quartana, estivo-autunnale, di forme acute o croniche.

In tesi generale può dirsi che quanto più acuta è la forma infettiva, e gravi e aritmiche sono le manifestazioni febbrili, tanto più piccole sono le dosi necessarie a modificare la curva termica.

L'ora dell'irradiazione. — Ogni forma malarica ha un'ora ottima di irradiazione nella quale una determinata dose si mostra capace di attenuare o reprimere le manifestazioni termiche dell'infezione. Prima o dopo di quest'ora, la stessa quantità di raggi può essere insufficiente a determinare modificazioni della curva o può renderne più grave lo sviluppo.

Queste condizioni, e la varietà molto estesa dei fenomeni a cui danno luogo, trovano una plausibile spiegazione nella mia ipotesi.

Che le alte quantità di raggi, ledendo gli organi ematopoietici o diminuendo la loro attività, rendano più virulento indirettamente lo sviluppo dell'emosporidio, si deve ammettere senza difficoltà. Ed inversamente sembra logico ammettere che le piccole dosi, eccitando gli organi ematopoietici, possano esaltare quelle reazioni organiche che raggiungono il più alto grado nella spontanea guarigione dell'infezione.

La diversa sensibilità delle varie forme di malaria dovrebbe mettersi in rapporto con lo stato di differente funzionalità degli organi ematopoietici e quindi con il loro diverso grado di radiosensibilità.

Sappiamo infatti che gli elementi cellulari sono tanto più sensibili all'azione dei raggi X, quanto più alta è la loro attività funzionale e riproduttrice.

Nella malaria la radiosensibilità sembra appunto tanto più grande, quanto maggiore e più recente è la reazione degli organi ematopoietici. Tale fenomeno trova esatto riscontro nella leucemia.

L'influenza esercitata dal momento vario dell'irradiazione, si spiegherebbe considerando che l'esaltamento degli organi ematopoietici, e quindi l'esaltamento delle difese specifiche dell'organismo, deve seguire una curva nella quale l'*optimum* può coincidere, essere cioè in fase, od essere sfasato con la normale e ritmica curva reattiva dell'organismo.

Se l'*optimum* dell'eccitamento coincide con il momento utile, nel quale sono cioè più elevate le normali reazioni difensive (una di tali reazione, come Golgi ha rivelato, è appunto la fagocitosi), si avranno effetti terapeutici; se l'*optimum* precede il momento utile, si avranno invece queste due possibilità opposte:

1°) che dopo una fase di esaurimento gli organi ematopoietici raggiungano la loro attività normale, sì che l'episodio morboso si svolga in condizioni di ricostituita resistenza: in tal caso l'irradiazione non avrà arrecato sul decorso dell'infezione alcun effetto apprezzabile:

2°) che la fase di esaurimento coincida con l'episodio febbrile, forse con la schizogenesi, in ogni modo con il momento in cui l'organo reagisce più attivamente: in tal caso l'emosporidio, libero dal controllo dell'organismo, assumerà maggiore attività, e si avrà di conseguenza un esaltamento della forma morbosa.

E. M.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1919.

(*Segue in terza pagina*)

E. Mancini *Segretario d'ufficio responsabile.*

Pubblicazione bimensile. **N. 9.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 novembre **1919.**

Volume XXVIII.° — Fascicolo 9°

2° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Renpiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 9 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a pagine 4 ½.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 30 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta a stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 50 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 30 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 novembre 1919.

A. Ròiti, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Zoologia. — *La distribuzione geografica attuale delle formiche.* Memoria del Socio C. Emery.

Fisiologia. — *Rapporto funzionale tra cervelletto e labirinto non acustico.* Memoria del Socio A. Stefani

I due precedenti lavori saranno pubblicati nei volumi delle Memorie.

Matematica. — *Un teorema sui fasci reali di curve algebriche.* Nota di Luigi Brusotti, presentata dal Corrisp. L. Berzolari.

1. Un fascio

$$f + \lambda g = 0$$

di curve piane algebriche, di ordine n, si dirà *algebricamente generico* quando l'equazione di grado $3(n-1)^2$ in λ, che si ottiene annullando il discriminante della curva corrente, abbia radici tutte distinte. Il fascio ha n^2 punti-base semplici e distinti, e presenta $3(n-1)^2$ punti doppî (ciascuno a tangenti distinte) appartenenti ad altrettante curve distinte del fascio.

Un fascio reale di curve piane algebriche si dirà *topologicamente generico*, quando i suoi punti-base *reali* siano tutti semplici e distinti, e le sue curve

dotate di punti multipli *reali* sian tutte distinte, essendo ciascuna dotata di un sol punto doppio reale a tangenti distinte (reali od immaginario-conjugate). Ciò equivale ad affermare che le parti reali delle curve reali del dato fascio costituiscono un *fascio di curve grafiche generico*, in un senso già altrove precisato ([1]).

Un fascio reale algebricamente generico lo è pure topologicamente; la reciproca non sussiste, perchè la presenza di singolarità immaginario-conjugate può escludere la genericità algebrica pur rispettando quella topologica.

2. Ciò posto si vuol qui dimostrare il seguente teorema:

Se in un fascio φ (reale) topologicamente generico di curve di genere $p > 0$ esiste una curva (reale) la quale possegga un circuito passante per uno solo dei punti-base (reali), le curve di φ dotate di analoga proprietà si distribuiscono in μ distinti continui, essendo

$$0 < \mu \leq p;$$

e ciascuna di esse è fornita di almeno $\mu + 1$ circuiti. Il punto-base in questione è uno stesso punto B *per tutti i continui* ([2]).

Invero le parti reali delle curve reali di φ costituiscono un fascio di curve grafiche del tipo studiato ai numeri 66 e 67 del citato lavoro, onde intanto segue l'unicità di B.

Inoltre, se si esclude il caso ovvio in cui ogni curva reale di φ sia del tipo richiesto, il piano projettivo si può immaginare diviso in un numero pari ($= 2\mu$) di regioni, ciascuna delle quali è opposta al vertice a se stessa in B. Ed è lecito ordinare tali regioni ciclicamente attorno a B in tal maniera che ciascuna di quelle aventi posto dispari si possa immaginare generata (coll'esclusione di eventuali regioni semplicemente connesse) da un circuito di una curva di φ, il quale ruoti (deformandosi) intorno a B, senza passare per ulteriori punti-base, mentre la curva stessa descrive in φ un continuo.

Sono così introdotti *i μ continui in cui si distribuiscono le curve di φ aventi un circuito che passi per un sol punto-base.*

Si aggiunga che nel *sistema connesso* ([3]) di cui fa parte B gli ulteriori punti-base si ripartiscono in μ gruppi situati rispettivamente entro le μ regioni di posto pari ed in ciascun gruppo sono in numero pari non nullo.

([1]) Brusotti, *Sui fasci di curve grafiche* (in corso di pubblicazione).

([2]) Per $p = 0$, se una curva di φ ha la detta proprietà, lo stesso avviene per ogni altra curva (reale) di φ. Si può quindi porre $\mu = 1$.

([3]) Mem. cit., num. 61. Due punti-base diconsi fra loro *collegati* se sono estremi di un segmento appartenente ad un circuito di una curva di φ e non passante per ulteriori punti-base. Ora dato un punto-base si introducano tutti quelli collegati con esso, poi gli ulteriori collegati con uno dei precedenti; e così via fin che sia possibile. Così si costruisce un *sistema connesso di punti base.*

Ma la connessione fra due punti di diverso gruppo non può avvenire che per mezzo di B.

Segue che per una curva appartenente ad uno dei μ continui sopra ricordati, trovandosi il punto-base B isolato sul circuito dispari, due punti-base di due diversi gruppi sono situati sopra due diversi circuiti pari. *Onde il numero totale* k *dei circuiti di una curva appartenente ad uno dei detti* μ *continui è* $\geq \mu + 1$.

Ma poichè per il teorema di Harnack ([1]), è

$$k \leq p + 1\,,$$

è pure, a più forte ragione, $\mu + 1 \leq p + 1$, ossia

$$\mu \leq p\,.$$

Il teorema è così interamente dimostrato.

3. Esso è applicabile ai fasci reali di cubiche piane ($p = 1$).

Precisamente: *Se in un fascio reale di cubiche piane, topologicamente generico, esiste una cubica il cui serpentino passa per un sol punto-base, di tali cubiche esiste nel fascio uno ed un sol continuo.*

O, ciò che è lo stesso: *Se in un fascio reale di cubiche piane, topologicamente generico e dotato di* $b > 1$ *punti-base reali, esiste una cubica il cui ovale passa per* $b - 1$ *di essi, di tali cubiche nel fascio esiste uno ed un sol continuo.*

In questa forma, e soltanto per il caso $b = 9$, il teorema è dimostrato dal Mohrmann, con procedimento non breve e forse non suscettibile di estensione ([2]).

([1]) Harnack, *Ueber die Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven* (Mathematische Annalen, Bd X; pp. 189-198). Cfr. Enriques, *Teoria geometrica delle equazioni*, (Zanichelli, Bologna), vol. II, pag. 264; e G. Lery, *Sur la fonction de Green pour un contour algébrique* [Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure, 32 (1915) pagine 49-135].

([2]) Mohrmann, *Ueber das Büschel von ebenen Kurven 3. Ordnung mit neun reellen Grundpunkten* (Mathematische Annalen, Bd LXXIV, pp. 319-340). Vedasi specialmente § 5.

Matematica. — *Invarianti e covarianti metrici nelle deformazioni di specie superiore delle superficie.* Nota I di E. BOMPIANI, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

1. In una Nota (¹) di carattere preventivo sulle deformazioni delle superficie che lasciano invariati gli elementi lineari e le prime $\nu - 1$ curvature delle sue curve (*deformazioni di specie* ν), ho mostrato che una superficie è individuata, rispetto al gruppo di tali deformazioni, dalla conoscenza delle ν forme differenziali binarie

$$F_{2\mu} = \sum_{0}^{\mu-1}{}_s \binom{2\mu}{s} [\mu, 0, \mu - s, s]\, du_1^{2\mu-s}\, du_2^s + \binom{2\mu}{\mu} [\mu, 0, 0, \mu]\, du_1^{\mu}\, du_2^{\mu} +$$

$$+ \sum_{0}^{\mu-1}{}_s \binom{2\mu}{s} [s, \mu - s, 0, \mu]\, du_1^s\, du_2^{\mu-s} \qquad (\mu = 1, \dots, \nu)$$

ove

$$[h, k, l, m] = \sum_{1}^{n}{}_i \frac{\partial^{h+k} x_i}{\partial u_1^h \partial u_2^k} \frac{\partial^{l+m} x_i}{\partial u_1^l \partial u_2^m} \quad (^2)$$

essendo $x_i(u_1, u_2)$ $(i = 1, \dots, n)$ le coordinate di un punto generico della superficie di S_n che si vuol deformare: cioè se due superficie, i cui punti siano riferiti agli *stessi* parametri u_1, u_2, si corrispondono in una deformazione di specie ν, i simboli $[h, k, l, m]$ che figurano in $F_2, F_4, \dots, F_{2\nu}$ hanno gli stessi valori in punti corrispondenti, e viceversa.

Le forme precedenti sono le più semplici per individuare una superficie rispetto ad un tale gruppo *quando sia assegnato il sistema coordinato* u_1, u_2 *le cui linee* ($u_1 =$ cost., $u_2 =$ cost.) *si corrispondono sulle due superficie applicabili di specie* ν, in quanto ciascuna introduce, come coefficienti, simboli [ ] non contenuti nelle precedenti e caratteristici di una deformazione la cui specie supera di 1 la precedente.

Ma esse *non* sono atte a costruire una teoria invariantiva poichè un cambiamento di variabili (u_1, u_2) in (u_1', u_2') ne muta completamente la

(¹) *Basi analitiche per una teoria delle deformazioni delle superficie, di specie superiore* (questi Rendiconti, vol. XXV, 1916₁). Allo stesso argomento si collegano le altre mie Note: *Problemi nuovi di geometria metrico-differenziale* (ibid., vol. XXIV, 1915₁); *Affinità e superficie applicabili* (vol. XXVI, 1917₁).

(²) Ricordo che E. E. Levi ha chiamato *ordine* di un simbolo $[h, k, l, m]$ il maggiore dei due numeri $h + k$, $l + m$. Se $h + k = l + m$ il simbolo si dice *principale*; altrimenti, *dedotto*. Per le citazioni e maggiori particolari cfr. *Basi analitiche* ecc.

struttura (introducendo derivate di u_1, u_2 rispetto ad u'_1, u'_2 fino all'ordine ν incluso).

Il problema della ricerca degli invarianti e dei covarianti assoluti di una superficie rispetto alle deformazioni di specie ν, cui sono destinate questa Nota ed una successiva (¹), si spezza nei seguenti:

1°. Costruzione di espressioni invarianti in una deformazione di specie ν, *quando si lasci immutato il sistema di linee* u_1, u_2.

2°. Formazione, per mezzo delle precedenti, di espressioni covarianti o invarianti (*relativi*) rispetto alle trasformazioni di linee coordinate.

3°. Costruzione degli invarianti e covarianti *assoluti*.

Il primo problema è di carattere *differenziale*; gli altri due sono di carattere *algebrico*; per il primo bastano le forme $F_{2\mu}$, per gli altri ci serviremo di un nuovo sistema di *forme simboliche* L_μ ($\mu \leq \nu$) i cui coefficienti hanno la proprietà di trasformarsi per un cambiamento di variabili come i coefficienti di una forma algebrica (e i loro quadrati hanno un notevole significato geometrico).

Il risultato fondamentale di questa ricerca è l'estensione del « theorema egregium » di Gauss sull'invarianza della curvatura di una superficie nelle applicabilità; *proveremo infatti l'esistenza* (*dandone l'effettiva costruzione*) *di un sistema d'invarianti e di covarianti per deformazioni di specie* $\nu - 1$ *contenenti i coefficienti della forma che* (*insieme con le precedenti*) *serve ad individuare le deformazioni di specie* ν.

2. Partiamo da alcune osservazioni elementari relative al problema 1°. In una deformazione di specie ν sono invarianti tutti i simboli principali d'ordine $\leq \nu$ ed ogni invariante è funzione di essi.

Però *la differenza*

$$[h\,.\,k\,,l\,,m] - [h-1\,,k+1\,,l+1\,,m-1]$$
$$h+k=l+m=\nu$$

per h ed $m \geq 1$, ovvero

$$[h\,,k\,,l\,,m] - [h+1\,,k-1\,,l-1\,,m+1]$$

per k ed $l \geq 1$, pur essendo costruita con due simboli principali di ordine ν, risulta (²) esprimibile per soli simboli principali d'ordine $\leq \nu - 1$, quindi *è invariante per deformazioni di specie* $\nu - 1$.

Altrettanto accade, com'è evidente, per la differenza

$$L_{\nu-h,h}\, L_{\nu-l,l} - L_{\nu-h-1,h+1}\, L_{\nu-l+1,l-1}$$

(¹) Anche queste Note hanno carattere preventivo

(²) *Basi analitiche* ecc., pag. 632.

ove

$$L_{\nu-h,h} = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial^\nu x_i}{\partial u_1^{\nu-h}\,\partial u_2^h} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial u_2} \end{matrix} \right\| : \sqrt{\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial^{\nu-1} x_i}{\partial u_1^{\nu-1}} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial u_2} \end{matrix} \right\|^2}$$

ove la matrice a denominatore è formata con tutte e sole le derivate linearmente indipendenti di ordine $\leq \nu - 1$, e quella a numeratore contiene in più, nella prima linea, le derivate $\dfrac{\partial^\nu x_i}{\partial u_1^{\nu-h}\,\partial u_2^h}$.

3. Per costruire gli invarianti e i covarianti di una deformazione (per cambiamenti di variabili) conviene partire dalle forme simboliche, di cui qui scrivo solo quella d'ordine ν:

$$L_\nu = \sum_0^\nu {}_h \binom{\nu}{h} L_{\nu-h,h}\, du_1^{\nu-h}\, du_2^h .$$

La legittimità di adoperare le L_ν come *forme* simboliche risiede in ciò che *per un cambiamento di variabili i coefficienti simbolici* $L_{\nu-h,h}$ *si mutano proprio come i coefficienti di una forma binaria di grado* ν.

4. Si ha una riprova intuitiva di questo comportamento nel significato geometrico di L_ν^2 (*forma effettiva di grado* 2ν).

Chiamiamo, come è d'uso, spazio $(\nu - 1)$-osculatore alla superficie in x, o brevemente $S(\nu - 1)$-osculatore, quello determinato dal punto x e dai suoi punti derivati (che cioè hanno per coordinate le derivate di x_i) fino all'ordine $\nu - 1$. Allora:

Il quadrato della distanza di un punto della superficie, preso nell'intorno d'ordine ν *di un punto* x *dallo* $S(\nu - 1)$ *osculatore in* x, *vale appunto* L_ν^2.

È poi evidente che *alle forme* F *si possono sostituire le forme* L_1^2, $L_2^2, \dots, L_\nu^2$, *cioè queste individuano ancora la superficie rispetto alle deformazioni di specie* ν; e dall'osservazione precedente segue:

In una deformazione di specie ν *la varietà degli* $S(\nu - 1)$*-osculatori riceve una deformazione di prima specie* (*ordinaria applicabilità*); *e più in generale la varietà degli* $S(\nu - h)$*-osculatori riceve una deformazione di specie* h.

È questa la ragione dei legami che passano fra le deformazioni per applicabilità di una varietà e le deformazioni di specie superiore delle superficie [1].

[1] Vedansi a questo proposito le mie Note: *Forma geometrica delle condizioni per la deformabilità delle ipersuperficie* (questi Rendic., vol. XXIII, 1914₁) e *Les hypersurfaces déformables dans un espace euclidien réel à n* (>3) *dimensions* (Comptes Rendus de l'Acad. des sciences, t. 164, 1917₁).

5. Poichè le forme simboliche L_ν possono considerarsi, nei riguardi delle trasformazioni di variabili sulla superficie, come forme algebriche nei differenziali du_1, du_2, *possiamo*, con le regole note per queste, *costruire gli invarianti e i covarianti in una deformazione di specie* ν.

Basta eseguire le *spinte* sulle forme L_μ $(\mu = 1, \ldots, \nu)$ e sui covarianti che così se ne deducono, fino a trovare un sistema completo d'invarianti. Bisogna però tener presente che, *operando su* L_μ *di indici differenti, si ottengono covarianti o invarianti simbolici*, poichè vi figurano prodotti di matrici fra loro diverse: *si otterranno invarianti o covarianti effettivi moltiplicando due di quelli simbolici contenenti matrici delle stesse dimensioni* (in particolare facendone il quadrato).

6. Il *teorema fondamentale* corrispondente a quello di Gauss è il seguente:

Gli invarianti e i covarianti effettivi che si ottengono a partire dalla sola forma L_ν *(che, con le precedenti, serve a caratterizzare le deformazioni di specie* ν*) restano tali nelle deformazioni di specie* $\nu - 1$.

Basterà provarlo per le spinte eseguite direttamente su L_ν; perchè gli altri covarianti o invarianti si formano con esse e con le spinte eseguite sul sistema di L_ν e delle spinte già trovate. Ma poichè le spinte prima considerate risultano già forme effettive e non simboliche, non si potrà operare su di esse e sulla L_ν senza ottenere invarianti o covarianti simbolici; mentre il teorema vale per i covarianti effettivi (non ottenuti come prodotti di quelli simbolici). È poi naturalmente da escludere la spinta nulla eseguita su L_ν, cioè L_ν^2, che dà appunto la ν-esima forma fondamentale.

La r-esima spinta eseguita su L_ν è definita dall'operazione

$$\omega^r(L_\nu, L_\nu) = \frac{[(\nu - r)!]^2}{[\nu!]^2} \sum_0^r{}_\rho (-1)^\rho \binom{r}{\rho} \frac{\partial^r L_\nu}{\partial du_1^{r-\rho}\, \partial du_2^\rho} \frac{\partial^r L_\nu}{\partial du_1^\rho\, \partial du_2^{r-\rho}}$$

(per avere un risultato non nullo, dev'essere r pari e $\leq \nu$); quindi

$$\omega^r(L_\nu, L_\nu) = \sum_0^{\nu-r}{}_{h,k} \binom{\nu - r}{h} \binom{\nu - r}{k} \sum_0^r{}_\rho (-1)^\rho \binom{r}{\rho} \times$$

$$\times\, L_{\nu-k-\rho,\, k+\rho}\, L_{\nu-h-r+\rho,\, h+r-\rho}\, du_1^{2(\nu-r)-(h+k)}\, du_2^{h+k}.$$

Dimostriamo che i coefficienti di questa forma (che pure contengono derivate d'ordine ν) sono invarianti (fissate le linee coordinate sulla superficie) per deformazioni di specie $\nu - 1$ (invece che ν).

Il coefficiente di $du_1^{2(\nu-r)-t}\, du_2^t$ in questa forma, per $t \leq \nu - r$, è

$$\sum_0^t{}_k \binom{\nu - r}{k} \binom{\nu - r}{t - k} \sum_0^r{}_\rho (-1)^\rho \binom{r}{\rho} L_{\nu-k-\rho,\, k+\rho}\, L_{\nu-r-t+k+\rho,\, r+t-k-\rho}$$

(mentre, se fosse $t \geq \nu - r$, basterebbe scambiare u_1 con u_2; quindi scam-

biare l'ordine degli indici in ogni $L_{\nu-h,h}$). Servendoci dell'identità numerica

$$\binom{r}{\varrho} = \binom{r-1}{\varrho} + \binom{r-1}{\varrho-1}$$

osservando che per $\varrho = r$ manca il primo coefficiente binomiale a destra dell'uguaglianza e così il secondo per $\varrho = 0$, e cambiando l'indice nella seconda sommatoria che si presenta, quel coefficiente si scrive

$$\sum_0^t {}_k \binom{\nu - r}{k} \binom{\nu - r}{t - k} \sum_0^{r-1} {}_\rho (-1)^\rho \binom{r-1}{\rho} \{ L_{\nu-k-\rho,\, k+\rho}\, L_{\nu-r-t+k+\rho,\, r+t-k-\rho} -$$

$$- L_{\nu-k-\rho-1,\, k+\rho+1}\, L_{\nu-r-t+k+\rho+1,\, r+t-k-\rho-1} \} .$$

Ma le espressioni formate con le $L_{\nu-h,h}$ che compariscono in ciascuna parentesi sono proprio del tipo esaminato in fine al n. 2: è così provato quanto si voleva ([1]).

Notiamo esplicitamente il corollario:

Soltanto nelle deformazioni di specie dispari ($= \nu - 1$) *esiste un invariante formato con sole spinte eseguite sulla forma* L_ν (e non con spinte delle spinte), ed è

$$\tfrac{1}{2}\, \omega^\nu (L_\nu , L_\nu) = L_{\nu 0}\, L_{0\nu} -$$

$$- \binom{\nu}{1} L_{\nu-1,1}\, L_{1,\nu-1} + \cdots + (-1)^{\nu/2} \tfrac{1}{2} \binom{\nu}{\nu/2} L^2_{\nu/2,\nu/2} .$$

7. I covarianti e gli invarianti finora ottenuti sono *relativi*, in quanto per una trasformazione di variabili vengono moltiplicati per una potenza del determinante della sostituzione; poichè anche $\sqrt{EG - F^2}$ viene moltiplicato per detto determinante, *per avere gli invarianti e i covarianti assoluti di una deformazione basta dividere quelli* (*relativi*) *trovati per una conveniente potenza di* $\sqrt{EG - F^2}$.

Nella Nota successiva darò alcune conseguenze del teorema fondamentale.

([1]) Sono evidentemente nulli i termini dello sviluppo precedente, per quali $2(k + \varrho) = r + t - 1$.

Meccanica. — *Sopra alcuni casi singolari nella teoria dei giroscopi asimmetrici pesanti.* Nota II di ORAZIO LAZZARINO, presentata dal Corrisp. R. MARCOLONGO [1].

2. PER U COSTANTE NON SI HANNO CASI PARTICOLARI IN CUI LE ROTAZIONI NON SIANO PERMANENTI. — Per vedere se, per U costante, esistano eventualmente dei casi particolari in cui S e T non siano costanti, si può considerare la (VI'_b) scritta sotto la forma

$$(VI''_b) \qquad (g \wedge \alpha\Omega)^2 \,.\, T' = (g \wedge \alpha\Omega) \times (\mathbf{k}_1 \wedge g)\, S' \,.$$

Il caso finora escluso $g \wedge \alpha\Omega = 0$ annulla identicamente la (VI''_b); però la (VI'_a) porge, in tale ipotesi,

$$(11) \qquad S' = (g \wedge \alpha\Omega) \times \Omega = 0$$

e quindi $S = \text{cost}\,,\ T = \text{cost}\,.$

Supposto ora $g \wedge \alpha\Omega \neq 0$, i casi che si possono presentare sono

$$(12) \quad \mathbf{k}_1 \wedge g = 0 \ ,\ (g \wedge \alpha\Omega) \times (k_1 \wedge g) = 0 \ ,\ (g \wedge \alpha\Omega) \times (\mathbf{k}_1 \wedge g) \neq 0 \,.$$

Se è $k_1 \wedge g = 0$ dalla (VI''_b), risulta $T' = 0$ e quindi $T = \text{cost}\,,\ S = \text{cost}.$

Il caso $(g \wedge \alpha\Omega) \times (k_1 \wedge g) = 0$ è incompatibile con la ipotesi $U = \text{costante}$. Infatti, supposto $U' = \alpha\Omega \times k_1 \wedge g = 0$, si ha

$$(13) \qquad (g \wedge \alpha\Omega) \wedge (k_1 \wedge g) = -\,\alpha\Omega \times \mathbf{k}_1 \wedge g \,.\, g = 0\,;$$

e da qui, poichè è per ipotesi $g \neq 0$, risulta evidente l'incompatibilità della condizione $U = \text{costante}$ con la seconda delle (12).

Finalmente la terza ipotesi rientra nel caso del giroscopio asimmetrico generale per il quale si è già visto che S e T devono essere costanti.

Quindi si può dire che « *con l'ipotesi* $U = \text{costante}$, *solo le rotazioni permanenti sono compatibili* ».

Esaminando più particolarmente il caso $k_1 \wedge g = 0$, il caso cioè in cui la retta che passa per il punto fisso e per il baricentro del giroscopio si mantiene verticale, si vede subito che per la (I) si ha $(\alpha\Omega)' = 0$ e quindi $\alpha\Omega = \text{cost}$, cioè « *in questo caso il vettore del momento rispetto ad O dell'impulso si mantiene costante non solo in grandezza, ma anche in direzione e verso* ».

[1] Pervenuta all'Accademia il 1° giugno 1919.

Inoltre, poichè i moti possibili sono rotazioni permanenti, sarà $\Omega' = 0$ e quindi anche $\alpha \Omega' = 0$ e perciò dall'equazione

$$(\alpha \Omega)' = \alpha \Omega' + \Omega \wedge \alpha \Omega = 0$$

si deduce

$$(14) \qquad \Omega \wedge \alpha \Omega = 0$$

cioè « *il giroscopio ruota permanentemente attorno ad un asse parallelo al vettore del momento rispetto ad O dell'impulso* ».

In particolare, se il giroscopio è *simmetrico* rispetto ad un asse $O\mathrm{s}$, si ha

$$\alpha \Omega = \mathrm{A} \Omega + a \mathrm{H}(\mathrm{s}, \mathrm{s}) \Omega = \mathrm{A} \Omega + a . \Omega \times \mathrm{s} . \mathrm{s}$$

dove A e a sono numeri reali, e allora la (14) si scrive

$$5 \qquad a . \Omega \times \mathrm{s} . \Omega \wedge \mathrm{s} = 0$$

e questa è soddisfatta quando sia $\Omega \wedge \mathrm{s} = 0$ oppure $\Omega \times \mathrm{s} = 0$, essendo $a \neq 0$. Quindi « *in questo caso particolare, i moti del giroscopio saranno « delle rotazioni permanenti attorno ad un asse fisso nello spazio, parallelo « o perpendicolare all'asse di simmetria del giroscopio* ».

Se, infine, il giroscopio è simmetrico rispetto al punto fisso, allora, riducendosi l'omografia α d'inerzia ad un numero, la (14) risulta identicamente soddisfatta, il che significa che « *qualunque retta passante per il « punto fisso può essere un asse permanente di rotazione, che resta però « sempre lo stesso durante il moto* ».

3. Studio del caso in cui l'invariante principale S è costante. Indicando con S_0 il valore costante di S, si ha

$$\alpha\Omega \times \mathrm{g} = \mathrm{S}_0 ;$$

cioè « *la proiezione del vettore $\alpha\Omega$ dell'impulso sulla retta che congiunge « il punto fisso col baricentro del giroscopio si mantiene costante durante « il moto* ». In questo caso le equazioni (III) e la (VI_a) si scrivono

$$(\mathrm{A}) \qquad \Omega \times \alpha\Omega = 2\mathrm{T} \;;\; (\alpha\Omega)^2 = 2\mathrm{U} \;;\; \mathrm{g} \times \alpha\Omega = \mathrm{S}_0 \;;\; \mathrm{g} \times \alpha\Omega \wedge \Omega = 0$$

e le due ultime rappresentano rispettivamente un piano passante per il punto fisso O e il cono degli assi permanenti di rotazione (*cono di Staude*).

Secondochè queste due equazioni sono o no tra loro indipendenti, cioè a dire secondochè il detto piano taglia il cono o ne è un elemento costitutivo, si hanno evidentemente due casi diversi.

Cominciando dall'esame del primo caso, in cui il piano per O taglia il cono di Staude, osserviamo che la (VI_b), per $\mathrm{S}' = 0$ e tenendo conto

della (VII), dà la relazione

(1) $$dT/dU = (2g^2 T - g \times \Omega . S_0) / (2g^2 U - S_0^2)$$

la quale, per le (A), può anche scriversi

(1') $$dT/dU = [\Omega \times \alpha\Omega . g^2 - g \times \Omega . g \times \alpha\Omega] / [(\alpha\Omega)^2 . g^2 - (g \times \alpha\Omega)^2] .$$

D'altra parte, l'espressione di dT/dU può ricavarsi direttamente dalle (A): infatti, derivando le (A) rispetto ad U e tenendo presente che l'omografia α è una dilatazione, si ricavano le equazioni

(B) $$\alpha\Omega \times d\Omega/dU = dT/dU \ ; \ \alpha^2\Omega \times d\Omega/dU = 1 \ ; \ \alpha g \times d\Omega/dU = 0 \ ;$$
$$K\gamma g \times d\Omega/dU = 0 ,$$

dove

(2) $$K\gamma = -(\alpha\Omega) \wedge + \alpha . \Omega \wedge$$

è la coniugata dell'omografia

(3) $$\gamma = (\alpha\Omega) \wedge - \Omega \wedge . \alpha .$$

Ora dalla 2ª, 3ª e 4ª delle (B) si ottiene al modo solito la relazione

$$\alpha^2\Omega \times \alpha g \wedge K\gamma g . d\Omega/dU = \alpha g \wedge K\gamma g$$

e, in modo analogo, dalla 1ª, 3ª e 4ª delle (B) si ha

$$\alpha\Omega \times \alpha g \wedge K\gamma g . d\Omega/dU = (dT/dU) . \alpha g \wedge K\gamma g .$$

Dividendo a membro a membro queste due relazioni e risolvendo rispetto a dT/dU, si ottiene la nuova espressione cercata, cioè

(4) $$dT/dU = \alpha\Omega \times \alpha g \wedge K\gamma g , \alpha^2\Omega \times \alpha g \wedge K\gamma g .$$

Per dimostrare che le formole (1') e (4), considerate come funzioni di U, sono fra loro identiche, basta provare che sussiste l'identità

(5) $$\alpha\Omega \times \alpha g \wedge K\gamma g . [(\alpha\Omega)^2 g^2 - (g \times \alpha\Omega)^2] -$$
$$- \alpha^2\Omega \times \alpha g \wedge K\gamma g . [\Omega \times \alpha\Omega . g^2 - g \times \alpha\Omega . g \times \Omega] = 0 .$$

Il primo membro della (5) può scriversi, per formole note,

$$\alpha\Omega \times (\alpha g \wedge K\gamma g) . [(g \wedge \alpha\Omega) \wedge g] \times \alpha\Omega -$$
$$- \alpha^2\Omega \times (\alpha g \wedge K\gamma g) . [(g \wedge \alpha\Omega) \wedge g] \times \Omega ;$$

e quindi, ponendo

$$\alpha g \wedge K\gamma g = \mathbf{u} \quad , \quad (g \wedge \alpha\Omega) \wedge g = \mathbf{v} ,$$

si ha successivamente

$$(5')\qquad \alpha\Omega \times \mathbf{u} . \mathbf{v} \times \alpha\Omega - \alpha^2\Omega \times \mathbf{u} . \mathbf{v} \times \Omega =$$
$$= \Omega \times \alpha\mathbf{u} . \mathbf{v} \times \alpha\Omega - \alpha\Omega \times \alpha\mathbf{u} . \mathbf{v} \times \Omega = (\alpha\Omega \wedge \Omega) \times (\mathbf{v} \wedge \alpha\mathbf{u}) .$$

Ora, si osserva che il vettore $(\mathbf{v} \wedge \alpha\mathbf{u})$ risulta parallelo al vettore $\mathbf{g}$; infatti si ha identicamente

$$(\mathbf{v} \wedge \alpha\mathbf{u}) \wedge \mathbf{g} = \mathbf{v} \times \mathbf{g} . \alpha\mathbf{u} - \alpha\mathbf{u} \times \mathbf{g} . \mathbf{v} =$$
$$= [(\mathbf{g} \wedge \alpha\Omega) \wedge \mathbf{g}] \times \mathbf{g} . \alpha\mathbf{u} - (\alpha\mathbf{g} \wedge \mathrm{K}\gamma\mathbf{g}) \times \alpha\mathbf{g} . \mathbf{v} = 0 .$$

Dopo ciò, indicando con m un numero reale, la (5') può scriversi

$$(5'')\qquad m . \alpha\Omega \wedge \Omega \times \mathbf{g} = 0$$

per la 4ª delle (A); dunque la (5) è identicamente soddisfatta, e quindi la (1') e la (4) sono tra loro identiche, c. d. d.

Dopo ciò, è chiaro che la (VI_b) del sistema di Schiff, dalla quale si è ricavata la (1'), non è più indipendente dalle altre equazioni del sistema perchè è conseguenza della (VI_a) che coincide con la 4ª delle (A), e quindi si conclude che « *perchè, nel caso in cui è costante l'invariante S, possa* « *sussistere l'equivalenza fra le equazioni di Euler-Poisson e quelle di* « *Schiff, è necessario trovare una nuova equazione, indipendente dalle* « *altre, che sostituisca la* (VI_b) ».

Per la ricerca di questa nuova equazione si osserva che dalle (V) e (VI) si possono dedurre come conseguenza [v. loc. cit. (¹)] le equazioni

$$(6)\qquad \mathbf{g} \times \mathbf{a} = 0 \quad ; \quad \alpha\Omega \times \mathbf{a} = 0$$

dove il vettore $\mathbf{a}$ è definito dalla relazione

$$(7)\qquad \mathbf{a} = \alpha\Omega' + \Omega \wedge \alpha\Omega + \mathbf{g} \wedge \mathbf{k}_1 .$$

Associando alle (6) l'equazione

$$(8)\qquad \mathbf{k} \times \mathbf{a} = 0 ,$$

si ha un sistema che conduce alla relazione

$$(9)\qquad \mathbf{g} \times \alpha\Omega \wedge \mathbf{k}_1 . \mathbf{a} = 0$$

e, poichè il primo fattore della (9) equivale ad U', che è per ipotesi diverso da zero, si conclude che deve essere necessariamente $\mathbf{a} = 0$, deve cioè sussistere necessariamente l'equazione (I) di Euler. Osservando inoltre che, quando U è funzione del tempo, sussiste l'equivalenza fra le equazioni di Schiff e quelle di Poisson [v. loc. cit. (¹)], si conclude che « *nel caso* « *S = costante basta aggiungere al sistema di Schiff l'equazione* (8) *perchè* « *sussista l'equivalenza fra questo e il sistema di Euler-Poisson* ».

Conviene cercare l'espressione della (8) in funzione di S, T, U. Sostituendo ai vettori **k** e **a** le loro espressioni (V) e (7) e supponendo che sia $\alpha\Omega \wedge \mathrm{g} \neq 0$, si può scrivere, poichè è $\mathrm{U}' \neq 0$,

$$[(h-\mathrm{T})(2\mathrm{Ug}-\mathrm{S}_0 . \alpha\Omega)+k(\mathrm{g}^2 . \alpha\Omega-\mathrm{S}_0\mathrm{g})+\mathrm{U}' . \mathrm{g} \wedge \alpha\Omega] \times$$
$$\times [\alpha\Omega' + \Omega \wedge \alpha\Omega] = 0 ,$$

e da qui, sviluppando, tenendo conto delle (III) e delle (IV) e osservando che è

$$\mathrm{g} \times \alpha\Omega' = \mathrm{g} \times \Omega \wedge \alpha\Omega = \mathrm{S}' = 0 ,$$

si ottiene l'equazione cercata

$$(10)\quad [k\mathrm{g}^2 - (h - \mathrm{T})\,\mathrm{S}_0 + \mathrm{g} \wedge \alpha\Omega \times \alpha\Omega' + 2\mathrm{U} . \mathrm{g} \times \Omega - 2\mathrm{TS}_0]\,\mathrm{U}' = 0$$

che può anche scriversi, poichè è $\mathrm{U}' \neq 0$, sotto la forma

$$(11)\qquad k\mathrm{g}^2 - (h + \mathrm{T})\,\mathrm{S}_0 + 2\mathrm{U} . \mathrm{g} \times \Omega + \mathrm{g} \times \alpha\Omega \wedge \alpha\Omega' = 0 .$$

tematica. — *Nuove regole per la riduzione degli integrali multipli generalizzati di Riemann.* Nota I di MAURO PICONE, presentata dal Socio L. BIANCHI [1].

Nella teoria degli integrali di Lebesgue, il Fubini [2] ha ottenuto un risultato che enunciamo al modo seguente:

Sia E *un insieme di punti limitato e misurabile, in uno spazio* S_n *ad un numero qualunque* n *di dimensioni; siano* a e b *i limiti inferiore e superiore della coordinata* x *dei punti di* E; *designamo con* $\mathrm{G}(\xi)$ *l'insieme sezione di* E *con l'iperpiano* $x = \xi$, ξ *essendo un valore dell'intervallo* (a, b); *sia infine* $f(x, y, z, \ldots)$ *una funzione definita in* E *ed ivi sommabile. Si ha che:*

1° *escluso al più un insieme* X' *di valori di* x *in* (a, b) *di misura* (*lineare*) *nulla, l'insieme* $\mathrm{G}(x)$ *è misurabile in un* S_{n-1} [3];

2° *escluso al più un insieme* $\mathrm{X}, \mathrm{X} \geq \mathrm{X}'$, *di valori di* x *in* (a, b) *di misura* (*lineare*) *nulla, la funzione* $f(x, y, z, \ldots)$ *è sommabile in* $\mathrm{G}(x)$;

[1] Pervenuta all'Accademia il 25 settembre 1919.

[2] Fubini, *Sugli integrali multipli* (questi Rendiconti, 1° semestre 1907).

[3] Non so se è stato mai osservato che: *Se l'insieme* E *è misurabile in* S_n *al modo di Borel, l'insieme* $\mathrm{G}(x)$ *è sempre, senza eccezione, misurabile in* S_{n-1} *pur esso al modo di Borel e di classe non superiore a quella di* E.

3° *designamo con*

$$(1) \qquad \int_{G(x)} f(x\,,y\,,z\,,...)\,dy\,dz\,...\,,$$

una funzione delle x *che ha il valore dell'integrale di Lebesgue della funzione* f, *esteso a* $G(x)$, *per ogni valore di* x *in* $(a\,,b)$ *fuori dell'insieme* X, *e che è arbitrariamente definita in* X; *la funzione* (1) *è sommabile in* $(a\,,b)$, *e si ha*

$$(2) \qquad \int_{E} f(x\,,y\,,z\,,...)\,dx\,dy\,dz\,... = \int_a^b dx \int_{G(x)} f(x\,,y\,,z\,,...)\,dy\,dz\,...\ (^1).$$

Secondo questo teorema di Fubini si può dunque sempre ricondurre il calcolo dell'integrale di una qualunque funzione sommabile, esteso ad un insieme di S_n, al calcolo di un integrale esteso ad un insieme di un S_{n-1} variabile, seguìto da quello di un integrale semplice (esteso ad un intervallo) e quindi anche al successivo calcolo di n integrali semplici; fornisce sempre, cioè, come si dice, *la riduzione degli integrali multipli.*

Per le applicazioni alle ordinarie questioni di Analisi (ad esempio, nella teoria delle equazioni alle derivate parziali, delle equazioni integrali, ecc.) mi è parso sempre utilissimo stabilire sotto quali condizioni il teorema di Fubini rimane valido nel campo delle funzioni non limitate che ammettono un integrale generalizzato di Riemann, *imponendo, nella riduzione, di non eseguire che integrali di Riemann* [2].

In questa e in successive Note esamino appunto la questione ora enunciata, giungendo a regole nuove per la riduzione degli integrali multipli generalizzati di Riemann, regole che si manifestano soprattutto (cfr. gli esempî al n. 6) assai utili per le applicazioni indicate.

Non così mi pare si possa dire delle regole già note che si trovano nei trattati, le quali sono raramente applicabili e talune riescono quasi sempre di laboriosa applicazione. Ai criterî ottenuti qui sono vicini quelli dati dal De la Vallée-Poussin (nel suo *Cours d'Analyse*) nel caso particolare di una funzione f non negativa, generalmente continua con punti isolati di discontinuità.

Avendo in vista le applicazioni, mi sono limitato a stabilire quei criterî considerando le condizioni di cose che si presentano, d'ordinario, nei problemi dell'Analisi. Ma non è difficile stabilire gli stessi criterî in ipotesi molto più larghe, abbandonando, per esempio, quella della misurabilità secondo Jordan degli insiemi ai quali si estendono gli integrali.

(1) Questo risultato è dimostrato nel modo più semplice ai n.i 43 e 44 del recente brillante libro del De la Vallée-Poussin, *Integrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire* [Paris, Gauthier-Villars, 1916, collection Borel].

(2) Uso locuzioni e notazioni del *Cours d'Analyse infinitésimale* del De la Vallée-Poussin

1. Chiamiamo qui *dominio* ogni insieme di punti E, ad un numero qualunque di dimensioni, limitato, chiuso, dotato di punti interni e misurabile (J) [1]; *porzione* di un dominio E ogni dominio contenuto in E. Sia P un punto del dominio E: diremo che questo punto è *singolare per l'integrabilità* (R) [al senso di Riemann] di una funzione f, se, comunque si assegni un numero positivo ε, si può sempre trovare una porzione di E, contenente P, di diametro minore di ε, sulla quale la funzione non è integrabile (R).

La funzione f possegga nel dominio E un'infinità di punti singolari per la sua integrabilità (R). Questi punti costituiscono un insieme F che si dimostra essere chiuso e che supporremo pur esso misurabile (J). Se la funzione f riesce definita (limitata e) integrabile (R) in ogni dominio A contenuto in $G = E - F$, dirò che *l'insieme* F *è in* E *l'insieme dei punti singolari per l'integrabilità* (R) *della funzione* f.

Può darsi che

$$\int_A f(P)\, dP$$

tenda ad un limite determinato e finito allorchè la misura di A tende alla misura di $G = E - F$. Se ciò avviene, diremo, con Jordan [2], che *la funzione f possiede un integrale generalizzato* (R) *esteso al dominio* E, ed anche che *la funzione f è in* E *integrabile* (R) *in modo generalizzato*. Porremo dunque per definizione

$$(R)\int_E f(P)\cdot dP = \lim_{mA = mG} \int_A f(P)\, dP,$$

se questo limite è determinato e finito.

Nel Jordan (loc. cit.) è dimostrato che:

1°. Condizione necessaria e sufficiente affinchè la funzione f possegga un integrale generalizzato (R) esteso al dominio E, è che, ove il dominio A varii in G, sia

$$\lim_{mA=0} \int_A f(P)\, dP = 0 .$$

2°. Condizione necessaria e sufficiente affinchè la funzione [illegible]ossegga un integrale generalizzato (R) esteso al dominio E, è che un [illegible]ntegrale

[1] Misurabile secondo Jordan. Quando diremo che un insieme è *misurabile*, senza altro, intenderemo che è misurabile secondo Lebesgue. Così pure la *misura* (J) di un insieme sarà la sua misura secondo Jordan; la *misura* sarà la sua misura secondo Lebesgue.

[2] Jordan, *Cours d'Analyse* (2me édition), t. II, pag. 75 e segg.

sia posseduto dalla funzione $|f|$; e si ha allora:

$$\left|(\mathrm{R}) \int_{\mathrm{E}} f(\mathrm{P})\, d\mathrm{P}\right| \leqq (\mathrm{R}) \int_{\mathrm{E}} |f(\mathrm{P})|\, d\mathrm{P} \text{ (1)}.$$

2. Dimostriamo il

Teorema I. — *Se la funzione f possiede un integrale generalizzato* (R) *esteso al dominio* E, *essa è sommabile in* G, *e risulta*

$$(\mathrm{R}) \int_{\mathrm{E}} f(\mathrm{P})\, d\mathrm{P} = (\mathrm{L}) \int_{\mathrm{G}} f(\mathrm{P})\, d\mathrm{P}.$$

Designamo con H quella parte della frontiera di G che appartiene a G. Essendo G misurabile (J), esisterà una successione di dominii

(3) $$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n, \dots$$

contenenti, ciascuno, il precedente e tutti contenuti in G, avente per limite G — H. Gli insiemi

$$\mathrm{H} + \mathcal{A}_1 . \mathrm{H} + \mathcal{A}_2, \dots, \mathrm{H} + \mathcal{A}_n, \dots$$

avranno dunque per limite G. Poniamo:

$$\mathrm{G}_{\mathrm{A}} = \mathrm{G}(f(\mathrm{P}) > \mathrm{A}) \;,\; \mathrm{G}_{\mathrm{A}}^{(n)} = [\mathrm{H} + \mathcal{A}_n]\,(f(\mathrm{P}) > \mathrm{A}) \text{ (2)};$$

dico che G_{A} è misurabile. Si ha invero:

$$\mathrm{G}_{\mathrm{A}} = \lim_{n=\infty} \mathrm{G}_{\mathrm{A}}^{(n)},$$

mentre, essendo H di misura nulla e $f(\mathrm{P})$ integrabile (R) in $\mathcal{A}_n$, l'insieme $\mathrm{G}_{\mathrm{A}}^{(n)}$isurabile.

Ne segue, intanto, che $f(\mathrm{P})$ è misurabile in G. Anche $|f|$ possiede un integrale generalizzato (R) esteso al dominio E; e se dimostriamo la sommabilità di $|f|$ in G, ne seguirà quella di f. Prendiamo la successione (3) per modo che risulti

$$m\mathrm{G} - m\mathcal{A}_n < \frac{1}{n^2},$$

e designamo con $|f|_n$ la funzione $|f|$ limitata al numero positivo n [3].

(1) Una rigorosa trattazione elementare dell'argomento, nella quale sono ottenuti risultati assai utilmente avvicinabili a quelli del Jordan, trovasi nel libro del Bagnera: *Corso d'Analisi infinitesimale* (Palermo, 1915), n.i 105, 106, 117, 118, 119, 120, 121, 130, 132, 133, 134.

(2) Con la notazione $\mathrm{E}(f(\mathrm{P}) > \mathrm{A})$ indico quella parte di E in cui è $f(\mathrm{P}) > \mathrm{A}$.

(3) Poniamo cioè $|f|_n = |f|$ quando è $|f| \leq n$, $|f|_n = n$, quando è $|f| > n$.

Si ha:

$$(4) \qquad (\mathrm{L})\int_{\mathrm{G}} |f|_n \, d\mathrm{P} =$$

$$= (\mathrm{L})\int_{\varDelta_n} |f|_n \, d\mathrm{P} + (\mathrm{L})\int_{\mathrm{G}-\varDelta_n} |f|_n \, d\mathrm{P} \leq (\mathrm{R})\int_{\varDelta_n} |f| \, d\mathrm{P} + \frac{1}{n};$$

ne segue che l'integrale

$$(\mathrm{L})\int_{\mathrm{G}} |f|_n \, d\mathrm{P}$$

è, rispetto ad n, limitato, e quindi la sommabilità di $|f|$ e di f.

Dalle (4) si deduce poi, passando al limite per n infinito,

$$(5) \qquad (\mathrm{L})\int_{\mathrm{G}} |f| \, d\mathrm{P} \leq (\mathrm{R})\int_{\mathrm{E}} |f| \, d\mathrm{P}.$$

D'altra parte, se consideriamo un qualunque dominio $\varDelta$ contenuto in G, si ha:

$$(\mathrm{L})\int_{\mathrm{G}} |f| \, d\mathrm{P} =$$

$$= \lim_{n=\infty} \left\{ (\mathrm{L})\int_{\mathrm{G}} |f|_n \, d\mathrm{P} \right\} \geq \lim_{n=\infty} \left\{ (\mathrm{L})\int_{\varDelta} |f|_n \, d\mathrm{P} \right\} = (\mathrm{R})\int_{\varDelta} |f| \, d\mathrm{P},$$

poichè, da un certo momento in poi, si avrà, in $\varDelta$, $|f|_n = |f|$. Facendo ora tendere la misura di $\varDelta$ a quella di G, si potrà asserire che

$$(\mathrm{L})\int_{\mathrm{G}} |f| \, d\mathrm{P} \geq (\mathrm{R})\int_{\mathrm{E}} |f| \, d\mathrm{P},$$

relazione questa che, con la (5), dimostra completamente il nostro teorema per la funzione non negativa $|f|$. Ma il teorema risulta subito dimostrato anche per una funzione f, di segno comunque variabile, pensando che, posto

$$2f_1 = |f| + f \quad , \quad 2f_2 = |f| - f,$$

si ha

$$f_1 \geq 0 \ , \ f_2 \geq 0 \ , \ f = f_1 - f_2 \ , \ |f| = f_1 + f_2$$

e che dall'integrabilità (R) in modo generalizzato di $|f|$ in E, ne segue quella di f_1 e di f_2.

Meccanica. — *Deformazioni simmetriche del suolo elastico.* Nota II di ROCCO SERINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Nella Nota I ([1]) ho determinato un tipo di soluzione generale del problema del suolo nel caso della simmetria.

Tale soluzione contiene due funzioni armoniche arbitrarie, costruite a loro volta mediante due funzioni $\lambda(r)$, $\chi(r)$ del raggio vettore r del piano.

La risoluzione di un dato problema del suolo consiste nel determinare queste ultime funzioni che soddisfano nei varî casi a quattro equazioni integrali: combinando tali equazioni a coppie, otteniamo i quattro tipi di problemi classici.

Le dette equazioni integrali, aventi per nucleo una funzione cilindrica di Bessel, sono state risolte dall'Hankel.

Dal seguito apparirà evidente la semplificazione, rispetto alle trattazioni di Boussinesq e di Cerruti ([2]), dalle quali si potrebbe dedurre la specificazione relativa al caso simmetrico.

La nuova trattazione ha essenzialmente il vantaggio di applicare direttamente le funzioni potenziali simmetriche studiate dal Beltrami ([3]) e di ridurre ad un tipo unico la risoluzione dei problemi.

3. LE EQUAZIONI INTEGRALI DELL'HANKEL. DEFORMAZIONE PER DATI SPOSTAMENTI AL CONTORNO. — L'Hankel dimostra un teorema da cui discende immediatamente il seguente:

Se $f(x)$ è una funzione che soddisfa nell'intervallo $0, \infty$ alle condizioni di Dirichlet e se $I_n(x)$ rappresenta la funzione cilindrica di Bessel, di prima specie e d'ordine n, si ha

$$(15) \qquad \int_0^\infty y\, I_n(y\xi)\, dy \int_0^\infty x f(x)\, I_n(yx)\, dx = f(\xi)\,,$$

se $\xi > 0$. Se $\xi = 0$, l'integrale vale $f(0)$ per $n = 0$, e zero per $n > 0$. Quindi l'equazione integrale

$$(16) \qquad \int_0^\infty x \varphi(x)\, I_n(yx)\, dx = f(y)$$

([1]) Vedi questi Rendiconti, ottobre 1919.

([2]) Vedi per es. V. Cerruti, *Ricerche sull'equilibrio dei corpi elastici isotropi*, Mem. Acc. Lincei, *13*, 1882; I. Boussinesq, *Equilibre d'élasticité d'un sol isotrope sans pesanteur*, C. R. Acad. sciences, Paris, *86*, 1878.

([3]) Vedi E. Beltrami, loc. cit., § 2.

è soddisfatta da

$$\varphi(x) = \int_0^\infty y f(y)\, I_n(y\xi)\, d\xi\,, \tag{17}$$

coll'avvertenza che, se $n > 0$, debba essere $f(0) = 0$ [1].

Il risultato precedente ci permette di ottenere la risoluzione del problema del suolo dalle formole (I) (II) stabilite nella Nota I.

Infatti, siano dati in primo luogo i valori di u, v, w per $z = 0$; essi saranno funzioni della sola r. Dalla terza delle (I) si ottiene per la (7) (moltiplicando e dividendo per s sotto il segno di integrale)

$$w(0, r) = W(0, r) = \int_0^\infty I_0(rs)\, s \frac{\lambda(s)}{s}\, ds\,, \tag{18}$$

da cui si ha, giusta le (16) e (17),

$$\frac{\lambda(r)}{r} = \int_0^\infty I_0(rt)\, w(0, t) . t\, dt\,. \tag{18'}$$

Il dare u, v equivale, nel caso nostro della simmetria, a dare lo spostamento $\sigma(r)$ lungo il raggio vettore r nel piano. Si osservi inoltre che deve essere, per la condizione di simmetria,

$$\sigma(0) = 0\,. \tag{19}$$

Ma, dalle (I) (II),

$$\sigma(r) = -\alpha\,\theta_1(0, r) + W_1(0, r)\,;$$

quindi, per le (6') (7'),

$$-\int_0^\infty I_0'(rs) \left[\alpha \frac{\chi(s)}{s} + \lambda(s)\right] ds = \sigma(r)\,.$$

Ma, come è ben noto [2],

$$I_0'(x) = -I_1(x)\,; \tag{20}$$

cosicchè χ e λ dovranno soddisfare alla equazione

$$\int_0^\infty I_1(rs)\, s \left[\alpha \frac{\chi(s)}{s^2} + \frac{\lambda(s)}{s}\right] ds = \sigma(r)\,.$$

Ricordando la (19), si ottiene di qui

$$\alpha \frac{\chi(r)}{r^2} + \frac{\lambda(r)}{r} = \int_0^\infty I_1(st)\, \sigma(t)\, t\, dt\,, \tag{21'}$$

[1] Vedi H. Hankel, *Die Fourier'schen Reihen und Integrale der Cilinderfunctionen*, Mathematische Annalen, VIII (1875), pp. 481-482.

[2] Vedi per es. C. Neumann, *Bessel'schen Functionen*, Leipzig, 1867, pag. 10.

la quale, essendo già noto $\frac{\lambda(r)}{r}$ per la (18'), mi determina χ: il problema è così risolto.

4. Deformazione per date tensioni al contorno. Casi misti. — Se n indica la normale interna al suolo e si suppone la densità $\varrho = 1$, le equazioni ai limiti, siccome $\frac{dx}{dn} = \frac{dy}{dn} = 0$, $\frac{dz}{dn} = 1$, diventano [1]

$$(22) \qquad \begin{gathered} L + \omega^2 \left(\frac{du}{dz}\right)_{z=0} + \omega^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{z=0} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ N + 2\omega^2 \left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=0} + (\Omega^2 - 2\omega^2)\,\theta_{z=0} = 0. \end{gathered}$$

Delle due prime equazioni (22) basterà poi tener conto di una, p. es. la prima. Ma, per le (I) (II),

$$\left(\frac{du}{dz}\right)_{z=0} = x\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{z=0} = -\frac{x}{r}\left[(\alpha+\beta)\frac{\partial \theta_1}{\partial z} - \frac{\partial W_1}{\partial z}\right]_{z=0}$$
$$= -\frac{x}{r}\int_0^\infty I_1(rs)\left[\frac{\Omega^2}{\omega^2}\chi(s) - s\,\lambda(s)\right]ds.$$

Basta infatti ricordare le espressioni (6') (7') di θ_1, W_1, la (20), e inoltre che, per le (12),

$$\alpha + \beta = \frac{\Omega^2}{\omega^2}.$$

Per di più

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{z=0} = \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{z=0} = -\frac{x}{r}\int_0^\infty I_1(rs)\,s\,\lambda(s)\,ds\,;$$

quindi la prima delle (22) diventa, quando si osservi che

$$L = \frac{x}{r}\,p(r) \quad , \quad M = \frac{y}{r}\,p(r),$$

e si tenga conto dei risultati precedenti, e dividendo per $\frac{x}{r}$,

$$(23) \qquad \int_0^\infty I_1(rs)\,\Omega^2 s\,\frac{\chi(s)}{s}\,ds = p(r).$$

Di qui si ha, osservando che, per le condizioni di simmetria,

$$(24) \qquad p(0) = 0,$$

$$(23') \qquad \frac{\chi(r)}{r} = \frac{1}{\Omega^2}\int_0^\infty I_1(rt)\,p(t)\,.\,t\,dt.$$

[1] Vedi Marcolongo, loc. cit., pag. 206. Le prime due scritte appartengono al secondo tipo di equazio[ni] [il]liti, la terza al primo tipo [formole (2) (2')].

Vogliamo ora tener conto della terza delle (22). Ora abbiamo, dalla terza delle (I),

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=0}=\left(-\beta\theta+\frac{\partial W}{\partial z}\right)_{z=0}=-\int_0^\infty I_0(rs)\,[\beta\chi(s)+s\,\lambda(s)]\,ds\,,$$

e, dalla (6),

$$\theta_{z=0}=\int_0^\infty I_0(rs)\,\chi(s)\,ds\,;$$

la terza delle (22) dà, ricordando che per la (12)

$$2\omega^2\beta=\Omega^2-\omega^2\,,$$

e che

$$N=N(r)\,,$$

$$\int_0^\infty I_0(rs)\left[2\omega^2\,\lambda(s)+\omega^2\,\frac{\chi(s)}{s}\right]s\,ds=N(r)\,, \tag{24}$$

da cui

$$2\lambda(r)+\frac{\chi(r)}{r}=\frac{1}{\omega^2}\int_0^\infty I_0(rt)\,N(t)\,.\,t\,dt\,. \tag{24'}$$

Ma conoscendosi di già $\chi(r)$ per la (23'), si ricaverà di qui $\lambda(r)$ ed il problema è risolto.

I casi misti sono ora completamente risolti. Se infatti supponiamo dati, in superficie, L, M, w, allora le (23') (18') mi dànno rispettivamente $\chi(r)$, $\lambda(r)$: che se suppongo invece dati u, v, N, allora le (21') (24') formano un sistema nelle due incognite $\chi(r)$, $\lambda(r)$ avente per determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-\frac{\Omega^2}{\omega^2}\,,$$

che è diverso da zero, e quindi sono risolubili rispetto a λ e χ.

Meccanica. — *Sopra i moti di precessione regolare del giroscopio simmetrico pesante.* Nota di LUCIO SILLA, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Come è noto, per *giroscopio simmetrico* si intende un corpo rigido fissato per un suo punto O, il quale abbia eguali due dei tre momenti principali di inerzia relativi a quel punto, ad esempio A e B, ed abbia, inoltre, il baricentro G situato sull'*asse di figura* $O\zeta$, cui spetta il terzo momento d'inerzia C.

Se il giroscopio simmetrico è *pesante*, si dimostra che, nel movimento del corpo, l'asse $O\zeta$ si sposta restando sempre compreso entro lo spazio limitato da due falde coniche di rotazione attorno alla verticale Oz, col ver-

tice comune in O, e le cui ampiezze θ_1 e θ_2 rappresentano i valori estremi fra i quali oscilla l'*angolo* θ *di nutazione*, cioè l'angolo $\zeta O z$.

Allorchè, per determinate condizioni iniziali, risulta $\theta_1 = \theta_2$, il moto del giroscopio è detto di *precessione regolare*: si osserva allora che l'asse di figura del corpo ruota con velocità angolare costante attorno alla verticale (*asse di precessione*) e descrive un cono rotondo, mentre il giroscopio ruota con velocità angolare costante attorno al proprio asse.

Nel moto di precessione regolare, adunque, l'angolo θ resta costante e θ' è perciò nulla; quindi *è nulla la nutazione dell'asse del corpo.* Il vettore ω (la così detta *rotazione*) è in tal caso risultante di due vettori: l'uno, ψ', diretto secondo Oz, che rappresenta la *velocità di precessione* dell'asse del giroscopio; l'altro, φ', diretto secondo $O\zeta$, che rappresenta la *velocità propria di rotazione* del giroscopio attorno al proprio asse. Tanto ψ' quanto φ' sono costanti; inoltre il parallelogrammo, di cui ψ' e φ' sono due lati adiacenti ed ω ne è la diagonale uscente da O, resta eguale a sè stesso durante tutto il movimento. Quanto ai due coni coniugati caratteristici della rotazione dei sistemi rigidi, essi sono entrambi rotondi, l'uno attorno alla verticale Oz, l'altro attorno all'asse $O\zeta$ del corpo, e il moto del giroscopio si può ottenere facendo rotolare, con moto uniforme, il secondo cono sul primo.

Lo studio delle precessioni regolari e di quelle pseudo-regolari del giroscopio simmetrico pesante è stato fatto magistralmente dal Klein ([1]), insieme con la discussione dei varî casi di stabilità del movimento.

In questa Nota io mi propongo di mostrare, con un procedimento assai rapido e semplice, come sia possibile di ottenere la condizione cui debbono soddisfare le costanti arbitrarie, affinchè il moto del giroscopio simmetrico pesante si riduca ad una precessione regolare, facendo uso di ovvie formole vettoriali e partendo direttamente dalla legge dinamica del momento risultante delle quantità di moto.

Assumiamo due terne di assi ortogonali, entrambe con l'origine nel punto O: l'una fissa e con l'asse z diretto secondo la verticale discendente, l'altra mobile, collegata col corpo e coincidente con gli assi principali di inerzia relativi al punto O, dei quali $O\zeta$ rappresenta, come si è detto, l'asse del giroscopio rivolto positivamente verso il baricentro G.

Sia **R** un vettore variabile; indichiamo con $\frac{d\mathbf{R}}{dt}$ il vettore derivato di **R** rispetto agli assi fissi e con $\dot{\mathbf{R}}$ quello rispetto agli assi mobili. Si ha, dalla teoria dei vettori,

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \dot{\mathbf{R}} + \omega \wedge \mathbf{R}\,. \tag{1}$$

([1]) F. Klein und A. Sommerfeld, *Ueber die Theorie des Kreisels.*

dove ω rappresenta, come si è dichiarato innanzi, il vettore *rotazione* della terna di assi collegati col corpo.

La legge del momento risultante delle quantità di moto si traduce, poi, nell'equazione vettoriale

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \Gamma, \tag{2}$$

in cui $\mathbf{K}$ e Γ rappresentano, rispettivamente, il momento dell'impulso e il momento delle forze applicate rispetto al punto O.

Denotiamo con $\mathbf{k}$ il vettore unitario secondo Oz (verticale discendente) e con χ il vettore unitario secondo $O\zeta$ (vettore costante rispetto agli assi collegati col corpo). Applicando la (1) al vettore $\mathbf{k}$, abbiamo l'equazione

$$0 = \dot{\mathbf{k}} + \omega \wedge \mathbf{k}, \tag{3}$$

che riassume le ben note *formole del Poisson.*

Dalla (2), inoltre, si ottiene, a causa della (1),

$$\dot{\mathbf{K}} + \omega \wedge \mathbf{K} = \Gamma. \tag{4}$$

Le formole (3) e (4) sono fondamentali per la deduzione del risultato che abbiamo in vista.

Ricordiamo che, per sua definizione, $\mathbf{K}$ è un vettore che ha per proiezioni Ap, Bq e Cr sugli assi mobili, quando p, q, r indichino le proiezioni, sugli stessi assi, del vettore ω. Noi possiamo anche rappresentare con

$$Ap + o\ ,\ Aq + o\ ,\ Ar + (C - A)\,r$$

quelle proiezioni di $\mathbf{K}$, atteso che $A = B$, per l'ipotesi fatta in principio; quindi sarà

$$\mathbf{K} = A\omega + (C - A)\,r\chi. \tag{5}$$

Quanto al peso P del corpo, esso è rappresentato vettorialmente da $P\mathbf{k}$; il suo momento Γ, rispetto ad O, detta ζ_0 la distanza OG del baricentro dal punto fisso, è dunque così espresso:

$$\Gamma = \zeta_0 \chi \wedge P\mathbf{k} = P\zeta_0\, \chi \wedge \mathbf{k};$$

od anche

$$\Gamma = P\zeta_0\, \mathbf{h}, \tag{6}$$

avendo posto

$$\mathbf{h} = \chi \wedge \mathbf{k}. \tag{7}$$

Teniamo presente che le grandezze vettoriali incognite del problema sono ω e $\mathbf{k}$, le quali ci dànno la velocità angolare di rotazione del corpo e l'ubicazione della verticale rispetto al corpo; ossia le quantità scalari p, q, r di cui è noto il significato, e i coseni γ_1, γ_2 e γ_3 degli angoli che

Oz forma con la terna mobile. Per determinare quelle incognite noi disponiamo delle equazioni (2) e (3).

È appena necessario di rilevare che $\mathbf{K}$ è riducibile, sostanzialmente, alla incognita principale ω, mediante la (5); inoltre il momento $\boldsymbol{\Gamma}$ è riducibile a $\mathbf{k}$, a causa delle (6) e (7).

Notiamo, altresì, che dalla (4), proiettando i vettori che figurano in quell'equazione sull'asse $O\zeta$, si ricava

$$\frac{dr}{dt} = 0\,,\ \text{e quindi}\ r = \text{costante.}$$

Affinchè il giroscopio abbia un moto di rotazione uniforme attorno alla verticale Oz, occorrerà che sia

$$\boldsymbol{\omega} = \pm\,\omega\mathbf{k}\,. \tag{8}$$

In questo caso il vettore $\mathbf{k}$ è immobile rispetto al corpo; quindi, rispetto alla terna di assi collegati col corpo, sarà $\mathbf{k}$ costante e, del pari, sarà costante il vettore $\mathbf{K}$, talchè dovrà aversi $\dot{\mathbf{K}} = 0$.

La condizione necessaria e sufficiente, adunque, affinchè si verifichi il moto anzidetto, è, per la (4),

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{K} = \boldsymbol{\Gamma}.$$

Questa condizione si può utilmente trasformare. Per la (6) noi possiamo, infatti, scrivere

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{K} = \mathrm{P}\,\zeta_0\,\mathbf{k}\,;$$

e quindi ancora, formando il prodotto $\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{K}$, mediante la (5),

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{K} = (\mathrm{C} - \mathrm{A})\, r\boldsymbol{\omega} \wedge \chi = \mathrm{P}\zeta_0\mathbf{h}\,. \tag{9}$$

Ma, dalla (8), si ottiene

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \chi = \pm\,\omega\,\mathbf{k} \wedge \chi\,;$$

dunque sarà pure, per la (7),

$$(\mathrm{C} - \mathrm{A})\, r\,(\pm\,\omega\mathbf{k} \wedge \chi) = \pm\,(\mathrm{C} - \mathrm{A})\, r\omega\,\mathbf{h} = \mathrm{P}\zeta_0\,\mathbf{h}\,;$$

o, infine,

$$\{\pm\,(\mathrm{C} - \mathrm{A})\, r\omega - \mathrm{P}\zeta_0\}\,\mathbf{h} = 0\,,$$

che equivale all'unica condizione scalare

$$\pm\,(\mathrm{C} - \mathrm{A}) r\omega - \mathrm{P}\zeta_0 = 0\,.$$

Passiamo ora alla ricerca delle *precessioni regolari*, nel supposto che sia asse di precessione la verticale Oz.

Detti, come in principio, φ' e ψ' rispettivamente i vettori componenti di ω secondo $\mathbf{k}$ (vettore unitario sulla verticale discendente) e secondo χ (vettore unitario secondo l'asse del giroscopio, diretto verso il baricentro), si ha, come *condizione caratteristica della precessione regolare*,

$$\omega = \psi' \mathrm{k} + \varphi' \chi . \tag{10}$$

Di qua si trae, in particolare, proiettando sull'asse $O\zeta$,

$$r = \psi' \gamma_3 + \varphi' , \tag{11}$$

con ψ' e φ' *costanti.*

Si tratta ora di vedere in qual modo si possa, con la condizione (10), rendere soddisfatte le equazioni (3) e (4).

Procuriamoci, innanzi tutto, nel modo più conveniente, e tenendo conto della (10), le espressioni di

$$\mathbf{K} \;,\; \dot{\mathbf{K}} \quad \text{e} \quad \omega \wedge \mathbf{K} .$$

Dalla (5), a causa di (10), abbiamo frattanto

$$\mathbf{K} = \mathrm{A}\varphi' \mathrm{k} + \{ (\mathrm{C} - \mathrm{A})\, r + \mathrm{A}\varphi' \} \chi .$$

Di qua, derivando rispetto agli assi mobili, risulta

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathrm{A}\psi' \dot{\mathrm{k}} .$$

E se si tiene conto successivamente delle (3), (10) e (7), potremo ancora scrivere

$$\dot{\mathbf{K}} = -\mathrm{A}\psi' \omega \wedge \mathrm{k} = -\mathrm{A}\psi'\varphi' \chi \wedge \mathrm{k} = -\mathrm{A}\psi'\varphi' \mathbf{h} .$$

Infine, da (9), (10) e (7),

$$\omega \wedge \mathbf{K} = (\mathrm{C} - \mathrm{A})\, r\psi' \mathrm{k} \wedge \chi = (\mathrm{A} - \mathrm{C})\, r\psi' \mathbf{h} .$$

Ora non resta che sostituire i valori di $\mathbf{K}$, $\dot{\mathbf{K}}$ ed $\omega \wedge \mathbf{K}$, così preparati, nella equazione fondamentale (4). Tenendo conto anche di (6), otteniamo

$$-\mathrm{A}\psi'\varphi' \mathbf{h} + (\mathrm{A} - \mathrm{C})\, r\psi' \mathbf{h} = \mathrm{P}\zeta_0 \mathbf{h} ;$$

ovvero

$$\{ \mathrm{A}\psi'\varphi' - (\mathrm{A} - \mathrm{C})\, r\psi' + \mathrm{P}\zeta_0 \} \mathbf{h} = 0 .$$

Così, per la (11), si perviene all'equazione definitiva

$$(\mathrm{C} - \mathrm{A})\, \psi'^2 \gamma_3 + \mathrm{C}\psi'\varphi' + \mathrm{P}\zeta_0 = 0 . \tag{12}$$

Questa relazione contiene soltanto elementi *scalari* che sono specifici per la questione meccanica di cui si tratta. Il problema generale della ro-

tazione di un sistema rigido con un punto fisso dipende notoriamente da *sei* parametri arbitrarî, cioè da θ_0, ψ_0 e φ_0, valori iniziali degli angoli di Eulero, e da θ'_0, ψ'_0 e φ'_0 che individuano la rotazione iniziale del sistema. In un moto regolare di precessione si deve avere $\theta'_0 = 0$; quindi, se si stabilisce il valore di $\cos\theta_0$ cui deve essere, per tutti i tempi, eguale γ_3, ossia $\cos(\zeta Oz)$, l'equazione (12) dà la condizione alla quale debbono soddisfare i quattro elementi iniziali residui, affinchè il moto del giroscopio segua le leggi cinematiche della precessione regolare.

Fisica. — *La relazione fra l'effetto Corbino e l'effetto Hall al variare del campo magnetico e della temperatura.* Nota di . C. Trabacchi, esentata dal Socio O. M. Corbino.

Già fin dal suo primo lavoro *Sulle azioni elettromagnetiche dovute agli ioni dei metalli deviati dalla traiettoria normale per effetto del campo*, il prof. Corbino aveva enunciato che tali azioni dipendono da un coefficiente E caratteristico del metallo, il quale è legato al coefficiente dell'effetto Hall, R, e alla conducibilità elettrica, c, per lo stesso metallo, dalla relazione

$$E = R \, . \, c \, . \tag{1}$$

Questa relazione fu da lui precisata in un lavoro successivo, ricorrendo alla teoria di Drude dei fenomeni galvanomagnetici, convenientemente modificata in qualche punto, e riferendosi al coefficiente dell'effetto Hall *isotermico*. Essa fu all'ingrosso verificata per varî metalli da Adams e Chapman nel loro lavoro sull'effetto Corbino [1].

Nella deduzione teorica della formula (1) erano stati trascurati rispetto all'unità alcuni termini che possono considerarsi effettivamente di lieve entità per tutti i metalli, ma che non sono più trascurabili nel caso del bismuto. Anzi, secondo ulteriori deduzioni teoriche [2], sembrerebbe che proprio con la presenza di tali termini possano spiegarsi le forti variazioni di E, di R e di c, constatate nel bismuto al variare del campo, e ciò indipendentemente da altre variazioni che arrecherebbero ai coefficienti medesimi i mutamenti delle costanti elettroniche in campi di diversa intensità; sembra cioè che la presenza di quei termini darebbe luogo a mutamenti di quei coefficienti, proporzionali al quadrato del campo, ciò che all'ingrosso si verifica con l'esperienza, mentre solo le deviazioni dalla legge di proporzionalità delle variazioni al quadrato del campo sarebbero dovute ai mutamenti delle costanti [3].

(1) Adams e Chapman, Phil. Mag., VI serie, vol. XXVIII, 1914.
(2) Freda, Rend. Lincei, vol. XXV, 1916; Corbino, Nuovo Cimento, vol. XVI, 1918.
(3) Trabacchi, Rend. Lincei, vol. XXVIII, ser. V, 1° semestre, fasc. 3.

Si può per altro dimostrare che la formula (1) resta rigorosamente valida, completando la teoria da entrambi i punti di vista: cioè non trascurando alcun termine, e ammettendo inoltre la variabilità delle costanti, oltre che con la temperatura, anche con la intesità del campo.

Occorre anzitutto definire esattamente le grandezze fisiche che corrispondono ai simboli *E*, *R*, *c*. L'effetto del campo sugli elettroni che trasportano la corrente consiste, nel caso più generale, in una rotazione delle linee equipotenziali rispetto alle linee di corrente, per un angolo costante in tutta la lamina [1]. Nei due casi estremi di elettrodi estesi all'intero contorno o di elettrodi puntiformi, si hanno, rispettivamente, l'effetto Corbino (rotazione delle sole linee di corrente e conseguenti azioni elettromagnetiche) e l'effetto Hall (rotazione delle sole linee equipotenziali e conseguenti azioni elettrometriche). Coi simboli ordinariamente adottati [2], l'effetto Corbino dipende dal coefficiente [3]

$$E = \frac{1}{H} \cdot \frac{m_1 s_1 - m_2 s_2}{s_1 + s_2};$$

mentre l'effetto Hall isotermico dipende dal coefficiente [4]:

$$R = \frac{1}{H} \frac{m_1 s_1 - m_2 s_2}{s^2 + (m_1 s_1 - m_2 s_2)^2}.$$

Se la conducibilità c, che dipende dalla distribuzione degli elettrodi, viene misurata sotto l'azione del campo con elettrodi adduttori puntiformi, si ha d'altra parte [5]

$$c = \frac{s^2 + (m_1 s_1 - m_2 s_2)^2}{s_1 + s_2}.$$

Si ha quindi, per ogni valore del campo (mutino o no le costanti elettroniche),

$$E = R \, . \, c \, ,$$

a condizione che le grandezze contenute nella formula siano misurate tutte e tre per gli stessi valori del campo e della temperatura.

Si riconosce da ciò l'importanza di una verifica quantitativa della formula; e poichè i valori di E, R, c non possono verificarsi con esattezza se non a meno di un coefficiente di proporzionalità dipendente dalla forma e dalle dimensioni della lamina, dalla disposizione degli elettrodi, e dalla

(1) Corbino, Nuovo Cimento, vol. I, giugno 1911.
(2) Corbino, Nuovo Cimento, vol. XVI, 1918, pag. 186.
(3) Freda, Rend. Lincei, vol. XXV, 1916, pag. 146.
(4) Corbino, Nuovo Cimento, vol. XVI, 1918, pag. 195.
(5) Corbino, Nuovo Cimento, vol. XVI, 1918.

sensibilità degli strumenti di misura, appare evidente l'opportunità di effettuare le misure su una determinata lamina, sottoponendola all'azione di camp diversi e in un ampio intervallo di temperatura, con che subiscono delle grandi variazioni le tre grandezze misurate. Rimanendo immutata la disposizione sperimentale, gli apparecchi di misura e la lamina, e cambiando solo il campo e la temperatura, la relazione suddetta può essere verificata, sostituendo alle grandezze E, R, c tre altre più direttamente derivanti dall'esperienza e ad esse proporzionali.

Siano queste

$$E' = k_1 . E$$
$$R' = k_2 . R$$
$$c' = k_3 . c ;$$

si dovrà avere

$$\frac{E'}{R' . c'} = \text{costante}$$

per tutte le temperature e per tutti i valori del campo.

Tale verifica forma l'oggetto della presente ricerca.

Le lamine di bismuto che mi hanno servito alle misure erano state ottenute dalla medesima fusione, ed erano destinate una alla determinazione di c e di R, ed una alla determinazione di E, mediante la misura dell'effetto Corbino.

Le misure di c ed R sono state fatte con una lamina analoga a quella descritta nella Nota relativa alla « determinazione delle costanti elettroniche del bismuto » [1], alle temperature di $+20°$ e di $-70°$, usando tutti gli accorgimenti descritti nella Nota sopra citata, allo scopo di evitare tutte le cause di errore che possono verificarsi in tali operazioni.

I valori trovati per R e c sono rappresentati nella fig. 2, nella quale le ascisse sono i valori del campo e le ordinate le varie grandezze considerate.

La lamina b di bismuto (fig. 1), che ha servito per la misura di E, era di forma circolare, del diametro di mm 70 e dello spessore di mm. 2. Alla sua periferia era saldato un anello di ottone, P, la cui sezione era di circa mm² 25; nella parte centrale era ugualmente saldato un secondo elettrodo di ottone, Q, dello spessore di mm. 4 e del diametro di mm. 15. Un disco R, anch'esso di ottone, dello spessore di mm. 2, tornito in piano come l'anello sopra descritto e dello stesso diametro, era ad esso collegato lungo la sua periferia mediante numerose viti, che assicuravano un buon contatto elettrico. Al centro del disco di ottone era avvitata una canna di ottone, B, attraverso

[1] Trabacchi, Nuovo Cimento, vol. XVI, 1918, pag. 197.

la quale aveva passaggio, convenientemente isolato, un grosso filo A di rame, il cui estremo comunicava con l'elettrodo centrale del disco di bismuto; tra il disco di ottone e quello di bismuto intercedeva una distanza di mm. 0,5.

Tutto era fissato dentro una scatola di legno a pareti sottili, costituente, nella sua parte esterna, una bobina, nella quale erano avvolte circa 300 spire di filo di rame, disposte nello stesso piano della lamina. La scatola era a sua volta contenuta nell'interno di una cassetta XY di rame, foggiata in modo, come può rilevarsi dalla sezione rappresentata nella fig. 1, da poter

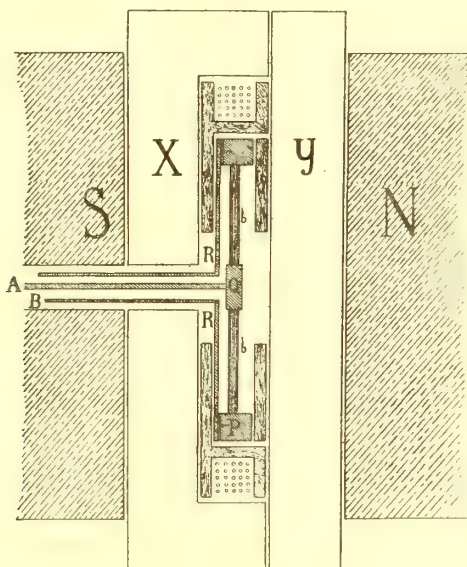



Fig. 1.

circondare l'apparecchio da tutte le parti, mediante una doppia parete nella cui intercapedine poteva mettersi acqua o una opportuna miscela frigorifera.

La cassetta di rame, come è indicato nella figura, era disposta fra le espansioni polari di una grande elettrocalamita di Weiss, aventi il diametro di cm. 10, e separate da una distanza di cm. 5. Date le dimensioni della lamina di bismuto, si poteva ritenere che il campo in tutta la sua estensione fosse sensibilmente costante; e tale infatti si rivelò in una misura esplorativa, che feci precedere alle determinazioni.

L'elettrocalamita era provveduta di raffreddamento a circolazione d'acqua, e la intensità della corrente magnetizzante non raggiungeva mai, nel corso delle esperienze, valori capaci di far variare la temperatura fra le espansioni polari di più di un decimo di grado, come era rivelato da un termometro opportunamente disposto.

Un amperometro permetteva di misurare accuratamente la intensità della corrente magnetizzante; a valori determinati di essa corrispondevano

valori noti del campo, essendone stata fatta la determinazione prima della introduzione della vaschetta.

Era in corrispondenza di tali valori che venivano fatte tutte le successive misure.

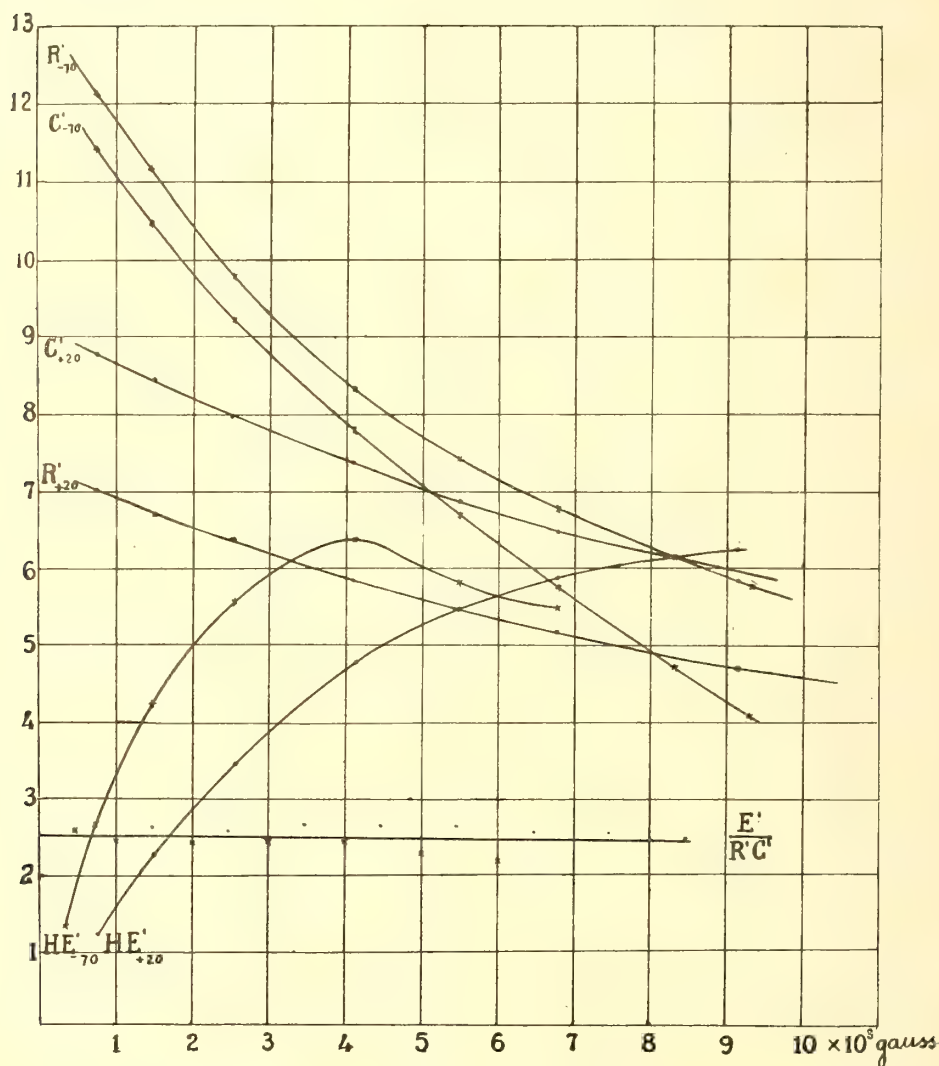



Fig. 2.

Il flusso radiale di corrente, destinato a produrre (sotto l'azione del campo) l'effetto induttivo sulla bobinetta che circondava il disco, era ottenuto collegando i conduttori A e B con una batteria di accumulatori, indipendenti da quelli che alimentavano la elettrocalamita; un amperometro permetteva di assicurarsi che in tutte le esperienze la corrente avesse la stessa intensità. La bobina avvolgente la periferia del disco era, come si è

detto, solidamente fissata tra le espansioni polari della elettrocalamita, in modo che non potessero verificarsi movimenti capaci di generare effetti induttivi perturbatori; così pure fu provveduto ad ottenere l'assoluta costanza della corrente magnetizzante anche nei casi di notevoli intensità, senza di che il galvanometro collegato con la bobina sarebbe stato in continua agitazione.

Ogni misura veniva ripetuta con campo invertito, in modo da poter eliminare ogni possibile azione induttiva di tipo ordinario; si prendeva infatti la media dei due valori, che del resto risultavano sempre assai poco differenti.

Le misure alla temperatura dell'ambiente (20°) venivano fatte riempiendo la vaschetta di acqua: quelle alla temperatura bassa (— 70°) erano ottenute riempiendo la vaschetta di una miscela di anidride carbonica solida e benzina. Tale bassa temperatura si conservava facilmente per tutto il corso di una serie, tanto più che la vaschetta era completamente circondata da un involucro di feltro, che non è stato rappresentato in figura per semplicità.

Per correggere gli effetti del ferro della elettrocalamita, effetti messi in evidenza a suo tempo dal prof. Corbino [1], tutte le misure venivano corrette prendendo, per il valore di $E'.H$ cercato, quello della intensità di una *corrente che, percorrendo una spira avente lo stesso diametro del disco, e sostituita al suo posto, produceva un effetto induttivo uguale, nelle stesse condizioni di campo e di temperatura.* Per rendere paragonabili i valori trovati alle due temperature, veniva compensata con un reostato la diminuzione di resistenza della bobina alla temperatura di — 70°, onde non venisse alterata la sensibilità del sistema.

I valori di $E'.H$, trovati in tal modo alle due temperature considerate, sono rappresentati nella fig. 2; da essi si sono dedotti i valori di E' nei varî casi, in modo che, dividendo tali valori per i singoli prodotti $R'.c'$ corrispondenti (alla stessa temperatura), ho ottenuto i punti segnati lungo la retta orizzontale corrispondente al loro valore medio; essi non si allontanano molto da questo, autorizzandoci a ritenere che possa, nel limite degli errori inevitabili, considerarsi costante il valore di $\frac{E'}{R'.c'}$, come ci eravamo proposti di dimostrare; mentre variano entro limiti notevolmente ampî il campo e la temperatura, in modo da determinare forti variazioni della conducibilità e delle costanti dell'effetto Hall e dell'effetto Corbino.

[1] Corbino, Nuovo Cimento, serie VI, vol. I, 1911.

Chimica — *Ricerche sopra i nitroderivati aromatici. X: Sulla nitrazione del timolo* [1]. Nota di MICHELE GIUA, presentata dal Socio G. PATERNÒ [2].

Nella letteratura chimica si trovano dati assai dubbî sull'esistenza dei varî nitroderivati del timolo. Lallemand [3], che ha descritto alcuni di questi composti, afferma che il binitrotimolo, per ulteriore nitrazione, si trasforma nel trinitrotimolo. Armstrong e Rennie [4] hanno trovato che, invece del trinitrotimolo, si forma il trinitro-m-cresolo; in tal caso, per l'azione dell'acido nitrico concentrato, viene eliminato il gruppo isopropilica, al posto del quale entra un gruppo nitrico. In seguito G. Maldotti [5] ha descritto varî derivati del trinitrotimolo, ma i risultati descritti sono stati subito contraddetti da A. T. Larter [6].

Interessandomi conoscere il comportamento del trinitrotimolo, ho cercato di ottenerlo con i metodi di Lallemand e Maldotti, nitrando direttamente il timolo; inoltre ho nitrato gli eteri etilico e metilico del timolo per ottenere i corrispondenti eteri del trinitrotimolo, e su questi ultimi composti ho fermato maggiormente la mia attenzione.

Atcherley [7] afferma che, versando l'etere metilico del timolo in un miscuglio nitrico-solforico concentrato, si ottiene l'etere metilico del trinitrotimolo.

Per risolvere la quistione della identità dei composti ottenuti nitrando il timolo e i suoi eteri metilico ed etilico, ho preparati gli eteri etilico e metilico del trinitro-m-cresolo, trattando gli eteri del m-cresolo con una miscela nitrico-solforica concentrata. I composti sono perfettamente identici, e per l'azione di varî reagenti dànno origine agli stessi derivati. Così gli eteri metilico ed etilico del trinitro-composto, ottenuto per nitrazione degli eteri

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica generale della R. Università di Sassari.

(2) Pervenuta all'Accademia il 16 ottobre 1919.

(3) Ann. Chim. Phys. (3) *49*, 149 (1857).

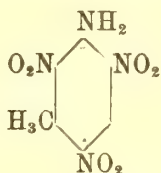
(4) Chem. News, *47*, 115 (1883).

(5) Gazz. chim. ital., *30*, II, 365 (1900).

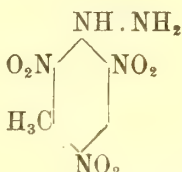
(6) Chem. News, *94*, 23 (1901).

(7) Ibid., *24*, 96 (1871).

del timolo, per azione dell'ammoniaca alcoolica a 60°, dànno origine alla 2-4-6-trinitro-5-metil-anilina.

NH_2
O_2N NO_2
H_3C
NO_2

La stessa sostanza, come è noto da parecchio tempo [1], si ottiene per riscaldamento con ammoniaca alcoolica degli eteri metilico ed etilico del trinitro-m-cresolo.

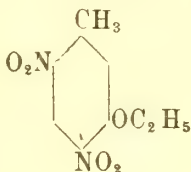
Con idrato d'idrazina i composti accennati dànno origine alla 2-4-6-trinitro-5-metil-fenilidrazina.

$NH.NH_2$
O_2N NO_2
H_3C
NO_2

che descrivo in una Nota seguente.

La fenilidrazina reagisce pure con queste sostanze, dando origine ad un identico composto che descrivo pure in altra Nota.

Trattando l'etere etilico del timolo, disciolto in acido solforico concentrato, con acido nitrico fumante e facendo avvenire la nitrazione a temperatura piuttosto bassa e in breve tempo, ho separato una sostanza bianca, fusibile a 96-97°, che all'analisi ha mostrato un contenuto in azoto corrispondente all'etere etilico del binitrocresolo. Staedel e Kolb [2] hanno descritto l'etere etilico del binitro-m-cresolo come una sostanza bianca, che fonde a 97°.

Questo composto corrisponde alla formola seguente:

CH_3
O_2N
OC_2H_5
NO_2

e per ulteriore nitrazione si trasforma nell'etere etilico del 2-4-6-trinitro-m-cresolo.

Nitrazione del timolato di etile. — L'etere etilico del timolo è stato preparato dal timolo (gr. 45 in 100 cc. di alcool etilico), idrato sodico (gr. 16

[1] W. Staedel e A. Kolb, Ann. Chem., *259*, 222 (1890).
[2] Ibid., pag. 219.

in 40 cc. di acqua) e joduro di etile (gr. 47). L'etere puro bolle a 222° (H = 750 mm.).

Gr. 10 di etere, disciolti in 20 cc. di acido solforico concentrato, si fanno sgocciolare sopra 25 cc. di acido nitrico della densità 1,48. Temperatura massima 50°. Prodotto dapprima oleoso, che poi solidifica e cristallizza dall'alcool in lamelle che alla luce si colorano in giallo-oscuro; si fonde a 75°.

Gr. 0,1273 di sostanza: cc. 18 di N ($t = 22°$; H = 731,5 mm).

Per $C_9 H_9 O_7 N_3$ N °/₀ Trovato 15,85 Calcolato 15,54.

Gr. 10 etere in 20 cc. di acido solforico concentrato e 25 cc. di acido nitrico ($d = 1,51$) Temp. massima di nitrazione 10°. Aghetti bianchi che fondono a 95-96°.

Gr. 0,1578 di sostanza: cc. 17,7 di N ($t = 23°,5$; H = 723,1 mm).

Per $C_9 H_{10} O_5 N_2$ N °/₀ trovato 12,34 calcolato 12,39,

Disciogliendo questa sostanza nell'acido nitrico fumante, mantenendo la temperatura per circa mezz'ora a 50°, questa sostanza si trasforma nel tri-nitro-composto precedente.

Nitrazione del timolato di metile. — L'etere è stato ottenuto da timolo e solfato dimetilico. P. eb. 211-212° (H = 745 mm). Nitrato nelle stesse condizioni dell'etere precedente, dà origine a una sostanza colorata leggermente in giallo, che cristallizza dall'alcool in prismi fusibili a 93-94°.

Gr. 0,1227 di sostanza: cc. 17,9 di N ($t = 23°$; H = 733,9 mm).

Per $C_8 H_7 O_7 N_3$ N °/₀ trovato 16,32 calcolato 16,34.

Questo lavoro sarà pubblicato per esteso nella *Gazzetta chimica italiana.*

Mineralogia. — *La sellaite del marmo di Carrara* [1]. — Nota di A. Pelloux, presentata dal Corrisp. F. Millosevich.

Debbo alla cortesia dei signori De Champs e Caselli, appassionati cultori delle scienze naturali, l'aver avuto in esame un cristallo da essi recentemente acquistato alla cava della Piastra, presso Carrara, cristallo che, per l'abito dimetrico e per il debole potere rifrangente, aveva richiamato la loro attenzione, e che ho identificato con la sellaite.

Trattandosi di un minerale raro, perchè sin qui trovato soltanto nell'anidrite che affiora presso le morene del ghiacciaio di Gebroulaz in Taran-

[1] Lavoro eseguito nel Museo civico di storia naturale di Genova.

tasia ([1]), ed in un blocco incluso nella lava vesuviana del 1872 ([2]), credo opportuno darne la descrizione, mentre spero che il ritrovamento di altri campioni mi permetta, in seguito, di continuare lo studio su materiale più abbondante.

Il cristallo di cui si tratta è isolato e si trovava frammisto ad altri di quarzo che, come questo, erano stati distaccati dal marmo Il suo abito è prismatico e le dimensioni sono di 5 mm., secondo l'asse verticale, per 3 mm. di diametro.

Vi ho osservato le seguenti forme, delle quali l'ultima sarebbe nuova per la sellaite:

a (010) *m* (110) *e* (011) *s* (112) W (551) *t* (4.11.1)

Le coordinate delle facce sono riportate nella seguente tabella, in cui i valori degli angoli misurati sono posti a confronto con quelli calcolati, partendo dalle costanti ricavate da A. Sella per la sellaite di Gebroul adottate anche dallo Zambonini per quelle del Vesuvio, costanti per cui $a : c = 1 : 0{,}6596$

Lettere	Simboli	Numero delle facce misurate	Coordinate misurate		Coordinate calcolate	
			φ	ρ	φ	ρ
a	010	4	0°.00′	90°.00′	0°.00′	90°.00′
m	110	4	45.00	90.00	45.00	90.00
n	120	1	26.20	90.00	26.34	90.00
e	011	4	0.00	33.31 (*)	0.00	33.24
s	112	1	45.00	25.20	45.00	25.00
W	551	1	45.00	78.00	45.00	77.54
t	4.11.1	1	20.00	82.30	19.58	82.37

(*) I limiti delle misure di ρ per (011) sono: 33°.00 e 33°.40′.

Nel cristallo predominano le facce di (010) e di (110), alle quali seguono quelle del diottaedro (011). Tutte le altre sono pochissimo sviluppate e ciascuna di esse è presente una sola volta.

I due prismi (010) e (110) hanno all'incirca uguale sviluppo, ma una coppia delle faccie opposte di (110) è un po' più estesa dell'altra, di modo che il cristallo risulta, secondo essa, leggermente appiattito. A differenza della sellaite di Gebroulaz, le facce di questi prismi non mostrano alcuna

([1]) Vedi A. Sella, *Sulla sellaite e sui minerali che l'accompagnano.* Memorie della R. Accad. dei Lincei, vol. IV. Roma 1888.

([2]) F. Zambonini, *Mineralogia vesuviana.* Atti dolla R. Accad. delle scienze fisiche e matematiche di Napoli, vol. XIV, pag. 43. Napoli 1910

striatura. Esse, al goniometro, riflettono nitide immagini, per cui si ha perfetta corrispondenza fra gli angoli misurati e quelli teorici.

Il cristallo, rotto ad una delle estremità, è terminato dall'altra drusicamente dalle facce superiori del diottaedro (011), appartenenti a diversi individui isorientati ed in accrescimento parallelo con la parte sottostante del cristallo. Tali facce appaiono profondamente corrose, e perciò sono poco visibili ad occhio nudo. Però le loro plaghe inalterate spiccano al goniometro, dando immagini che, sebbene sbiadite, consentono discrete misure.

Il prisma (120) è rappresentato da una faccetta sottilissima che dà scarso riflesso.

Delle bipiramidi (112) e (551), la prima è lineare, mentre la seconda, pure assai piccola, è trapezoidale e presenta una superficie arrotondata. Entrambe queste facce compaiono al disopra di una nitidissima del prisma (110), su uno degli spigoli del quale compare la (4.11.1).

La nuova bipiramide ottagona (4.11.1) è presente con una piccola faccia triangolare piana e brillante, sicchè credo di poter aggiungere questa forma alle 21 sin qui conosciute della sellaite, piuttosto che riferirla a quegli smussamenti arrotondati dei vertici dei prismi che il Sella indicò come caratteristici di questo minerale.

Oltre agli angoli di posizione, sopra riportati, indico qui di seguito i valori di quelli che la nuova forma fa con i prismi (010) e (110):

	Misurato		Calcolato
(4.1.11):(010) =	22°.14′	. . . .	22°.24′
(4.11.1):(110) =	26°.5′	. . . .	26°.00

Nel cristallo di sellaite di Carrara, oltre alla mancanza della striatura verticale dei prismi (che, del resto, non è sempre presente neppure in tutti quelli di Gebroulaz), è notevole l'assenza del diottaedro (111) comunissimo nei cristalli terminati di quest'ultima località e del Vesuvio.

Come nella sellaite di Gebroulaz, si notano nel cristallo che ho esaminato inclusioni di solfo e di gesso. Il primo di questi minerali si presenta come una scheggia cristallina con contorno irregolare, visibile anche senza l'aiuto della lente, e con scarsi grumetti microscopici. Il secondo, incoloro o bianchiccio, forma varie inclusioni delle quali la più grande, laminare, e disposta quasi normalmente all'asse verticale del cristallo, misura circa 1 mm. di larghezza. Il suo contorno è sfilacciato e l'interno è in parte fibroso. Alla luce polarizzata mostra debole birifrangenza ed estinzione inclinata, rispetto all'allungamento delle fibre.

Oltre a queste inclusioni se ne vedono altre microscopiche, anche esse laminari, ma a contorno rettangolare o quadratico. Una di tali inclusioni, mentre è incolora e trasparente per circa metà, presentando notevole biri-

frangenza, nell'altra assume struttura fibrosa e mostra i caratteri ottici del gesso, ciò che mi farebbe ritenere trattarsi di anidrite parzialmente idratata. Altre inclusioni, simili a queste per la forma, sono invece costituite da cristalli negativi che hanno il vano occupato da liquido meno rifrangente della sellaite, la cui presenza è rivelata da quella di bollicine gassose.

La durezza del minerale è uguale a quella dell'apatite. Il peso specifico, determinato col picnometro alla temperatura di 19° C, risultò di 3,17, valore assai prossimo a quello trovato dal Sella (3,15 a 16° C), ma che deve considerarsi approssimativo, in causa delle impurità del cristallo e dello scarso suo peso (gr. 0,0715).

Una piccola scaglia mostrò tracce delle due sfaldature secondo (010) e secondo (110). Questa scaglia, esposta alla fiamma del cannello, imbianchì, fondendo superficialmente in uno smalto.

Il minerale, inattaccabile dagli acidi nitrico e cloridrico, lo fu invece, a caldo, dall'acido solforico. Con l'aggiunta di silice ebbi sviluppo di acido idrofluosilicico, la cui presenza, come quella del magnesio, controllai ottenendo, con i noti processi microchimici, nitidi cristalli di idrofluosilicato sodico e di fosfato ammonico magnesiaco.

Il cristallo, grazie alla specularità delle sue facce prismatiche, all'assenza di striatura ed alla perfetta trasparenza, si è prestato egregiamente al controllo delle proprietà ottiche. Non potendo ricavarne una lamina (ciò che avrebbe portato con sè la distruzione del prezioso esemplare) per l'osservazione alla luce convergente, ricorsi all'immersione in un liquido di indice uguale a quello della sellaite, adoperando all'uopo una soluzione acquosa di glicerina. Ottenni in tal modo una nitidissima immagine d'interferenza monoassica e di segno positivo.

Per gli indici di rifrazione, determinati con il metodo della riflessione totale, valendomi del piccolo refrattometro di Smith, ottenni i seguenti valori:

$$\omega_{Na} = 1,37 \qquad \varepsilon_{Na} = 1,38 \qquad (\varepsilon - \omega)_{Na} = 0,01 .$$

Le proprietà riscontrate corrispondono, dunque, a quelle della sellaite degli altri due giacimenti di questo minerale sin qui conosciuti, e mostrano una speciale analogia, per l'abito dei cristalli e per alcuni caratteri fisici, con quanto venne osservato nella sellaite savoiarda. Disgraziatamente il cristallo è distaccato dalla roccia, ciò che non permette di conoscere in modo preciso le condizioni paragenetiche. Debbo tuttavia notare a questo proposito che, mentre tali condizioni ci sono in parte rivelate dall'esistenza degli inclusi, il ritrovarsi, nel marmo di Carrara, di quasi tutti i minerali che accompagnano la sellaite di Gebroulaz (e cioè solfo, fluorite, dolomite, quarzo, albite e gesso) possa essere indizio di un'analogia di origine: molto più se si accetta l'ipotesi proposta dal Sella, secondo cui l'anidrite del giacimento savoiardo sarebbe dovuta al metamorfismo di preesistenti calcari.

Batteriologia agraria. — *Contribuzioni alla conoscenza dell'« arrabbiaticcio » o « calda-fredda » dei terreni* [1]. Nota di R. PEROTTI, presentata dal Socio G. CUBONI.

In un terreno facente parte della fattoria di Fontesegale, presso Umbertide (Perugia), di proprietà Boncompagni-Ludovisi, sono stati offerti al mio esame i tre seguenti principali casi di « arrabbiaticcio »:

1°) ristoppio, a lavorazione abbastanza profonda con Brabant-Melotte n. 3, eseguita in agosto e con terreno asciutto;

2°) ristoppio, rimasto non lavorato fino all'epoca della semina;

3°) guastaticcio dietro barbabietole, dipendente da zappatura superficiale a metà maggio, dopo caduta una leggera pioggia.

Secondo le informazioni avute sul posto, questi sarebbero i casi tipici di « arrabbiaticcio » che si ripetono in tutti i poderi della fattoria e, in generale, nei ringrani. Il caso più grave è il primo; il meno grave è il secondo, nel quale non sempre i contadini riconoscono il carattere del guastaticcio. Tuttavia le anormalità di vegetazione del frumento sono anche in esso evidenti, pur non potendosene facilmente ascrivere la causa alla mancata tempera del terreno, circostanza la quale può invece ammettersi per il terzo caso. Nel primo caso la determinante del danno andrebbe posta in relazione al rimescolamento degli strati profondi umidi con i superficiali secchi.

Comunque, in tutti i campi di frumento « arrabbiato » da me esaminato si presentano vaste radure, nelle quali al frumento erano sostituite in abbondanza male erbe, in specie rosolacci, senape arvense, avena fatua, ecc.

Le piante avevano bassa statura, spesso sovrastata da quella delle erbe spontanee; e la spiga degl'individui, che riuscivano a completare alla meglio il ciclo vegetativo, era annerita e non conteneva che un piccolo numero di meschine cariossidi. Il prodotto discendeva fino a tre o quattro semenze.

Particolarmente ridotto e manifestamente ostacolato nel suo sviluppo si presentava il sistema radicale, che spesso si dimostrava attaccato da micelii fungini.

Sui terreni così danneggiati mi proposi di eseguire la misura dei poteri di ammonizzazione, nitrificazione, denitrificazione e fissazione dell'azoto

[1] Lavoro eseguito presso il laboratorio di batteriologia agraria della R. Stazione di patologia vegetale di Roma e, per le ricerche indilazionabili, presso il laboratorio consorziale d'igiene ed agraria in Arezzo. Per le cortesie e gli aiuti ricevuti presso questo Istituto, rivolgo particolari ringraziamenti all'on. prof. G. Sanarelli, presidente del Consiglio di amministrazione del laboratorio, e al direttore del medesimo prof. Giuseppe Ficài.

elementare. Il metodo seguìto fu quello del Remy con le modificazioni a più riprese, da altri e da me stesso, apportatevi [1].

1°) *Potere di ammonizzazione.* — Cmc. 10 di una soluzione di peptone Witte all'1,5 % s'inocularono, dopo sterilizzazione in provette, con cmc. 5 di una diluizione a pesi uguali di acqua e terreno da esaminarsi. Si coltivò a 20° C e, dopo quattro giorni, si distillò su magnesia usta l'ammoniaca prodottasi.

2°) *Potere di nitrificazione.* — Cmc. 25 di una soluzione acquosa al 2 ‰ di solfato ammonico e fosfato potassico con aggiunta del 40 % di carbonato di magnesio in polvere, dopo sterilizzazione in piccole bevute, s'inocularono con cmc. 10 della diluizione di terreno, come sopra. Si coltivò a 15° C in lenta corrente di aria sterile e dopo venti giorni si determinò colorimetricamente l'acido nitrico prodottosi.

3°) *Potere di denitrificazione.* — Cmc. 50 della soluzione di Giltay, modificata dal Barthel, sterilizzati in piccole bevute, s'inocularono con cmc. 10 della diluizione di terreno suddetta. Si coltivò a 20° C; e qualitativamente, due volte nella giornata, si determinò la presenza dei nitrati fino alla loro totale scomparsa.

4°) *Potere di fissazione dell'azoto elementare.* — Cmc. 250 di una soluzione acquosa al 20 ‰ di mannite e al 0,2 ‰ di fosfato bipotassico ed aggiunta di creta in ragione del 5 ‰, sterilizzati in grandi bevute, s'inocularono con cmc. 20 della diluizione del terreno. Si coltivò in sottile strato a 20° C e si determinò l'azoto finale in rapporto all'iniziale.

I risultati ottenuti vengono riuniti nella tabella seguente:

[1] Perotti R., *Sopra i metodi di misura delle attività microbiche del terreno agrario.* Rend. Acc. Lincei, XX, serie 5ª, 1° sem., fasc. 4°, pag. 266.

	Terreno *normale*	Terreno *anormale*
Potere di ammonizzazione:		
NH_3 gr. per litro - esame n. 1	3.349	3.366
» » » 2	3.502	3.468
» » » 3	3.587	3.551
» » » 4	3.349	3.485
Media . . .	**3.446**	**3.467**
Potere di nitrificazione:		
HNO_3 gr. per litro - esame n. 1	0.600	0.700
» » » 2	0.700	0.700
Media . . .	**0.650**	**0.700**
Potere di denitrificazione:		
Ore richieste per la totale scomparsa della reazione . . . . esame n. 1	108	96
» » » 2	84	120
» » » 3	96	108
Media . . .	**95.9**	**108.0**
Potere di fissazione dell'azoto.		
N gr. per litro - esame n. 1	0.640	0.480
» » » 2	0.560	0.900
Media . . .	**0.600**	**0.690**

Queste cifre — tenuto anche conto delle riserve con cui è necessario accogliere i risultati del metodo seguìto — dimostrano non esistere apprezzabili e sicure differenze fra il valore dei poteri di ammonizzazione, nitrificazione, denitrificazione e fissazione dell'azoto nel terreno caldafreddato ed in quello testimone. Tanto l'uno quanto l'altro ammonizzano, nitrificano, denitrificano e fissano azoto con intensità sensibilmente uguale; e perciò dalle presenti ricerche non trarrebbe sostegno l'ipotesi che la « calda-fredda » avrebbe la sua causa in un disturbo della nitrificazione [1] od in un esaltamento del potere di denitrificazione del suolo [2].

[1] Peglion V., *Sull'« arrabbiaticcio » o « calda-fredda »*. Saggio monografico. Staz. sp. agr. ital., vol. XXXIV, fasc. 3°, pag. 219.

[2] Lumia C., *Il processo di denitrificazione nel terreno agrario e l'« arrabbiaticcio » o « calda-fredda »*. Ann. chim. applic., II, vol. IV, n. 1 e 2.

Se non si trattasse che della deficiente nutrizione azotata della pianta coltivata conseguente al disturbo dei naturali fenomeni che nel terreno preparano nitrati od altri composti azotati assimilabili, si potrebbe ovviare al danno con una razionale concimazione; invece concimazioni di nitrato e di calciocianamide, fatte ai terreni da me esaminati, non hanno apportato il benchè minimo giovamento.

Volli pertanto indirizzare in altro senso le mie ricerche e mi proposi di procedere alla numerazione dei germi nei terreni in esame, valendomi di agar albumosa Heyden, in colture mantenute per venti giorni a temperatura ambiente (25° C).

I risultati della numerazione sono qui riportati:

Esame	Numero dei germi per cm³ di terreno	
	normale	*anormale*
1	1.210.000	2.205.000
2	1.350.000	1.690.000
3	1.065 000	1.972.500
4	1.165.000	1 662.500
Medie	**1.197.500**	**1 882.500**

Fra questi germi si avevano corrispondentemente ifomiceti:

Esame	Numero degli ifomiceti per cm³ di terreno	
	normale	*anormale*
1	60.000	270 000
2	95.000	290,000
3	57.500	280.000
4	90.000	180.000
Medie	**75 625**	**255.000**

Qui ci troviamo di fronte a differenze di cifre veramente notevoli e tali da autorizzare alcune fondate conclusioni.

Nel terreno guastato, in un cmc. di terra, si hanno 157 germi per ogni 100 che se ne trovano nello stesso volume di terreno normale; e per ogni 100 ifomiceti che si trovano in questo, se ne hanno 337 nel terreno anormale.

Adunque risulta che, per effetto della intempestiva lavorazione del terreno, *si verifica in questo un rilevante aumento di germi, fra i quali acquistano notevole preponderanza gl' ifomiceti.*

Questo fatto sembra facilmente spiegabile qualora si consideri come, in seguito alla lavorazione, l'aereazione del suolo, più o meno umido per l'avvenuta pioggia od il rimescolamento degli strati profondi, nel più caldo periodo dell'anno, non possa non dare luogo ad una stragrande moltiplicazione in esso di germi, e specialmente di quelli che, quanto meno negli strati superficiali, sono più resistenti alla siccità, e, cioè, degli ifomiceti. Ed allorchè, nella ripresa vegetativa della successiva primavera, i germi, così aumentati di numero, vengono a trovarsi nuovamente in condizioni favorevoli di sviluppo, essi daranno luogo ad una rigogliosa vegetazione, specialmente fungina, che, coincidendo con il periodo di tallitura del frumento, deve provocare l'intristimento e l'attacco parassitario delle piante.

È noto quale danno rechi alle coltivazioni superiori, per i prodotti di metamorfosi regressiva che si formano, la presenza d'ifomiceti nel terreno in proporzioni anormali.

Nella dotta monografia di V. Peglion, innanzi citata, la causa prima del deperimento del grano nei terreni guasti sarebbe attribuita alla insufficiente alimentazione azotata nel periodo della tallitura, quando le esigenze del frumento in azoto sono marcatissime. Questa insufficiente alimentazione è a sua volta collegata al disturbato processo di nitrificazione, derivante dalla deficienza di umidità negli strati superficiali del terreno..... Ora, le osservazioni e ricerche da me riferite potrebbero, almeno in alcuni casi, autorizzare una diversa spiegazione del fenomeno dell'« arrabbiaticcio » o « caldafredda ».

Per effetto della lavorazione ed aereazione estiva dei terreni mal bagnati, *il regime microbico di essi viene ad essere profondamente alterato.* Sarebbe soprattutto il rigoglioso sviluppo di vegetazioni fungine, i cui germi sono particolarmente resistenti, che, oltre a disturbare in parte i normali poteri microrganici del suolo, inquina il terreno di prodotti di rifiuto notoriamente dannosi a piante sensibili come il frumento ed a sistema radicale delicato. A questa dannosa azione, in uno dei più critici periodi del ciclo di sviluppo della graminacea, si aggiunge il facilitato attacco parassitario della pianta.

Il risanamento di terreni così alterati non potrebbe ottenersi che mediante profonde e necessariamente lente modificazioni, con sostituzione di colture plusannuali, a sistema radicale fittonante e resistente, indipendenti per quanto più è possibile dal naturale ciclo degli elementi della fertilità (primo fra essi l'azoto) che si compie nel terreno. Infatti, nei casi da me studiati, trattandosi di terreni leggermente guastati, il risanamento si è ottenuto con erbai di trifoglio, mentre per i terreni profondamente guasti si è dovuto far ricorso al medicaio.

Fisiologia. — *Ricerche sulla natura del veleno dell'anguilla. III: Nuovi esperimenti sulla termostabilità dell'ittiotossico* [1]. Nota del dott. G. Buglia, presentata dal Corrisp. V. Aducco [2].

Recentemente pubblicai alcuni esperimenti, i quali dimostrano che il calore non distrugge il potere tossico del siero del sangue di anguilla adulta e dell'estratto acquoso del corpo di giovani anguille ancora trasparenti (*cieche*) [3]. Per ciò ne trassi la conclusione che il veleno dell'anguilla è termostabile.

I risultati riferiti li ottenni sperimentando sulle rane. Ora ho voluto estendere gli esperimenti ai cani, per vedere se la termostabilità del veleno si può dimostrare anche riguardo agli effetti ch'esso produce allorchè viene iniettato direttamente nel circolo venoso di animali omotermi.

È noto che non soltanto l'iniezione endovenosa di siero del sangue di anguilla [4], ma anche quella di estratto di *cieche*, di estratto di pelle di anguilla, e di liquido *filante* [5], produce nei cani modificazioni notevoli della funzione respiratoria e della funzione cardio-vascolare, consistenti essenzialmente in un'alterazione del ritmo respiratorio, accompagnata da fenomeni convulsivanti, e in un rapido abbassamento della pressione arteriosa.

Per brevità riporto soltanto alcuni degli esperimenti, che ho fatto con siero di sangue di anguilla e con estratto di *cieche*.

1° Esperimento (23 luglio 1919). — Cane ♀ di kgr. 11. Contemporaneamente alla pressione arteriosa (carotide destra), si prende il tracciato normale della respirazione, applicando al torace un pneumografo del Marey.

La pressione arteriosa corrisponde a 13 cm. di Hg; le pulsazioni cardiache sono 143 al 1′; il ritmo respiratorio non è molto regolare, poichè l'animale è alquanto agitato; si contano 36 atti respiratorî al 1′.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di fisiologia della R. Università di Pisa diretto dal prof. V. Aducco.

(2) Pervenuta all'Accademia il 12 settembre 1919.

(3) G. Buglia, *Ricerche sulla natura del veleno dell'anguilla*. Nota I. Atti della R. Accad. dei Lincei. 1919.

(4) A. Mosso. *Un venin dans le sang des murenides*. Arch. ital. de biol., X, 1888, pag. 141.

(5) G. Buglia, *Sulla tossicità degli estratti acquosi del corpo delle giovani anguille ancora trasparenti* (*cieche*). Atti della Soc. toscana di sc. nat., residente in Pisa. Memorie, vol. XXXII, 1919, pagg. 165-193

In 30″ si iniettano, nella vena giugulare sinistra, 22 cc. di estratto di *cieche*, riscaldato a 100° C per 15″ (1).

Durante l'iniezione si osserva un lieve e temporaneo abbassamento della pressione ed una maggiore irregolarità del ritmo respiratorio.

La pressione scende a 8 cm. di Hg, ma poco dopo risale all'altezza iniziale; le pulsazioni cardiache diventano un poco meno energiche e più frequenti.

Dopo 5′ si ripete l'iniezione di altri 12 cc. di estratto: nuovamente si osserva un lieve e fugace abbassamento della pressione, con leggera variazione del ritmo respiratorio. Le pulsazioni cardiache diventano più rade, ma più energiche.

Dopo 10′ circa, compaiono evidenti, sul tracciato della pressione, oscillazioni vasomotorie.

Dopo 30′ la pressione si trova all'altezza iniziale. L'animale non presenta fenomeni di avvelenamento così gravi da farne prevedere prossima la morte.

Si iniettano allora altri 12 cc. dell'estratto. La pressione arteriosa scende rapidamente a 2 cm. di Hg.; e l'animale, dopo 5′, in un accesso convulsivo, muore, presentando l'arresto del respiro prima dell'arresto delle pulsazioni cardiache.

Si trovano coaguli nel cuore; la parte del sangue liquida, raccolta in un bicchiere, non coagula neppure dopo 24 ore e non emolizza.

In questo esperimento si è ottenuta la morte dell'animale, dopo l'iniezione di 46 cc. di estratto, vale a dire 4 cc. di estratto per kgr. d'animale.

2° *Esperimento* (23 luglio 1919). — 50 cc. di estratto di *cieche* si riscaldano a 100° per 15′. Il precipitato fioccoso, formatosi in seguito alla coagulazione delle sostanze albuminose, viene raccolto, filtrando nel vuoto, e macinato in mortaio con cristalli di quarzo.

Alla poltiglia si aggiungono tanti cc. di soluz. fisiol. sino a portarla al volume di 50 cc. Questo liquido, di colore grigio-verdastro, a reazione leggermente alcalina, viene lasciato sedimentare e si raccoglie la parte sovrastante al sedimento.

Cane ♂ di kgr. 7. Come nel caso precedente, si prende il tracciato normale del respiro e della pressione arteriosa (carotide destra). La pressione corrisponde a 17 cm. di Hg; le pulsazioni cardiache sono in numero di 125 al 1′; gli atti respiratorî 34 al 1′.

In 30″, circa, si iniettano nella vena giugulare sinistra 15 cc. del liquido sopradetto.

Non appena terminata l'iniezione, l'animale presenta fenomeni convulsivi. Gli atti respiratorî si fanno più ampî, più frequenti e assai irregolari; la pressione arteriosa scende a 2 cm. di Hg.; le pulsazioni cardiache si fanno più rade, debolissime e, dopo pochi minuti, cessano quasi contemporaneamente agli atti respiratorî.

Si trovano coaguli nel sangue del cuore; la parte liquida, raccolta in un bicchiere, coagula dopo pochi minuti.

In questo esperimento la morte dell'animale avvenne rapidamente dopo l'iniezione di 2 cc. di estratto per kgr. d'animale.

3° *Esperimento*. — Cane ♂ di kgr. 8. La pressione arteriosa corrisponde a 16 cm. di Hg.; le pulsazioni cardiache sono in numero di 195 al 1′; si contano 45 atti respiratorî, regolari, al 1′.

Si iniettano rapidamente nella vena giugulare sinistra dell'animale 17 cc. di siero

(1) In questo esperimento e nei successivi, l'estratto di *cieche* venne preparato tritando, in mortaio con cristalli di quarzo, una determinata quantità (in peso) di *cieche* e aggiungendo alla poltiglia una quantità (in volume) di soluz. fisiol. (NaCl al 0,9 %), doppia di quella delle *cieche*. Quindi si agita e si centrifuga.

del sangue di anguilla, diluito al quinto (vale a dire cm. 3,4 di siero schietto) e riscaldato a 100° C per 15′.

Subito dopo l'iniezione, non si osserva alcuna variazione apprezzabile nè della pressione nè della respirazione.

Dopo 1 ora e 30′ si notano soltanto un lievissimo abbassamento della pressione e un rallentamento degli atti respiratorî (20 al 1′). L'animale è calmo e non dà segni di avvelenamento.

Allora si iniettano nella stessa vena giugulare 9 cc. del siero precedente (diluito al quinto) riscaldato a 100° C per 15′ e poi macinato con cristalli di quarzo.

Si nota subito un rilevante innalzamento della pressione (sale a 19 cm. di Hg), seguìto, però, da un forte abbassamento (la pressione scende a 6 cm. di Hg) gli atti respiratorî fattisi più frequenti e irregolari, durante l'iniezione, diventano assai meno ampî e più radi.

Dopo 10′ queste condizioni rimangono invariate. Si iniettano altri 3 cc. dello stesso liquido: la pressione si abbassa nuovamente e arriva a zero; l'animale muore, presentando l'arresto delle pulsazioni cardiache prima dell'arresto degli atti respiratorî.

Il sangue, nel cuore, è completamente liquido; raccolto in bicchiere, coagula in 2′, e dopo 12 ore il coagulo è gelatinoso, laccato.

In questo esperimento la morte dell'animale avvenne dopo l'iniezione di 12 cc. di siero diluiti al quinto, vale a dire 3 cc. di siero schietto per kgr. d'animale.

Gli esperimenti riferiti dimostrano dunque chiaramente che la disgregazione meccanica dell'estratto di *cieche* e del siero di sangue di anguilla, riscaldati a 100° C per 15′, fa riacquistare a questi liquidi l'azione tossica, che normalmente manifestano allorchè vengono iniettati nelle vene di cani, e che in gran parte perdono sotto l'influenza del riscaldamento. Infatti, tanto il siero di anguilla, quanto l'estratto di *cieche*, riscaldati eppoi macinati in mortaio con cristalli di quarzo, producono irregolarità ed aumento di frequenza del ritmo respiratorio, abbassamento della pressione sanguigna e rapida morte dell'animale.

Eguali risultati ottenni producendo la disgregazione dell'estratto di *cieche* riscaldato, per mezzo dell'azione fermentativa (estratto pancreatico).

Così questi esperimenti confermano la termostabilità del veleno dell'anguilla, già dimostrata dagli esperimenti sulle rane.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

O. Munerati. *Osservazioni e ricerche sulla barbabietola da zucchero.* Pres. dal Socio Pirotta.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Corrisp. F. Millosevich, a nome anche del Socio Viola (relatore) legge una Relazione sulla Memoria del prof. E. Billows, avente per titolo: *Sulla tridimite di Zoron negli Euganei*, proponendone la inserzione nei volumi accademici.

Le conclusioni della Commissione esaminatrice, messe ai voti dal Presidente, sono approvate dalla Classe, salvo le consuete riserve.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente annuncia che colle norme stabilite dallo Statuto e dal Regolamento, l'Accademia procedette alla elezione di Corrispondenti. Le elezioni dettero i risultati seguenti per la Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali:

Nella Categoria I, per la *Matematica*: Berzolari Luigi; per la *Meccanica*: Crocco G. Arturo.

Nella Categoria II, per la *Fisica*: Majorana Quirino.

Nella Categoria III, per la *Geologia e Paleontologia*: Dainelli Giotto.

Nella Categoria IV, per la *Zoologia e Morfologia*: Versari Riccardo.

L'esito delle votazioni venne proclamato con Circolare del 10 ottobre 1919.

Il Presidente aggiunge che alla seduta sono presenti il Socio straniero prof. Mittag Leffler e il prof. Versari, ai quali porge il cordiale saluto della Classe.

Il Presidente dà poscia il triste annuncio della morte dei seguenti Socî, avvenuta durante le ferie accademiche:

Luciani Luigi, morto il 23 giugno 1919; era Socio nazionale per la *Fisiologia* dal 1° agosto 1895.

Lord Rayleigh Strutt, mancato ai vivi il 30 giugno 1919; era Socio straniero per la *Meccanica* dal 6 agosto 1891.

Briosi Giovanni, morto il 20 luglio 1919; era Socio nazionale per la *Botanica* dal 26 agosto 1896.

Retzius Gustavo, mancato ai vivi il 21 luglio 1919; era Socio straniero per la *Zoologia e Morfologia* dal 26 agosto 1907.

Baccarini Pasquale, morto il 24 luglio 1919; era Corrispondente per l'*Agronomia* dal 19 luglio 1908.

Haeckel Ernesto, morto il 10 agosto; era Socio straniero per la *Zoologia e Morfologia*, dal 9 agosto 1899.

Dalla Vedova Giuseppe, morto il 21 settembre 1919; era Socio nazionale per la *Geografia mat. e fisica* dal 31 luglio 1903.

Riccò Annibale, morto il 23 settembre 1919; era Socio nazionale per l'*Astronomia*, dal 24 agosto 1911.

Di tutti questi Accademici verrà in seguito fatta apposita commemorazione; intanto il Presidente e il Socio Pirotta pronunciano alcune affettuose e commosse parole in ricordo del defunto collega prof. Baccarini, dovendosi rispettare la disposizione del defunto di non volere orazioni funebri; la Classe delibera d'inviare un telegramma di condoglianza alla famiglia Baccarini.

Il Socio E. Millosevich legge la seguente commemorazione di Annibale Riccò:

Può ben l'astro-fisica italiana vestir gramaglia, chè il nostro amato collega Annibale Riccò ne era il più autorevole rappresentante. Egli è morto come il soldato sulla breccia il 23 settembre qua a Roma; era arrivato qualche giorno prima per prender parte ad una Commissione antisismica; vi era giunto gia avvelenato dal virus malarico, e, quando il morbo fu accertato, i rimedî divennero inefficaci.

Era nato a Modena a mezzo settembre del 1844, così che, in ossequio alla legge, Egli aveva da pochi giorni lasciata la cattedra d'astro-fisica e la direzione dell'Osservatorio di Catania e di quello sull'Etna. Nel 1866 conseguiva la licenza in matematica nella R. Università di Modena, nel 1868 fu proclamato ingegnere nell'Istituto tecnico superiore di Milano, mentre laureavasi in scienze naturali nella patria università. Fu docente nelle scuole medie della sua città; più tardi tenne la cattedra di fisica tecnica nella R. Scuola d'applicazione degli ingegneri a Napoli, e finalmente entrò nella famiglia astronomica in qualità d'astronomo aggiunto nel R. Osservatorio di Palermo. Dal 1890 fino alla morte fu professore d'astro-fisica nella R. Università di Catania, direttore dell'Osservatorio e di quello ausiliario sull'Etna e preposto ai servizi meteorologici e sismici della regione. Egli aveva conseguito la cattedra su parere conforme d'una Commissione, presieduta da G. V. Schiaparelli, la quale lo proponeva al Governo in base all'articolo 69 dell'antica legge Casati.

L'Osservatorio astro-fisico di Catania con la succursale sull'Etna è opera del caro estinto, consigliato e aiutato da Pietro Tacchini. Collabora-

tore nelle Memorie della Società degli spettroscopisti italiani quasi fino dalla prima ora, il Riccò ne divenne l'anima dopo la morte di Tacchini, sviluppando un'attività maravigliosa, così che sopra 300 si contano le Note inserite in quel periodico riguardanti in gran parte la fisica solare, alla quale erasi consacrato con ardore e fede scientifica. Ed in verità, è seduzione grandissima lo studiare, con tutti i mezzi dell'astro-fisica moderna, una stella del nostro sistema stellare che c' insegna il suo stato trovandosi a noi così vicina da rivelarcelo quale esso era circa otto minuti prima! Nè giorno sereno passava a Catania che Riccò non esaminasse la fotosfera nelle sue macchie e facole, l'orlo di essa nelle sue prominenze, e più di recente la investigasse, e non soltanto nell'orlo, ma in tutte le sue parti, collo spettroeliografo che egli aveva montato a Catania. Statistiche numerosissime potè egli formulare, nonchè mettere in luce relazioni importanti sulle variazioni della energia solare in base a ben otto lustri di osservazioni. L'ubicazione sull'orlo delle prominenze e quiescenti e eruttive durante il noto periodo undecennale, lo studio delle facole collo spettroeliografo, l'accertamento della struttura spirale delle macchie e dei connessi fenomeni magnetici e altri fatti riguardanti la fisica solare occuparono l' illustre defunto con cure così assidue, che potevasi arguire che tempo non gli rimanesse per dedicarsi ad altri studî, mentre nei frequenti terremoti della Sicilia orientale e nelle convulsioni dell' Etna egli era sempre presente ed attivo.

Benchè lo studio del sole fosse il suo prediletto, pure, se una cometa lucida appariva oppure una stella, prima non vista, egli ne analizzava la luce con lo spettroscopio; e poichè era abilissimo disegnatore, numerosi disegni delle macchie sul disco di Giove lo tennero in passato occupato.

Nel lavoro internazionale del Catalogo e della Carta del cielo, a Catania venne assegnata la zona fra $+46^{\circ}$ e $+55^{\circ}$. Questo impegno, che non era disgiunto da gravi esigenze economiche e da difficoltà tecniche, occupò e preoccupò vivamente il nostro collega, ed è da augurare che l'opera di lui trovi nel suo successore chi possa fronteggiare l' impresa e condurla a termine, e che il Governo ne misuri con larghezza la responsabilità della scienza italiana di fronte alla scienza straniera.

Poichè quando la luna copre totalmente il sole, gli studî sullo strato invertente e sulla corona interessano quasi da soli gli astronomi, volle Riccò far parte di ben quattro spedizioni italiane inviate in regioni della totalità, l'ultima, nel 1914, a Teodosia. In una di esse confermò l'esistenza di quelle prominenze bianche, che primo vide un nostro collega defunto, Pietro Tacchini, e che sembra siano di natura intermedia fra le prominenze rosee ed i pennacchi della corona.

La produzione scientifica di Annibale Riccò, oltre che nelle Memorie degli spettroscopisti, prima ricordate, trovasi diffusa e nei Comptes rendus dell'Accademia di Francia, e nelle Memorie ed Atti della nostra Accademia,

della quale era membro nazionale sino dal 1911, e negli Atti dell'Accademia Gioenia, e nella Rivista d'astronomia, e nelle Astronomische Nachrichten, ecc. A parte gli accenni fatti d'astro-fisica, che interessò in modo speciale il nostro collega, nelle fonti sopraccennate il lettore può trovare svariatissimi scritti di lui in meteorologia, in geo-fisica e in ottica pratica.

I meriti di lui vennero riconosciuti in Italia e all'estero; per le sue ricerche solari conseguì premî lusinghieri, e la nostra Accademia gli assegnò il premio reale d'astronomia nel 1910; era membro di numerose Accademie e di molte Società scientifiche, prese parte a varie Commissioni internazionali, e da ultimo rappresentò l'Italia, insieme con altri colleghi, alle riunioni di Parigi e di Bruxelles nel Consiglio internazionale di ricerche. Nell'àmbito dell'Università di Catania tenne la presidenza della Facoltà di scienze e fu per un triennio rettore.

Questi pochi cenni non sono tali certamente da lumeggiare uno scienziato di un'attività maravigliosa; ma mi preme, nella brevità del tempo concessomi, di dirvi dell'uomo. Sanissimo di corpo, snello della persona, sopportava le fatiche dello studio, così che ad esso donava un gran numero delle ore del giorno; anche ora, in tarda età, viaggiava per l'Europa senza sentirne disagio.

Ammogliatosi non tanto presto, ebbe numerosa e bella figliolanza; la sua primogenita aveva sposato il nostro defunto collega, il prof. Lauricella; ai figli consacrò tutte le sue cure e i frutti del suo lavoro.

La natura diedegli spiccata attitudine al disegno e alla meccanica pratica in una al gusto per le ricerche scientifiche; le doti dell'animo emersero in grado eccelso, perchè non poteva albergare in lui alcun sentimento che non fosse nobile e disinteressato; nell'intima conversazione egli trovava sempre la frase che giustificasse le deficienze o le debolezze altrui, anche quando la difesa gli si presentava difficile. Sentiva l'amicizia e la riconoscenza ricordando, come io ebbi occasione più volte di verificare, beneficî e benefattori di assai vecchia data, il che è qualità purtroppo poco comune nella vita sociale.

In un novennio scomparvero quattro che furono preposti ai nostri Osservatorî:

Schiaparelli, Lorenzoni, Fergola e Riccò:
O che bel camposanto
da far invidia ai vivi!

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario MILLOSEVICH presenta le numerose pubblicazioni giunte in dono durante le ferie, segnalando fra queste la seconda edizione delle *Lezioni di meccanica razionale* di P. BURGATTI; il *Catalogo delle colle-*

zioni di Diatomee e di Funghi appartenenti ai Soci ab. conte Francesco Castracane degli Antelminelli e dott. Matteo Lanzi, possedute dalla Pontificia Accademia dei Nuovi Lincei; il tomo IV delle *Oeuvres de Charles Hermite*, pubblicate, sotto gli auspici dell'Accademia delle scienze di Francia, dal prof. Picard, membro dell'Istituto; il fascicolo III, 1, dell'*Epistolario di Jac. Berzelius*; un volume di *Treballs de la Societat de Biologia* (1918) di Barcellona, pubblicati sotto la direzione di A. Pi Suner; e il vol. VIII delle *Icones Plantarum Formosanarum* di Bunzō Hayata.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente presenta poscia un piego suggellato inviato dal dottor Umberto Bresciani, perchè sia conservato negli Archivi dell'Accademia.

Lo stesso Presidente dà comunicazione di una lettera dell'Accademia delle scienze di Lisbona, contenente vive e cordiali congratulazioni per la vittoria dell'Italia e per la firma della pace. Un'altra lettera dell'Accademia rumena partecipa a quella dei Lincei una protesta in cui rivendica l'annessione di quelle regioni di popolazione rumena che erano aggregate alla disciolta Monarchia austro-ungarica. E finalmente alla Classe vien data comunicazione di un invito della Università di Strasburgo per le feste che da questa saranno celebrate il 22 novembre corrente, nell'anniversario dell'ingresso delle truppe francesi nella predetta città e della sua liberazione dal giogo straniero.

E. M.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL' ACCADEMIA

presentate nella seduta del 2 novembre 1919.

AGAMENNONE G. — Ulteriori ricerche sulla velocità di propagazione del terremoto Marsicano del 1916 (Estr. dal « Bollettino della Societa sismologica italiana », vol. XXII). Modena, 1919. 8°, pp. 1-104.

AMODEO F. — Ambiente scientifico di Napoli dal 1825 al 1860: Ferdinando de Luca - Divagazione di storia generale (Estr. dagli « Atti dell'Accademia Pontaniana », vol. XLIX). Napoli, 1919. 8°, pp 1-29.

AMODEO F. — Giuseppe de Sangro, Giuseppe Scorza, Felice Giannattasio e i periodici napoletani scientifici anteriori al 1825. (Estr. dagli « Atti dell'Accademia Pontaniana », vol. XLIX). Napoli, 1919. 8°, pp. 1-21.

BERZELIUS J. — Bref. B. III, 1. Uppsala, 1918. 8°, pp. 1-67.

BONAPARTE (Le Prince). — Notes ptéridologiques, fascicoli V e VII. Paris, 1917-18. 8°, pp. 1-131, 1-414.

BURGATTI P. — Lezioni di meccanica razionale. Bologna, 1919. 8°, pp. I-XI, 1-544.

CAPACCI C. — Acquedotti ed acque potabili. Milano, 1918. 8°, pp. I-XV, 1-626.

Catalogo delle collezioni di diatomee e di funghi appartenute ai Soci Ab. conte Francesco Castracane Degli Antelminolli e dott. Matteo Lanzi, possedute dalla Pontificia Accademia Romana dei Nuovi Lincei. Roma, 1918. 4°, pp. 1-169.

DE A. ALBUQUERQUE M. — A variação dos calores atomicos em funcção da temperatura. Ponta Delgada, 1919. 8°, pp 1-19.

DE A. ALBUQUERQUE M. — Catálise (Separ, da « Revista de chimica pura e applicada », ano III). Porto, 1918. 8°, pp. 1-22.

DE A. ALBUQUERQUE M. — Oleatos e estearatos (sabões) de alguns metaes (Separ. da « Revista de chimica pura e applicada », anno 1916). Porto, 1917. 8°, pp. 1-8.

DE A. ALBUQUERQUE M. — Sobre una releção entre os espectros de absorpção visiveis de alguns metaes nos seus derivados: $M^{IV}X'_4$ e $(M_2)^{VI}X'_6$ (saes de sesquioxydo). (Separ. da « Revista chimica pura e applicada », I anno). Porto, 1916. 8°, pp. 1-14.

DE ANGELIS D'OSSAT G. — Sull'azione delle acque minerali (Estr. da « L'idrologia, la climatologia e la terapia fisica », anno XXX). Perugia, 1919. 8°, pp. 1-22.

DE ANGELIS D'OSSAT G. — Vertebrati fossili nella lignite presso S. Cosimato (valle dell'Aniene). (Estr. dal « Bollettino della Società geologica italiana », vol. XXXVIII, pp. 34-38). Roma, 1919. 8°.

DE LUIGI G. — Ricevitori radiotelegrafici della R. Marina (Estr. dal giornale « l'Elettrotecnica », anno 1919, n. 13). Milano, 1919. 4°, pp. 1-7.

DE MITRI A. — La fabbricazione delle materie coloranti derivate dal catrame di carbone fossile. Torino, 1919. 8°, pp. I-XXXI, 1-539.

DE TONI G. B. — Appunti su Giacinto Cestoni (Estr. dalla « Rivista di storia critica delle scienze mediche e naturali », anno X). Siena, 1919. 8°, pp. 1-6.

DE TONI G. B. — Commemorazione del membro effettivo Enrico Filippo Trois (Estr. dagli « Atti del R. Istituto ve-

neto di scienze, lettere ed arti », tomo LXXVIII, pp. 25-51). Venezia, 1917. 8°.

De Toni G. B. — Contributo alla teratologia del genere *Chrysanthemum* L. (Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle scienze », vol. LIV, pp. 253-257). Torino, 1918. 8°.

De Toni G. B. — Fabio Colonna e l'eterocarpia (Estr. dalla « Rivista di biologia », vol. I). Roma, 1919. 8°, pp. 1-6.

De Toni G. B. — Intorno un caso di diafisi floripara nella *Digitalis purpurea* L. Rocca S. Casciano, 1919. 8°, fol.

De Toni G. — Notizie bio-bibliografiche intorno Evangelista Quattrami semplicista degli Estensi (Estr. dagli « Atti del R. Istituto di scienze, lettere ed arti », tomo LXXVII, pp. 373-396). Venezia, 1918. 8°.

De Toni G. — Notizie storiche sulla fruttificazione del banano a Modena nel secolo XVIII (Estr. dagli « Atti e Memorie della R. Deputazione di Storia patria per le provincie modenesi », vol. XII). Modena, 1919. 8°, pp. 1-8.

De Toni G. B. — Osservazioni botaniche e sperimentali intorno alla *Digitalis lanata* Ehrh. (Estr. dagli « Atti del R. Istituto veneto di scienze, lettere ed arti », tomo LXXVIII, pp. 201-218). Venezia, 1919. 8°.

De Toni G. B. — Spigolature Aldrovandiane XVII; lettere inedite di Francesco Barozzi matematico del secolo decimosesto (Estr. da « L'Ateneo veneto », vol. II). Venezia, 1917. 8°, pp. 1-12.

Favaro A. — Matteo Carasio: amici e corrispondenti di Galileo Galilei; XLI (Estr. dall'« Archivio di Storia della scienza », diretto da Aldo Mieli, vol. I, pp. 28-38). Roma, 1919. 8°.

Favaro A. — Passato, presente e avvenire delle edizioni Vinciane (Estr. dalla « Raccolta Vinciana », fasc. X, pp. 165-219). Milano, 1919. 8°.

Fossa-Mancini E. — Un singolare echinoide mesozoico dell'Appennino centrale (*Anauchothuria* n. gen.). (Estr. dagli « Atti della Società toscana di scienze naturali », vol. XXXIII). Pisa, 1919. 8°, pp. 1-18.

Gosio B. — Annuario bibliografico italiano delle scienze mediche ed affini, vol. II. Roma, 1919. 8°, pp. I-XXIII, 1-451.

Grandi G. — Contributo alla conoscenza degli Agaonini (*Hymenoptera Chalcididae*) di Ceylan e dell'India (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore d'agricoltura in Portici », vol. XI, pp. 183-234). Portici, 1917. 8°.

Grandi G. — Contributo alla conoscenza degli Agaonini (*Hymenoptera Chalcididae*) dell'America; Agaonini di Costarica (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore di agricoltura in Portici », vol. XIII, pp. 15-56). Portici, 1919. 8°.

Grandi G. — Contributo alla conoscenza degli Agaonini (*Hymenoptera Chalcididae*) di Giava (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore di agricoltura in Portici », vol. XII). Portici, 1917. 8°, pp. 1-60.

Grandi G. — Contributo alla conoscenza degli Agaonini (*Hymenoptera Chalcididae*) dell' Eritrea e dell' Uganda (Estr. dal « Bullettino della Società entomologica italiana », anno XLVIII), Firenze, 1917. 8°, pp. 1-42.

Grandi G. — Contributo alla conoscenza delle metamorfosi del *Thychius 5 - punctatus* (L.) (*Coleoptera Curculionidae*) (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore d'agricoltura in Portici », vol. X, pp. 103-119). Portici, 1916. 8°.

Grandi G. — Descrizione della larva e della pupa della *Sitona humeralis* Steph. ed osservazioni sulla morfologia dell'adulto della medesima specie (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore d'agricoltura in Por-

tici », vol. VII, pp. 93-100). Portici, 1913. 8°.

Grandi G. — Gli Agaonini (*Hymenoptera Chalcididae*) raccolti nell'Africa occidentale dal prof. Silvestri (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore d'agricoltura in Portici », vol. X, pp. 119-286). Portici, 1916. 8°.

Grandi G. — Gli stati postembrionali di un Coleottero (*Otiorrhynchus cribricollis* Gyll.) a riproduzione partenogenetica ciclica irregolare (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore d'agricoltura in Portici, vol. VII). Portici, 1913. 8°, pp. 72 90.

Grandi G. — La forma come funzione della grandezza. Ricerche sul sistema muscolare degli Invertebrati (Sonder. aus dem « Archiv für Entwicklungsmechanik der Organismen », B. XXXIV, Ss. 239-262). Leipzig, 1912. 8°.

Grandi G. — Nota su due Agaonini (*Hymenoptera Chalcididae*) dell'Australia (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore di agricoltura in Portici », vol. XI, pp. 145-159). Portici, 1916. 8°.

Grandi G. — Ricerche sopra un *Phoridae* (*Diptera*) africano (*Aphiachaeta xantina Speis.*), con particolare riguardo alla morfologia esterna della larva (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore d'agricoltura in Portici », vol. III, pp. 242-263). Portici, 1914. 8°.

Grandi G. — Studî sui Coccinellidi (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di zoologia generale e agraria della Regia Scuola superiore d'agricoltura in Portici », vol. VII, pp. 267-302). Portici, 1913. 8°.

Grandi G. — Studî sui Coccinellidi. Nota sul gen. *Solanophila* Weise. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di zoologia generale e agraria della Regia Scuola superiore d'agricoltura in Portici, vol. VIII). Portici, 1914. 8°, fol.

Grandi G. — Un nuovo caso di partenogenesi ciclica irregolare fra i Coleotteri (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore d'agricoltura in Portici, vol. VII, pp. 17-18). Portici, 1912. 8°.

Guidi C. — Unioni di forza per travi di legno cimentate a trazione (Estr. dalla rivista « l'Industria », vol. XXXIII). Varese, 1919. 8°, pp. 1-7.

Halkyard E. — The fossil Foraminifera of the Blue Mail of the Cote des Basques, Biarritz (From the « Memoirs and Proceedings of the Manchester literary and philosophical Society », vol. 62). Manchester, 1918. 8°, pp. I-XXIV, 1-145.

Hayata B. — Icones plantarum Formosanarum, nec non et contributiones ad floram Formosanam, vol. VIII. Taihoku, 1919. 8°, pp. 1-164.

Jamet C. — Sur la phylogénèse de l'orthobionte. Limoges, 1916. 8°, pp. 1-72.

Kligenstiernas S. — Levnad och verk. I Levuadsteckning av H. Hildebrand Hildebrandsson. Uppsala, 1919. 8°, pp. 1-88.

Lacroix A. — Conférence interalliée des Académies scientifiques tenue a Paris du 26 au 29 novembre 1918. Paris, 1918. 4°, pp. 1-17.

La Touche D. — A bibliography of Indian geology and physical geography, voll. 2. Calcutta, 1917, 1918. 8°. pp. I-XXVII, 1-571; I-II, 1-490.

Legendre R. — Problèmes scientifiques d'alimentation en France pendant la guerre. Paris, 1919. 8°, pp. 1-159.

Lesne P. — Catalogue des Coléoptères de la region Malgache décrits ou mentionnés par L. Fairmaire (1849-1906). Paris, 1917-18. 8°, pp. I-IV, 1-180.

Lussana S. — Influenza della pressione sulla conducibilità calorifica ed elettrica dei metalli e la legge di Wiedemann-Franz. (Estr. dal « Nuovo Cimento », vol. XV, pp. 129-170). Pisa, 1918. 8°.

Marie R. — Catalogue des Coléoptères de la region Malgache décrits ou men-

tionnés par L. Fairmaire (1849-1906). Paris, 1917-18. 8°, pp. I-IV, 1-180.

Mazzocchi-Alemanni N. — L'agricoltura nella politica coloniale. Tripoli, 1919. 8°, pp. 1-52.

Pession G. — Il sistema di radiotelegrafia Poulsen (Estr. dal giornale « l'Elettrotecnica », 1919, n. 7). Milano, 1919. 4°, pp. 1-11.

Petrovitch M. — Les spectres numériques. Paris, 1919. 8°, pp. I-VIII, 1-110.

Peyronel B. — Sul nerume o marciume nero delle castagne (Estr. da « Le Stazioni sperimentali agrarie italiane », vol. LII, pp. 21-41). Modena, 1919. 8°.

Picard E. — Conférence interalliée des Académies scientifiques tenue a Paris du 26 au 29 novembre 1918. Paris, 1918. 4°, pp. 1-17.

Picard E. — Oeuvres de Charles Hermite; tomo IV.* Paris, 1917. 8°, pp. I-VI, 1-593.

Relazione sul servizio sanitario svolto dall'Associazione dei Cavalieri Italiani del Sovrano Ordine Militare di Malta durante la Campagna nazionale 1916-1918. Roma, 1919. 4°, pag. 1-58.

Ronchetti V. — Terapia dell'influenza (Estr. dal « Pensiero medico »). Milano, 1919. 8°, pp. 1-26.

Tognoli E. — Osservazioni botaniche e sperimentali intorno alla *Digitalis lanata* Ehrh. (Estr. dagli « Atti del R. Istituto veneto di scienze, lettere ed arti », tomo LXXVIII, pp. 201-218). Venezia, 1919. 8°.

Traverso G. B. — La « lebbra » ed il « vaiuolo » del Sommacco; due malattie nuove per l'Italia (Estr. da « Le Stazioni sperimentali agrarie italiane », vol. LII, pp. 213-225). Modena, 1919. 8°.

Treballs de la Societat de biologia; any 1918. Barcelona, 1918. 8°, pp. 1-352.

Usai G. — Sopra un'equazione integrale (Estr. dal « Giornale di matematiche di Battaglini », vol. LVI). Napoli, 1918. 4°, pp. 1-7.

Usai G. — Sulle variazioni di un integrale doppio con le derivate quarte (Estr. dei « Rendiconti del R. Istituto lombardo di scienze e lettere », vol. LII, pp. 115-134). Milano, 1919. 8°.

Usai G. — Una generalizzazione della lemniscata di Bernoulli (Estr. dal « Giornale di matematiche di Battaglini », vol. LVI). Napoli, 1918. 4°, pp. 1-16.

Ventosa V. — Reflexiones acerca de la resolución de las ecuaciones algébricas numéricas por el método de Gräffe. Madrid, 1919. 8°, pp. 1-23.

Vallauri G. — Ricevitori radiotelegrafici della R. Marina (Estr. dal giornale « l'Elettrotecnica », 1919, n. 13). Milano, 1919. 4°, pp. 1-7.

PERSONALE ACCADEMICO

PRESENTAZIONE DI LIBRI

COMUNICAZIONI VARIE

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Sedute del 2 novembre 1919.

MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

RELAZIONI DI COMMISSIONI

(*Segue in terza pagina*)

E. Mancini *Segretario d'ufficio responsabile*.

(*) Questi lavori saranno pubblicati nei volumi delle *Memorie*.

Pubblicazione bimensile. N. 10.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 30 novembre 1919.

Volume XXVIII.° — Fascicolo 10°

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 9 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a pagine 4 $^1/_2$.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 30 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta a stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 50 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 30 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 30 novembre 1919.

F. D'Ovidio, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica. — *Sulla teoria elettronica delle forze elettromagnetiche.* Nota del Socio Augusto Righi.

La presente ha lo scopo di rettificare un'asserzione inesatta contenuta in una Nota, avente il medesimo titolo, presentata a questa Accademia nella seduta del 1° giugno, giunta però a mia conoscenza da poco, perchè il relativo fascicolo è stato pubblicato insieme col fascicolo successivo soltanto a metà novembre. Di questa rettifica non vi sarebbe gran bisogno, se non accadesse, che una Nota pubblicata in Atti accademici fosse letta anche da dotti, che professano scienze differenti da quella a cui ha attinenza. Infatti, chi è in grado di rendersi esatto conto della maniera, nella quale sono giunto alla mia formola finale, comprende subito, che essa *non può* essere in contraddizione colla legge della forza elettromagnetica, e quindi coi fatti che con questa legge vanno d'accordo. Ed in vero questa è per così dire implicitamente contenuta nelle premesse da cui ho preso le mosse, essendosi adottata l'espressione Heu per la forza agente sopra una carica e animata da una velocità u diretta perpendicolarmente alla direzione del campo magnetico H in cui il movimento ha luogo; e questa è l'espressione che si deduce dalla nota legge della forza elettromagnetica. È quindi tanto più singolare l'asserzione: *Che non basta in genere* (la mia teoria) *a spiegare ogni azione meccanica esercitata da un campo magnetico su di un circuito per-*

corso da corrente..... (veggasi a pag. 388 la citata Nota). Ciò non di meno quel calcolo, nel quale si è adottato quel grado di approssimazione da tutti riconosciuto accettabile in simile questione, non doveva essere omesso, non solo perchè l'espressione H*eu* può essere stabilita anche per altra via, come ha dimostrato il Larmor (1), ma anche perchè serve a mettere in piena evidenza l'ipotetico meccanismo dei fenomeni.

Per lo scopo in vista giudico necessario di richiamare dapprima come la mia teoria abbia avuto origine.

Alcune esperienze mi condussero incidentalmente a realizzare le così dette *rotazioni ionomagnetiche* (2), cioè certi moti di rotazione intorno ad assi paralleli alla direzione del campo magnetico, che assumono corpi mobili introdotti in un gas ionizzato esposto all'azione del magnetismo, od anche lo stesso recipiente contenente il gas, se dotato della necessaria mobilità. La spiegazione di questi fenomeni, di cui riuscii a dare una elementare teoria (3), può riassumersi nel modo seguente.

I ioni contenuti in un gas (e gli elettroni, se ve ne sono) esercitano per proprio conto (come dal canto loro le molecole neutre) delle pressioni, causate dai loro urti. L'effetto risultante di esse, sia sulla superficie di un corpo immerso nel gas, sia sulla intera parete del recipiente, è nullo, come lo è quello degli urti delle molecole; ma non è più così per gli urti degli elettroni e dei ioni, quando agisca un campo magnetico. Supposto per semplicità che il campo sia uniforme, le traiettorie percorse fra due successive collisioni non sono più segmenti di rette, ma invece archi di eliche; ed ho potuto dimostrare, che l'effetto complessivo degli urti non è più nullo, ma equivale a quello di una coppia ad asse parallelo alla direzione del campo.

Una speciale esperienza dimostrativa (4) permette di far vedere, non solo che si produce la rotazione del recipiente contenente il gas rarefatto e ionizzato, ma ancora, se il gas è percorso da una corrente, che lo spostamento risulta identico in grandezza e direzione a quello che si otterrebbe, quando al gas venisse sostituito un metallo di egual forma e percorso dalla stessa corrente. In altre parole, l'effetto risultante degli urti dei ioni e degli elettroni nel caso del gas è precisamente quello stesso che nel caso del metallo viene attribuito alla forza elettromagnetica agente a distanza.

Questa esperienza è una delle tante, che si possono improvvisare sostituendo dei tubi da scarica ai conduttori mobili negli usuali apparecchi di Ampère e di altri, adoperati per le dimostrazioni delle forze elettromagne-

(1) Vedi alla pag. 396 il recente volume: *I fenomeni elettroatomici sotto l'azione del magnetismo*: Bologna, Zanichelli ed.

(2) Volume citato, pag. 261.

(3) Ibidem, appendice D, pag. 384.

(4) Veggasi a pag. 315 del libro citato.

tiche ed elettrodinamiche. Ma intanto le numerosissime mie esperienze avevano messo fuori di dubbio, che i movimenti dei tubi sono dovuti agli urti delle particelle elettrizzate sulle pareti.

Giunto a questo punto sorse naturalmente in me l'idea, che l'identità di comportamento fra le due specie di conduttori fosse la manifestazione di una profonda analogia nel meccanismo dei fenomeni. Come è noto si suppone oggi omai da tutti, che entro un metallo esistano sempre elettroni liberi (e certuni ammettono anche l'esistenza di particelle positive), dotati di rapidi moti senza direzioni preferite simili a quelli delle molecole in una massa gassosa. Una forza elettromotrice imprimerà agli elettroni una componente di velocità in una determinata direzione, cosicchè nel loro complesso essi costuiranno allora col loro spostamento una corrente elettrica, precisamente come accadde nel caso di un elettrolito posto fra due elettrodi. Un campo magnetico di qualsiasi causa modificherà le traiettorie e quindi la distribuzione delle pressioni dovute agli urti degli elettroni, come restano modificate le traiettorie e le pressioni dei ioni in un gas rarefatto.

Ed ora diviene chiaro qual sia l'errore, che ha dato origine alla strana obbiezione affacciata nella citata Nota del 1° giugno. Chi l'ha redatta pretende, che la notissima esperienza della così detta ruota di Barlow non si possa spiegare colla mia teoria (ad onta della considerazione svolta in principio della presente Nota che gli è evidentemente sfuggita); e ciò in causa dell'aver preso troppo alla lettera l'analogia, che ha condotto alla nuova teoria medesima. L'A. ha ingenuamente creduto di poter considerare un metallo come un recipiente pieno di elettroni ed avente per parete la sua superficie esterna. Il disco di Barlow diventa allora l'analogo di una scatola cilindrica contenente un gas ionizzato, la quale, supposta mobile intorno al proprio asse situato parallelamente al campo, non può naturalmente essere messa in moto dagli urti. Basterà però che legga le prime linee della pag. 320 del mio libro per rendersi conto del proprio errore; ed allora comprenderà forse, che un elettrone dovrà generalmente urtare le molecole del metallo, *le quali debbono essere considerate come facenti la parte di parete, in quanto esse limitano lo spazio entro il quale gli elettroni possono muoversi liberamente.* Quanto poi agli elettroni, che tenderebbero ad uscire dalla massa metallica, è chiaro che il mancato urto compensa la reazione elettrostatica, la quale si oppone alla uscita medesima.

Anche il fenomeno, che è l'analogo di quello della ruota di Barlow nel caso del gas, cioè la rotazione della massa gassosa compresa fra elettrodi cilindrici coassiali paralleli al campo, non si potrebbe spiegare, se non si prendessero in considerazione gli urti sulle molecole del gas, le quali limitano esse pure lo spazio lasciato libero agli ioni, e perciò devono essere considerati come parti di parete.

Matematica. — *Un principio di riduzione nello studio delle corrispondenze algebriche.* Nota del Socio Corrado Segre.

1. Il principio di cui intendo far cenno è già stato usato in qualche caso particolare; e si presenta oltremodo spontaneo.

Per maggior chiarezza esporrò anzitutto alcuni esempî.

Si abbia una corrispondenza (2 , 2) fra due campi binari, rappresentata da un'equazione $f(x\,;y)=0$, omogenea e quadratica tanto nella coppia di variabili $x_1\,x_2$, quanto nelle $y_1\,y_2$. Ponendo

$$(1)\qquad X_0=x_1^2\ ,\ X_1=x_1\,x_2\ ,\ X_2=x_2^2\,,$$

$$(2)\qquad Y_0=y_1^2\ ,\ Y_1=y_1\,y_2\ ,\ Y_2=y_2^2\,,$$

quell'equazione si ridurrà ad un'equazione *bilineare* $F(X\,;Y)=0$ tra le X_i e le Y_k. D'altra parte, assumendo queste due terne di quantità come coordinate di punti su due piani (distinti o no), le (1) e (2) servono a rappresentare i due campi binari sui punti X, Y di due coniche. La $F=0$ pone una reciprocità fra i piani di queste curve. E la data corrispondenza (2 , 2) risulta rappresentata da quella che intercede fra quei punti delle due coniche, i quali son reciproci in quella reciprocità.

Così l'ente « corrispondenza (2 , 2) fra campi binari » si muta in quest'altro: « reciprocità fra due piani, su cui son fissate due coniche » ([1]).

Ciò porta subito a considerare, per esempio, il discriminante della reciprocità. Esso sarà un invariante della corrispondenza (2 , 2). Il suo annullarsi significa che la reciprocità degenera in una projettività tra due fasci di rette. Ora questi fasci segano, rispettivamente, sulle due coniche, due involuzioni. La corrispondenza (2 , 2) si riduce dunque, se quell'invariante è zero, a una projettività fra due involuzioni dei due campi binari ([2]).

2. Si tratti ora di studiare le corrispondenze trilineari fra due forme di 1ª specie ed una forma S, che possiamo supporre di 1ª, od anche di 2ª, 3ª,... specie. Se nelle prime due forme le coordinate omogenee sono $x_1\,x_2$ e $y_1\,y_2$, esse compaiono nell'equazione trilineare per mezzo dei monomii

$$(3)\qquad X_1=x_1\,y_1\ ,\ X_2=x_2\,y_2\ ,\ X_3=x_1\,y_2\ ,\ X_4=x_2\,y_1\,.$$

([1]) Dal n. 6 risulterà anche, nel caso ordinario, la rappresentazione col sistema di due coniche di un piano.

([2]) Cfr. A. Capelli, *Sopra la corrispondenza* (2 , 2) ecc., Giorn. di mat., *17* 1879, pag. 69. Alla pag. 95 si trova il suddetto invariante.

Perciò l'equazione si riduce a forma *bilineare* nelle X_i e nelle coordinate dell'elemento z di S.

Per le (3), si posson riguardare le X_i come coordinate di un punto su una quadrica fissa Q: quadrica che rappresenta coi suoi punti le coppie di elementi delle prime due forme geometriche (essendo queste forme riferite ai due regoli di Q, ecc.). L'equazione data si è ridotta, nelle variabili X_i, all'equazione di un piano, dipendente linearmente da z: e quindi variabile in un fascio, o in una stella, o in tutto lo spazio. A questo sistema lineare di piani è riferita la forma S. Le terne della trilinearità son figurate da punti di Q, presi con piani passanti per essi del fascio, stella, o spazio.

Si riconoscon subito su questa rappresentazione tutte le proprietà note della corrispondenza trilineare tra forme di 1ª specie. Così le coppie neutre delle prime due forme son date dai punti di Q situati sull'asse del fascio di piani; ecc. ecc.

3. Similmente una corrispondenza quadrilineare tra 4 forme di 1ª specie, di elementi $x\ y\ z\ t$, ha un'equazione che, poste le (3) e le analoghe

$$(4) \qquad Y_1 = z_1 t_1\ ,\quad Y_2 = z_2 t_2\ ,\quad Y_3 = z_1 t_2\ ,\quad Y_4 = z_2 t_1\ ,$$

si riduce ad un'equazione *bilineare* fra X e Y. Si ha dunque una reciprocità fra gli spazî delle due quadriche Q, Q', luoghi dei punti X, Y; e le quaderne della corrispondenza quadrilineare son rappresentate dalle coppie di punti di Q, Q' reciproci in quella reciprocità.

Questa rappresentazione (con un'altra che ne deriva, analoga a quella del n. 6) si trova svolta ed applicata in una mia Memoria, in corso di stampa negli Annali di Matematica, *Sulle corrispondenze quadrilineari tra forme di 1ª specie*, ecc.

4. Generalizziamo alquanto la rappresentazione del n. 1.

Si abbia cioè fra i due campi binari una corrispondenza (m, n) di gradi qualunque. Si tradurrà in un'equazione $f(x\,;y) = 0$, che si può porre sotto forma d'una relazione bilineare $F(X\,;Y) = 0$ tra le due serie di quantità

$$(5) \qquad X_i = x_1^{m-i}\, x_2^i \qquad (i = 0\,,1\,,\dots m)$$

$$(6) \qquad Y_k = y_1^{n-k}\, y_2^k \qquad (k = 0\,,1\,,\dots n)$$

Possiamo considerare queste come le coordinate dei punti di due curve razionali normali, C^m di S_m, C^n di S_n. L'equazione $F = 0$ pone, fra i due spazi S_m, S_n una *reciprocità*, nel senso più generale della parola: ossia una corrispondenza, che è una reciprocità ordinaria, se $m = n$; mentre se, ad esempio, $m > n$, essa equivale ad un'ordinaria reciprocità fra S_n e la forma fondamentale di specie n costituita dagli spazi che, entro S_m, passano per un $[m - n - 1]$.

La corrispondenza (m, n) è rappresentata da quella che ha luogo fra punti X, Y di C^m, C^n, i quali son *reciproci* nella F: cioè tali, anche se $m > n$, che X sta nell'iperpiano di S_m corrispondente ad Y nella reciprocità.

Si abbracciano tutti i casi possibili, anche di reciprocità degeneri, ammettendo l'esistenza in S_m, S_n, rispettivamente, di due spazi *singolari* $[m - r - 1]$, $[n - r - 1]$, per la reciprocità F: sicchè questa si riduce ad un'ordinaria reciprocità, non degenere, tra le forme fondamentali composte degli spazi passanti per quei due. Allora, projettando da quegli spazi singolari, e segando con due S_r di S_m, S_n, avremo in questi S_r due curve razionali (in generale d'ordini m, n), e fra gli spazi stessi una reciprocità non degenere, la quale servirà a definire fra i punti delle due curve la corrispondenza (m, n).

5. Il numero r, ora introdotto, si ottiene dalla data corrispondenza nel seguente modo. Posto

$$f(x\,;y) \equiv \Sigma a_{ik}\, x_1^i\, x_2^{m-i}\, y_1^k\, y_2^{n-k},$$

$r + 1$ indica il rango, o caratteristica, della matrice $|a_{ik}|$. Le forme d'ordine m delle x, che in f moltiplicano i singoli monomi nelle y, saranno combinazioni lineari di $r + 1$ forme, e non meno; e così pure le analoghe forme d'ordine n delle y. Ciò equivale a dire che f si può rappresentare come somma di $r + 1$ prodotti (e non meno) di una forma delle x per una forma delle y:

$$f(x\,;y) \equiv \varphi_0(x)\,\psi_0(y) + \cdots + \varphi_r(x)\,\psi_r(y). \tag{7}$$

La corrispondenza (m, n) associa, ai singoli elementi di un campo binario, ∞^1 gruppi G_m o G_n dell'altro campo: i quali staranno precisamente in un'involuzione ∞^r, g_m^r o g_n^r, e non in una di dimensione minore di r. È questo un significato geometrico del carattere r della corrispondenza.

Se ora assumiamo

$$X_l = \varphi_l(x) \quad , \quad Y_l = \psi_l(y) \qquad (l = 0, 1, \ldots r), \tag{8}$$

i punti X, Y descriveranno in due S_r due curve razionali (eventualmente multiple) di ordini m, n (supposto che la f non sia divisibile per una forma delle sole x, nè per una delle y). La nostra corrispondenza $f(x\,;y) = 0$ sarà, per la (7), rappresentata su quelle curve dalla relazione

$$\Sigma X_l Y_l = 0, \tag{9}$$

che pone fra i due S_r una reciprocità non degenere: come s'era ottenuto alla fine del n. 4.

6. Ma potremo anche trarre dalle ultime formole un'altra rappresentazione.

Interpretiamo cioè le X_i come coordinate di punto, e le Y_i come coordinate d'iperpiano, in uno stesso S_r, rispetto ad uno stesso sistema di riferimento; sicchè la (9) sarà la condizione d'incidenza del punto X e dell'iperpiano Y. Allora, per le (8), X descrive una curva razionale C^m d'ordine m, *immersa* in S_r; e l'iperpiano Y una ∞^1 razionale d'iperpiani Γ^n, di classe n, non conica, e però costituita dagl'iperpiani osculatori di una curva razionale immersa in S_r. Su queste due varietà, C e Γ, son rappresentati i due campi binari $(x), (y)$, fra cui si aveva la corrispondenza (m, n). E la corrispondenza stessa diventa quella che intercede fra punti di C^m e iperpiani di Γ^n che si appartengono.

Se la medesima corrispondenza (m, n) viene rappresentata nello stesso modo con un'altra curva-luogo C_1^m e una inviluppo Γ_1^n, di un S_r, esisterà una collineazione fra i due S_r, che muta simultaneamente C e Γ in C_1 e Γ_1. Infatti, essendo il campo binario (x) riferito tanto a C quanto a C_1, e così il campo (y) a Γ e a Γ_1, si ha tra C e C_1 una corrispondenza biunivoca tale (per l'ipotesi) che ai gruppi G_m, segati su C dagli iperpiani di Γ, rispondono i gruppi G_m segati su C_1 dagli iperpiani di Γ_1. Per conseguenza, alla g_m^r di C, che congiunge tutti i primi G_m (n. 5), corrisponde la G_m^r di C_1 che congiunge i G_m considerati di questa. Ossia: alle sezioni iperpiane di C rispondono le sezioni iperpiane di C_1; la corrispondenza biunivoca fra i punti di C e C_1 è contenuta in una collineazione, la quale evidentemente farà anche corrispondere tra loro Γ e Γ_1.

Da quest'osservazione deriva facilmente che: la geometria projettiva (teoria invariantiva) delle corrispondenze (m, n) fra due campi binari distinti (cioè soggetti a sostituzioni lineari indipendenti) equivale alla geometria projettiva di due curve razionali, l'una d'ordine m, l'altra di classe n, di uno stesso spazio S_r: ove r è quello dei due numeri m, n che non supera l'altro; o, più in generale, $r+1$ indica il rango della matrice dei coefficienti delle corrispondenze; ossia r è la dimensione della serie lineare (involuzione) che congiunge i gruppi di elementi dell'un campo binario corrispondenti ai singoli elementi dell'altro campo [1].

7. Infine passiamo al caso più generale: che si abbia una corrispondenza (o connesso) fra due o più campi, di qualsiansi dimensioni, rappre-

[1] La rappresentazione ora considerata (n. 6), e quest'ultimo teorema, sono stati enunciati — sotto una forma che qui si è completata — da G. Kohn, *U. eine geometrische Deutung der Invarianten doppelt binären Formen*, Jahresb. Deutsch. Math. Vereinigung, *5*, 1896, p. 58 [Cfr. anche l'applicazione alle corrispondenze (3, 3) e cubiche sghembe in Math. Ann., *52*, 1899, p. 293].

Come verifica dell'ultimo teorema, si può notare che il numero degl'invarianti assoluti indipendenti delle corrispondenze (m, n) di carattere r è uguale a quello degl'invarianti assoluti che ha, entro S_r, il sistema di due curve razionali, una d'ordine m, l'altra di classe n. Ambi i numeri valgono $(r+1)(m+n) - r^2 - 6$.

sentata da un'equazione algebrica

$$f(x_1\, x_2 \dots ;\, y_1\, y_2 \dots ;\, z_1\, z_2 \dots ;\, \dots) = 0 \tag{10}$$

dei gradi $m, n, p \dots$ rispettivamente nei diversi gruppi di coordinate omogenee.

Si potrà allora ricorrere alla varietà, i cui punti han per coordinate i varî monomi di grado m nelle x; e alle analoghe per le $y, z, \dots$ Con ciò la (10) si ridurrà ad un'equazione plurilineare fra i punti di quelle varietà, e quindi ad una corrispondenza plurilineare tra i loro spazi. — Oppure si prenderanno insieme due o più elementi $x, y, \dots$ considerando la varietà dei punti le cui coordinate si esprimono colle forme di grado m nelle x e di grado n nelle $y, \dots$; e similmente la varietà rappresentata in modo analogo coi rimanenti elementi, o con una parte di essi; proseguendo ulteriormente, se ancora rimangono elementi. Si otterrà così dalla (10) una relazione bilineare; od anche plurilineare, ma fra un numero di campi ristretto quanto si vuole. La teoria delle reciprocità, e, in genere, delle corrispondenze plurilineari, troverà applicazioni. *Si verrà a fare una specie di riduzione: delle corrispondenze, di gradi qualunque, fra un certo numero di campi, in corrispondenze* **plurilineari**, *fra un numero di campi minore od uguale a quello.*

Così, in particolare, le corrispondenze plurilineari si ridurranno a corrispondenze plurilineari fra un minor numero di campi, introducendo le note varietà che rappresentano le coppie, terne, ... di punti di due, tre ... spazî.

8. Vi saranno da considerare dei caratteri come la r del n. 5. Si scindano cioè, comunque, gli spazî tra cui si ha la corrispondenza, in due gruppi. I punti di un gruppo siano $x, y, \dots$; quelli dell'altro $t, u \dots$ Un carattere del connesso sarà il minimo numero r tale che f si possa scrivere come somma di $r+1$ prodotti di una forma delle coordinate $x, y, \dots$ per una forma delle $t, u, \dots$ Similmente, spezzando i campi in 3, o più gruppi. Il significato geometrico di questi caratteri è analogo a quello indicato al n. 5, pel caso che là si considerava.

Se si fa la riduzione ad un legame *bilineare*, si può anche, come al n. 6 o come nella mia Memoria citata al n. 3, dare a quel legame il significato di *incidenza* fra punti e iperpiani di un S_r. Così si otterranno rappresentazioni della corrispondenza (10) simili a quelle ora citate per le corrispondenze (m, n), e per quelle quadrilineari, fra campi binari.

Fisica. — *Sulla gravitazione.* Nota III del Corrisp. Q. MAJORANA.

Considerazioni analitiche. — Cercherò ora di stabilire teoricamente la misura del fenomeno dell'assorbimento gravitazionale, partendo dai criterî qualitativi derivanti dalle ipotesi precedentemente fatte. Vedremo così, come si possano ricavare gli elementi necessarî per realizzare un'esperienza di controllo, di parte delle ipotesi stesse. Fissiamo anzitutto le condizioni generali del problema. Occorre esprimere analiticamente il presunto fatto fisico dell'assorbimento, partendo da una modificazione della legge di Newton, tale che la forza agente fra due punti materiali, pur manifestandosi sempre sulla congiungente dei due punti stessi, sia, al crescere della distanza di questi, sempre più piccola di quanto vorrebbe quella legge. Ciò, beninteso, se i due punti si trovano immersi in un mezzo materiale di densità diversa da zero e costante. Ammetterò, inoltre, che a traverso una piccola distanza, lo smorzamento della forza gravitazionale sia proporzionale alla densità del mezzo. Se poi la densità del mezzo fosse variabile, o subisse delle discontinuità, il problema si complica ancora più, e per ora non è mia intenzione di affrontarne la trattazione generale. D'altronde, dato lo scopo di questo studio, a me occorre soltanto una guida, anche grossolanamente approssimata, per poter realizzare le esperienze di cui dirò in seguito. La legge di smorzamento, da sovrapporre a quella di Newton, può essere data da un fattore esponenziale, come ora farò vedere.

Primo metodo di calcolo. — Un primo metodo, relativamente semplice ma poco preciso, col quale si può trattare il problema, è il seguente: Sia una sfera materiale piena, di raggio R, e di *densità vera costante* ϑ_v. Essa eserciterebbe, secondo la legge di Newton, un'azione su un punto materiale esterno, proporzionale direttamente alla sua massa, ed inversamente al quadrato della distanza del suo centro da quel punto. La sua massa, secondo le cognizioni solite, è ciò che ora possiamo chiamare *massa vera*.

$$M_v = \frac{4}{3} \pi R^3 \vartheta_v . \tag{1}$$

Immaginiamo suddivisa tale sfera in infiniti strati sferici concentrici, di spessore dr, e diciamo r il raggio di uno qualunque di essi; r sarà variabile fra O ed R. La massa vera di uno strato qualsiasi, sarà data da

$$dM_v = 4\pi r^2 \vartheta_v dr$$

e la sua azione su di un punto esterno equivale, secondo la legge di Newton,

a quella di una massa di egual valore, collocata nel centro della sfera. Facciamo ora intervenire l'ipotesi dello smorzamento: vogliamo supporre che lo strato esterno, non avendo su di sè altra materia, agisca ancora con tutto il valore della sua massa vera, sui punti materiali esterni, e cioè con $4\pi R^2 \vartheta_v dr$; ma che, man mano che si considerino strati di raggio sempre più piccolo, sino ad arrivare al centro, l'azione gravitazionale vada sempre più smorzandosi, come se il valore della densità vera andasse decrescendo. E cioè, per il raggio r, lo strato avrebbe una massa apparente:

$$dM_a = 4\pi r^2 \vartheta_v e^{-H(R-r)} dr , \tag{2}$$

dove H è un fattore di proporzionalità o di smorzamento.

Questa espressione soddisfa alla condizione al limite, per $R = r$, dello smorzamento nullo, e dà uno smorzamento massimo al centro. Si osserva però che, così scritta, l'equazione (2) non risponde con esattezza alle condizioni enunciate in principio. Infatti, se si considera un punto esterno soggetto all'azione dello strato superficiale della sfera, secondo quelle condizioni, dovrebbe l'azione della parte dello strato prospiciente al punto, non subire smorzamento alcuno; mentre gli elementi della parte opposta (*vedendo* il punto esterno alla sfera, solo a traverso spessori di questa, variabili da 0 a 2R) subirebbero smorzamento nella loro azione; la differenza di smorzamento esiste poi anche fra i punti di qualsiasi altro strato interno. Ma, ciò non per tanto, ho scritto la (2); per cui effettivamente H non rappresenta una costante, ma una funzione tanto di r, quanto della distanza del punto esterno considerato dal centro della sfera.

Prescindo da tali considerazioni e supponendo, per semplicità di calcolo, H costante, si ha, integrando la (2),

$$M_a = 4\pi \vartheta_v \int_0^R r^2 e^{-H(R-r)} dr = \frac{8\pi \vartheta_v}{H^3} \left(\frac{H^2 R^2}{2} - HR - e^{-HR} + 1 \right).$$

Chiamando con p il prodotto HR, si ha anche

$$M_a = 8\pi \vartheta_v R^3 \left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} - \frac{1}{p^3 e^p} \right). \tag{3}$$

Il quale risultato ci può esprimere la definita massa apparente della sfera, dentro i limiti di approssimazione risultanti dalla supposta, e certamente non vera, costanza di H al variare di r.

Dicendo

$$\Phi = 6 \left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} - \frac{1}{p^3 e^p} \right), \tag{4}$$

si ha, per la (3),

$$M_a = \frac{4}{3} \pi \vartheta_v R^3 \Phi = M_v \Phi . \tag{5}$$

Cioè, occorre moltiplicare la massa vera per Φ, per avere la massa apparente. È facile di vedere che il limite, per $p = 0$, ossia per un raggio della sfera piccolissimo, o per un coefficiente di smorzamento H nullo, è uguale ad 1, cioè

$$\lim_{p=0} \Phi = 1 .$$

Nella fig. 1 si è costruita la curva Φ, che rappresenta il variare di questa funzione, i valori della quale sono riportati come ordinate; quelli di p sono ascisse. Quella curva parte dal valore 1, e poi, abbassandosi, diventa assintotica all'asse delle p.

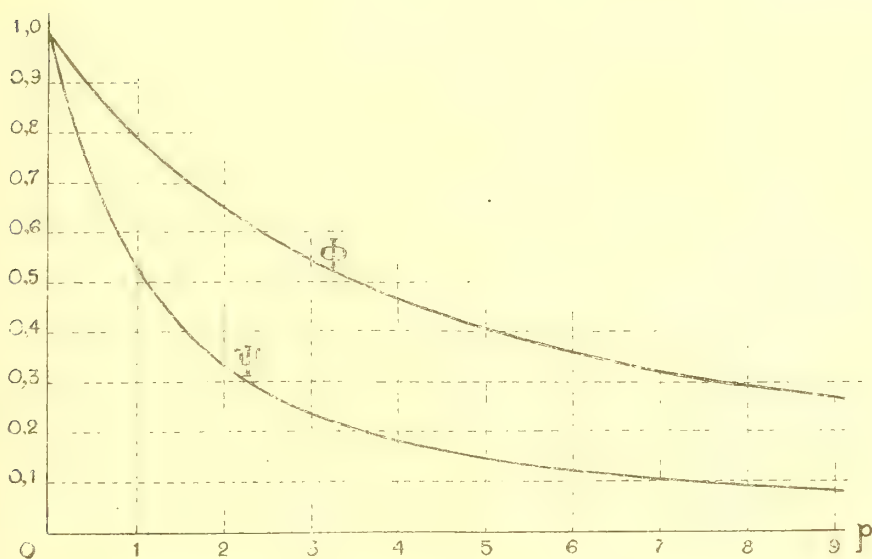



Fig. 1.

Introducendo il concetto di densità apparente ϑ_a, si ha evidentemente la relazione

$$M_a = \frac{4}{3} \pi \vartheta_a R^3 . \tag{6}$$

Per cui, confrontando (5) con (6), si ha

$$\vartheta_v = \frac{\vartheta_a}{\Phi} \quad ; \quad \vartheta_a = \vartheta_v \Phi \quad ; \quad \Phi = \frac{\vartheta_a}{\vartheta_v} . \tag{7}$$

Passiamo ora ad una applicazione di questo risultato. Come ho già detto, il caso della maggiore agglomerazione di materia, da noi ancora studiabile

è quello del sole. La ipotesi che il calore solare possa, in buona misura, essere generato da assorbimento gravitazionale, porterebbe alla necessaria conseguenza di una notevole apparente diminuzione della massa vera del sole, e quindi ad un valore di M_a sensibilmente diverso da M_v. Ora, il caso del sole è, come forse quello di qualsiasi altro corpo celeste, assai più complesso di quello trattato analiticamente, giacchè la densità di quell'astro deve certamente variare dal centro alla superficie. Già dissi che, secondo varî autori, può quella densità mutare all'incirca da 30 al centro a 0 alla superficie, con una densità media di 1,41; questa cifra rappresenterebbe, secondo l'attuale ipotesi dello smorzamento, la densità media apparente, mentre la densità vera potrebbe essere assai maggiore, ed in ogni caso minore di quella dei corpi più pesanti conosciuti (circa 25). Per cui, tanto per fissare un ordine di grandezza, supponiamo che la densità vera del sole sia costante ed uguale a 10, mentre la densità apparente sia quella ammessa dagli astronomi, cioè 1,41. Si ha per le (7) il valore della funzione Φ:

$$\Phi = \frac{1.41}{10} = 0{,}141 = 6\left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} - \frac{1}{p^3 e^p}\right).$$

Per successive approssimazioni, si trova che il valore $p = 19{,}11$ soddisfa alla precedente relazione. Essendo il raggio della fotosfera solare uguale a $R_s = 6{,}95.10^{10}$ cm., si ha:

$$H = \frac{p}{R} = \frac{19.11}{6.95} 10^{-10} = 2.7.10^{-10}.$$

Si può introdurre ancora il concetto di smorzamento per unità di densità, supponendo che H varî proporzionalmente a ϑ_v. Il fattore corrispondente h sarebbe, nel caso numerico considerato ($\vartheta_v = 10$),

$$h = \frac{H}{\vartheta_v} = 2{,}7.10^{-11}.$$

L'ipotesi $\vartheta_v = 10$, se può avere un certo grado di probabilità, è del tutto arbitraria. Si possono dunque calcolare i valori di h, corrispondenti ad altri valori ipotetici della densità vera. Si ha, supponendo sempre costante la densità apparente $\vartheta_a = 1{,}41$, la tabella seguente:

ϑ_v =	1,41	2	5	10	15	20
$\Phi = \frac{\vartheta_a}{\vartheta_v}$ =	1	0,707	0,283	0,141	0,094	0,071
p =	0	1,55	8,35	19,11	29,75	40,38
$h = \frac{p}{\vartheta_v R_s}$ =	0	$1{,}11.10^{-11}$	$2{,}40.10^{-11}$	$2{,}75.10^{-11}$	$2{,}85.10^{-11}$	$2{,}90.10^{-11}$

Così, per una variazione della densità vera da 2 a 20, il coefficiente di smorzamento h, rimane sempre dell'ordine di grandezza di circa 10^{-11}. Si vede dunque che basta supporre una densità vera del sole, anche di poco superiore all'apparente 1,41, perchè rimanga fissato l'ordine di grandezza della *costante universale di smorzamento h*. Questo risultato costituisce una guida sicura, in una ricerca sperimentale di controllo delle fatte ipotesi, come farò in seguito vedere.

Matematica. — *Invarianti e covarianti metrici nelle deformazioni di specie superiore delle superficie.* Nota II di E. BOMPIANI, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

1. Facendo seguito alla Nota precedente dallo stesso titolo [1], chiamiamo, per estensione della curvatura di Gauss, *invarianti e covarianti gaussiani* di una deformazione di specie $\nu-1$ quelli trovati nel teorema fondamentale (n. 6), cioè il sistema delle spinte eseguite sulla forma simbolica L_ν (il cui quadrato serve a caratterizzare le deformazioni di specie ν) e l'insieme dei covarianti e degli invarianti ottenuti operando sulle spinte stesse.

Dal teorema fondamentale deriva subito il corollario:

Gli invarianti e i covarianti (simbolici o effettivi), che si ottengono operando sul sistema di forme $L_1, L_2, \dots, L_{\nu-1}$ *e sui covarianti gaussiani, sono invarianti o covarianti nelle deformazioni di specie* $\nu-1$; il che è evidente, perchè i termini di essi che contengono derivate di ordine ν sono introdotti soltanto per effetto dei covarianti gaussiani, e i coefficienti di questi, appunto per il teorema fondamentale, non mutano per deformazioni di specie $\nu-1$.

2. Per fare un'applicazione, cerchiamo gli invarianti in una deformazione di 2ª specie.

Si ha un solo covariante gaussiano (2ª spinta su L_3)

$$(L_{30}L_{12}-L_{21}^2)\,du_1^2+(L_{30}L_{03}-L_{21}L_{12})\,du_1\,du_2+(L_{21}L_{03}-L_{12}^2)\,du_2^2\,;$$

quindi l'invariante gaussiano (relativo) (2ª spinta del precedente)

$$(L_{30}L_{03}-L_{21}L_{12})^2-4(L_{30}L_{12}-L_{21}^2)(L_{21}L_{03}-L_{12}^2)$$

mentre dalle forme L_1^2 e L_2 si hanno gli invarianti relativi (comuni alle applicabilità)

$$EG-F^2\ ,\ L_{20}L_{02}-L_{11}^2\,.$$

[1] Questi Rendiconti, fasc. prec. (2 novembre 1919).

Eseguendo poi le spinte fra il covariante gaussiano trovato e L_1^2 o L_2 (cioè, trattandosi qui di tre forme quadratiche, costruendo i loro invarianti simultanei), si hanno ancora gli invarianti relativi

$$EL_{02} - 2FL_{11} + GL_{20}$$
$$E(L_{21}L_{03} - L_{12}^2) - F(L_{30}L_{03} - L_{21}L_{12}) + G(L_{30}L_{12} - L_{21}^2)$$
$$L_{20}(L_{21}L_{03} - L_{12}^2) - L_{11}(L_{30}L_{03} - L_{21}L_{12}) + L_{02}(L_{30}L_{12} - L_{21}^2)$$

Il primo ed il terzo sono invarianti simbolici; se ne ottengono due effettivi facendo il quadrato di ciascuno di essi.

Dividendo i 6 invarianti ottenuti, ciascuno per una conveniente potenza di $EG - F^2$, si ottengono i *5 invarianti assoluti di una deformazione di 2ª specie* [1].

Per le deformazioni di 3ª specie mi limito a formare le spinte eseguite sulla forma simbolica L_4 che sono (a meno di coefficienti numerici)

$$\begin{aligned}&(L_{40}L_{22} - L_{31})\,du_1^4 + 2(L_{40}L_{13} - L_{31}L_{22})\,du_1^3 du_2 + \\ &+ [(L_{40}L_{04} - L_{31}L_{13}) + 3(L_{31}L_{13} - L_{22}^2)]\,du_1^2 du_2^2 + \\ &+ 2(L_{31}L_{04} - L_{22}L_{13})\,du_1 du_2^3 + (L_{22}L_{04} - L_{13})\,du_2^4 \quad (2^a \text{ spinta})\\ &L_{40}L_{04} - L_{31}L_{13} - 3(L_{31}L_{13} - L_{22}^2) \qquad (4^a \text{ spinta});\end{aligned}$$

si sono raggruppati i termini in modo da mostrare la loro invarianza nelle deformazioni di 3ª specie. L'invariante assoluto che si deduce da quello relativo scritto è l'analogo della curvatura di Gauss; per avere quelli che si sono chiamati invarianti e covarianti gaussiani, bisogna ancora operare sulla 2ª spinta.

3. Qual'è il significato dell'annullarsi identico degli invarianti e covarianti gaussiani? A questa domanda (che estende alle deformazioni di specie qualsiasi la ricerca delle superficie a curvatura nulla per le applicabilità) risponde il seguente teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una superficie sia applicabile di specie $\nu - 1$ *sopra una superficie di un* S_ρ, *essendo*

$$\rho\left(\leq \frac{(\nu-1)(\nu+2)}{2}\right)$$

la dimensione degli $S(\nu - 1)$*-osculatori generici della superficie data, è*

[1] Il prof. E. E. Levi, nella Memoria *Saggio sulla teoria delle superficie a due dimensioni immerse in un iperspazio* [Ann. R. Scuola Norm. Pisa, vol. X], studiando le superficie rispetto al gruppo dei movimenti, aveva già trovato gli invarianti di 2° ordine di un tal gruppo (che sono appunto 5). Essi sono, come si vede subito, invarianti per deformazioni di 2ª specie. La loro forma differisce però dalla nostra contenendo soltanto derivate seconde; per l'introduzione delle derivate terze era necessario procurarsi l'estensione del teorema di Gauss.

che si annullino identicamente tutti i covarianti (*in particolare l'invariante se* $\nu - 1$ *è dispari*) *costruiti con le spinte eseguite sulla sola* L_ν.

Intanto è chiaro che per la superficie deformata, giacente in S_ρ, sono nulle tutte le matrici che figurano nei coefficienti di L_ν (qualunque sia il sistema di linee coordinate sulla superficie), quindi anche le differenze $L_{hk} L_{lm} - L_{h-1,k+1} L_{l+1,m-1}$: e poichè queste non variano per deformazioni di specie $\nu - 1$, devono esser nulle pure per la superficie data, e quindi sono nulle le spinte $\omega^r(L_\nu, L_\nu)$ (r pari e $\leq \nu$). Viceversa, se queste sono identicamente nulle, cioè se sono nulli i loro coefficienti, si annullano tutte le differenze scritte (formate con prodotti delle L_{hk}).

Basta osservare che tanto quelle differenze quanto quei coefficienti sono in numero di $\frac{\nu(\nu-1)}{2}$ e che, se una stessa differenza figura in due coefficienti diversi, vi è accompagnata da fattori numerici differenti (perchè dipendenti da r); e in conseguenza di ciò il sistema di equazioni, ottenuto uguagliando a zero quei coefficienti, risulta a determinante $\neq 0$ [1].

Per $\nu = 2$ si hanno le superficie a curvatura nulla.

4. Il teorema precedente è affatto generale e nulla suppone sullo spazio d'immersione della superficie da deformare. Quando questo abbia dimensione $\rho + 1$ ovvero $\rho + 2$, si può caratterizzare facilmente la costruzione della superficie deformabile.

Cerchiamo le superficie di $S_{\rho+1}$ deformabili di specie $\nu - 1$ in una superficie di S_ρ [come prima, ρ è la dimensione dello $S(\nu - 1)$ osculatore generico alla superficie]. Per effetto della dimensione ambiente (e non della deformabilità) la superficie possiede, in generale, ν sistemi semplicemente infiniti di curve dotate della seguente proprietà: lo S_ν osculatore ad una di esse in un suo punto è contenuto nello $S(\nu - 1)$ osculatore alla superficie nel punto [2]. Può però accadere che questi ν sistemi vengano a coincidere in uno solo. Nel primo caso, assunte come linee coordinate sulla superficie quelle di due sistemi *distinti* fra i ν che possiede, le coordinate dei punti della superficie soddisfano a due equazioni a derivate parziali del tipo

$$\frac{\partial^\nu x_i}{\partial u_1^\nu} + \cdots = 0 \quad , \quad \frac{\partial^\nu x_i}{\partial u_2^\nu} + \cdots = 0$$

[1] Il lettore può verificarlo per le deformazioni di 3ª specie sulle espressioni delle spinte di L_4 date al n. 2.

[2] L'angustia dello spazio non mi concede di estendermi nella dimostrazione di questo fatto proiettivo, nè di quelli che seguono. Per il lettore cui siano famigliari i metodi della geometria proiettivo-differenziale, essi non presentano difficoltà; in quest'ordine d'idee può vedersi la mia Nota *Sullo spazio d'immersione di superficie possedenti dati sistemi di curve* [Ist. Lombardo, Rendic., vol. XLVII, pag. 177] e due Note attualmente in corso di stampa negli stessi Rendiconti. Le curve qui indicate appartengono alla famiglia delle *quasi-asintotiche*.

ove i punti stanno ad indicare termini lineari nelle derivate parziali linearmente indipendenti d'ordine $\leq \nu - 1$ (i coefficienti, funzioni di u_1, u_2, non dipendono dall'indice i della coordinata x_i). Con questa scelta risultano nulli tutti i determinanti estratti dalle matrici $L_{\nu 0}$, $L_{0\nu}$ (il che indicheremo brevemente scrivendo $L_{\nu 0} = L_{0\nu} = 0$) e quindi sono nulli tutti i prodotti nei quali entri $L_{\nu 0}$ o $L_{0\nu}$.

Notiamo ancora che, se la superficie data non sta in S_ρ (nel qual caso il problema posto non esiste), uno almeno dei punti derivati d'ordine del punto x, esclusi $\frac{\partial^\nu x}{\partial u_1^\nu}$ e $\frac{\partial^\nu x}{\partial u_2^\nu}$, è fuori dello $S(\nu - 1)$-osculatore in x; sia per es. $\frac{\partial^\nu x}{\partial u_1^{\nu-1} \partial u_2}$. Allora, per essere la superficie in $S_{\rho+1}$, dovranno ancora esser soddisfatte dai suoi punti equazioni lineari a derivate parziali del tipo

$$\frac{\partial^\nu x}{\partial u_1^h \partial u_2^k} = \alpha_{hk} \frac{\partial^\nu x}{\partial u_1^{\nu-1} \partial u_2} + \cdots \qquad (h + k = \nu)$$

(esclusi per h i valori 0, $\nu - 1$ e ν; e per k i valori 0, 1 e ν). I punti hanno lo stesso significato di prima; non è escluso che alcune (anche tutte le) α_{hk} siano nulle. Segue intanto di qua che $L_{hk} L_{lm} = \alpha_{hk} \alpha_{lm} L^2_{\nu-1,1}$; quindi, se è nullo $L^2_{\nu-1,1}$, sono nulli gli invarianti e covarianti gaussiani. Ma dall'annullarsi di $L_{\nu 0} L_{\nu-2,2} - L^2_{\nu-1,1} \equiv - L^2_{\nu-1,1}$ segue appunto $L^2_{\nu-1,1} = 0$: cioè, nel campo reale, che il punto $\frac{\partial^\nu x}{\partial u_1^{\nu-1} \partial u_2}$, e perciò tutta la superficie, contro l'ipotesi, sta in S_ρ.

Rimane dunque da vedere se esistano superficie della specie voluta fra quelle sulle quali tutti i sistemi di quasi-asintotiche considerate coincidono. In tal caso, assunto questo come sistema u_1 (cioè $u_2 = \text{cost.}$), debbono valere le equazioni a derivate parziali lineari ed omogenee

$$\frac{\partial^\nu x}{\partial u_1^\nu} + \cdots = 0 \, , \quad \frac{\partial^\nu x}{\partial u_1^{\nu-1} \partial u_2} + \cdots = 0 \, , \; \ldots \, , \quad \frac{\partial^\nu x}{\partial u_1 \partial u_2^{\nu-1}} + \cdots = 0 ;$$

quindi sono nulle (indipendentemente dalle condizioni di deformabilità) tutte le $L_{h,k}$, eccetto $L^2_{0\nu}$. Ma siccome $L^2_{0\nu}$ non può entrare nelle differenze del tipo $L_{hk} L_{lm} - L_{h-1,k+1} L_{l+1,m-1}$, queste sono tutte nulle; quindi ogni superficie di questo tipo soddisfa effettivamente al nostro problema.

L'interpretazione geometrica delle equazioni precedenti (sulla quale non sto a fermarmi) porta al risultato seguente:

Le sole superficie di $S_{\rho+1}$ *applicabili di specie* $\nu - 1$ *sopra una superficie di* S_ρ, *essendo* ρ *la dimensione dello spazio* $S(\nu - 1)$*-osculatore generico, sono quelle contenenti curve negli* $S_{\rho-\nu+1}$ *osculatori ad una curva.*

È poi chiaro che nella deformazione si conservano rigidi gli S_ρ osculatori alla curva ora nominata, e che la voluta deformazione si conseguisce

appunto mediante rotazioni infinitesime di questi S_ρ intorno agli $S_{\rho-1}$ osculatori. (Per $\varrho = \nu = 2$ si hanno le superficie di S_3 applicabili sul piano).

5. Cerchiamo ora le superficie di $S_{\rho+2}$ deformabili di specie $\nu - 1$ in superficie di $S_\rho \equiv S(\nu - 1)$-osculatore.

Bisogna anche qui, come nel caso precedente, distinguere le proprietà proiettive della superficie risultanti dalla dimensione ambiente $(\varrho + 2)$, dalle proprietà (proiettive e metriche) dipendenti dalle condizioni di deformabilità. Si trova così che le superficie in esame posseggono un doppio sistema di curve (permanente nella deformazione) dotato delle seguenti proprietà:

Gli S_h $(1 \leq h \leq \nu - 1)$-*osculatori alle curve di un sistema in* $\nu - h + 1$ *punti successivi di una curva dell'altro stanno in uno* $S(\nu - 1)$-*osculatore alla superficie.*

L'unica condizione, per la voluta deformabilità, che rimane ancora da considerare, è $L_{\nu 0} L_{0\nu} - L_{\nu-1,1} L_{1,\nu-1} = 0$; quindi, per le precedenti,

$$L_{\nu 0} L_{0\nu} = 0 .$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie di $S_{\rho+2}$ *sia deformabile di specie* $\nu - 1$ *in una superficie di* S_ρ, *essendo* ϱ *la dimensione dello* $S(\nu - 1)$-*osculatore generico alla superficie, è che* (*quando non appartenga al tipo già determinato nel n.* 4) *possegga un doppio sistema del tipo sopra specificato e che in ogni punto gli* $S_{\rho+1}$, *che dallo* S_ρ *ivi osculatore alla superficie proiettano gli* S_ν *ivi osculatori alle due curve del sistema che vi passano, siano fra loro ortogonali.*

Anche nel caso delle applicabilità $(\varrho = \nu = 2)$ si ha un risultato che credo nuovo: le superficie di S_4 applicabili sul piano, quando non siano sviluppabili, posseggono un doppio sistema coniugato (ordinario) tale che gli S_3, che dal piano tangente in un punto alla superficie proiettano i piani osculatori alle due curve del sistema che vi passano, sono fra loro ortogonali. L'esempio portato dal Killing [1] soddisfa appunto a questa condizione.

[1] Killing, *Die Nichteuklidischen Raumformen in Analytischer Behandlung* [Leipzig, Teubner, 1885], § 12, pag. 241.

Matematica. — *Sulle curve piane algebriche reali prive di punti reali.* Nota di LUIGI BRUSOTTI, presentata dal Corrisp. L. BERZOLARI.

1. Una curva piana algebrica reale, cioè avente equazione a coefficienti reali rispetto ad elementi reali di riferimento, quando sia d'ordine pari $2m$, può essere priva di punti reali.

D'altro lato, se si osserva che le parti reali delle curve reali di un fascio reale di curve piane algebriche costituiscono un *fascio di curve grafiche* (¹) e che un fascio di curve grafiche può essere o *rientrante in sè* o *dotato di estremi* (²), appare ben lecito di applicare queste denominazioni direttamente al fascio reale di curve algebriche.

Ciò posto, risulta in modo semplice che, *se un fascio reale di curve piane algebriche contiene una curva reale priva di punti reali, esso è dotato di estremi.* Precisamente le sue curve reali si ripartiscono in due continui, l'uno di curve dotate di punti reali, l'altro di curve prive di punti reali, continui separati dai due *estremi*, per ciascuno dei quali la parte reale è, in generale, ridotta ad un sol punto isolato.

Per i fasci *topologicamente generici* (³) è pur valida la reciproca.

2. Segue che, *se le curve piane d'ordine* $2m$ *si rappresentano coi punti di uno spazio* S_r *ad* $r = m\ (2m + 3)$ *dimensioni, in modo che immagini di curve reali siano punti reali, i punti-immagine di curve reali prive di punti reali riempiono una regione* K, *ad r dimensioni, convessa (od ovoide), quindi semplicemente connessa.*

Ed invero una retta reale di S_r, la quale passi per un punto di K, è immagine di un fascio dotato di estremi ed ha perciò in comune con K un solo segmento, immagine del continuo costituito entro il fascio dalle curve reali prive di punti reali.

Risulta pure che *un punto generico del contorno di* K *è immagine di una curva la cui parte reale si riduce ad un punto isolato.*

Se inoltre si pon mente agli spazî reali subordinati ad S_r, si deduce che, *se le curve di un sistema lineare reale* ∞^t $(t < r)$ *si rappresentano*

(¹) Brusotti, *Sui fasci di curve grafiche* (Succ. Bruni. Pavia, 1919). Cfr. n. 34.

(²) Ibid., § 8 e § 9.

(³) Per la definizione di fascio topologicamente generico vedasi ibid., n. 117; ed anche Brusotti, *Un teorema sui fasci reali di curve algebriche* (in questo volume di Rendiconti)

coi punti di un S_t reale in modo che immagini di curve reali siano punti reali, e se il sistema contiene curve reali prive di punti reali, i punti-immagine di queste ultime riempiono una regione a t dimensioni, convessa (quindi semplicemente connessa).

3. Con queste premesse si può dimostrare che, *se esiste un fascio reale (topologicamente generico) di curve piane di ordine $2m$, contenente curve reali prive di punti reali e dotato di $2h+1$ centri critici reali* [1], *allora, comunque si scelga il numero positivo $h' \leq h$, esistono pure fasci reali di ordine $2m$, contenenti curve reali prive di punti reali e dotati di $2h'+1$ centri critici reali.*

Sia φ il fascio del tipo detto e dotato di $2h+1$ centri critici reali; sia φ_1 un fascio pure del tipo detto, ma dotato di 3 centri critici reali, fascio di cui è nota l'esistenza [2].

Supposti, come è lecito, φ e φ_1 in condizioni algebricamente generiche, essi appartengono ad un ∞^3 reale ed algebricamente generico, rappresentabile nel modo indicato (n. 2) su di un S_3 reale.

Siano allora (φ) (φ_1) le rette (reali) immagini dei due fasci, e sia H la regione convessa luogo delle immagini delle curve reali prive di punti reali. In H, e rispettivamente su (φ) (φ_1), si prendano due punti P e P_1 e si consideri una retta reale, la quale passi con continuità (in S_3) dalla posizione (φ) alla (φ_1), sempre appoggiandosi ad una linea congiungente P con P_1 e totalmente tracciata in H [il che è possibile, per esser H (n. 2) semplicemente connessa].

Si osservi che in S_3 le curve dotate di punto doppio sono rappresentate dai punti di una superficie Δ, la cui parte reale si compone:

α) di una falda reale, con linee nodali e cuspidali rispondenti all'esistenza, nel sistema, di curve (reali) dotate di due punti doppî reali o di cuspide reale;

β) di linee doppie isolate, per l'esistenza di curve (reali) dotate di due punti doppî immaginario-coniugati.

Punti eccezionali in numero finito spettano alla parte reale di Δ per la presenza, nel sistema, di curve reali con tre punti doppî o con tacnodo o con due punti doppî di cui uno sia una cuspide.

Per l'arbitrarietà del procedimento, si può supporre che la retta mobile, passando dalla posizione (φ) alla (φ_1), eviti codesti punti eccezionali. Così è da escludersi che la retta venga a toccare la falda reale di Δ, perchè

[1] Centro critico è (secondo Cayley) un punto doppio per una ed una sola curva del fascio, Se l'ordine è pari, il numero dei centri critici reali (come quello totale dei centri critici) è dispari.

[2] Brusotti, *Esistono fasci di curve piane d'ordine n a punti-base e centri critici tutti reali* (Rend R. Ist. Lomb., vol. LI, 1918). Vedasi la postilla alla prefazione.

in tal caso il fascio di cui la retta è immagine acquisterebbe punti-base reali [1], mentre esso possiede curve reali prive di punti reali in quanto la retta costantemente penetra in H.

Non avendo le linee isolate di Δ influenza alcuna sulle caratteristiche topologiche del fascio variabile insieme colla retta, queste muteranno solo nel caso che la retta stessa attraversi linee nodali o cuspidali per la falda reale di Δ. Ma la prima circostanza non altera il numero dei centri critici reali, mentre la seconda lo altera di due unità, perchè il fascio (attraverso ad un fascio dotato di curva cuspidata) acquista o perde una coppia di centri critici reali (l'uno nodale, l'altro isolato) [2].

Segue che, nella deformazione continua corrispondente allo spostamento della retta, immagine, il fascio si conserva dotato di curve reali prive di punti reali, ma il numero dei centri critici reali assume almeno una volta ciascuno dei valori dispari compresi fra $2h+1$ e 3. Ed il teorema è così dimostrato.

4. Un risultato generale sui *modelli algebrici* dei fasci di curve grafiche [3] permette di estendere il teorema del n. 3 nel modo seguente:

Se esiste un fascio reale (topologicamente generico) di curve piane d'ordine $2m$, contenente curve reali prive di punti reali e dotato di $2h+1$ centri critici reali, comunque si scelgano i numeri (positivi)

$$m' \geq m \quad , \quad h' \leq h,$$

esistono fasci reali algebricamente generici di curve piane d'ordine $2m'$, i quali contengono curve reali prive di punti reali e posseggono $2h'+1$ centri critici reali.

(1) La rete delle curve del sistema passanti per un punto reale M ha per immagine il piano tangente alla falda reale di Δ nel punto-immagine della curva del sistema avente punto doppio in M.

(2) Cfr. *Sui fasci di curve grafiche* (cit.), n. 83 (fig. 55).

(3) *Sui fasci di curve grafiche* (cit.), nn. 117-118.

Idromeccanica. — *Sul moto di un vortice puntiforme.* Nota III di B. Caldonazzo, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

8. Solo dopo la pubblicazione delle mie due Note *Sul moto di un vortice puntiforme* (¹) sono venuto a conoscenza di alcuni lavori sullo stessso argomento.

Il sig. L. Föppl ha studiato (²) il moto di una coppia di vortici in presenza di un cilindro circolare. È questo il caso che io considero in fine alla Nota II; i risultati che riportai allora contengono in sostanza quelli del Föppl. Dal lavoro del Föppl apprendo inoltre che W. Kutta già da parecchio tempo aveva trattato il caso di una coppia di vortici in presenza di una lamina rettilinea, cui pure io accenno alla fine della Nota II, dando gli elementi essenziali per la determinazione del moto della coppia. Non sono riuscito tuttavia a prendere visione del lavoro del Kutta.

Affrettandomi a restituire la dovuta priorità, mi permetto di rilevare che i sigg. Kutta e Föppl si sono limitati a problemi particolari, mentre nel mio lavoro la parte rigida limitante il campo del moto ha forma qualsiasi. Mi sembra inoltre un vantaggio non trascurabile l'introduzione della corrente C (vedi le due prime Note) che permette di dare ai risultati una forma semplice ed espressiva.

Più recente è un lavoro del sig. Lagally (³). Egli rileva con quali cautele si possa impiegare la rappresentazione conforme del campo del moto, quando in questo esistano dei vortici isolati, per la ragione che la funzione di corrente è singolare nei punti occupati dai vortici. Mi sia permesso di notare che ciò è sostanzialmente contenuto in un lavoro del Routh (⁴) e del quale ho tenuto conto e mi sono utilmente giovato nelle due Note citate.

Il Lagally considera quindi il moto di un vortice in un canale a pareti rettilinee per passare poi, con la rappresentazione conforme, ad un piano tagliato da una semiretta, considerato quale superficie riemanniana a due fogli.

(¹) In questi Rend., vol. XXVIII, pagg. 191-195 e pagg. 301-303.

(²) L. Föppl, *Wirbelbewegung hinter einem Kreiszylinder* [Sitzungsber. der Kön. Bayerischen Akad. der Wiss. math.-physik. Klasse (1913) Münken].

(³) M. Lagally, *Ueber die Bewegung einzelner Wirbel in einer strömenden Flüssigkeit* [Sitzungsber. der Kön. Bayerischen Akad. der Wiss. math.-physik. Klasse (1915) München].

(⁴) E. J. Routh, *Some applications of coniugate functios* [Proc. Lond. math. Soc., 12 (1881), pag. 72].

Mentre i lavori del Föppl e del Kutta mi esimono, pel momento, dal trattare diffusamente i casi interessanti di una coppia di vortici in presenza di un cilindro o di una lamina, come mi ero proposto di fare, il lavoro del Lagally mi ha indotto a pubblicare questa terza Nota *sul moto di un vortice puntiforme in un canale a pareti qualisivogliano e percorso da una corrente* C *stazionaria irrotazionale.*

Seguendo il criterio, introdotto utilmente nelle prime due Note, posso esprimere ancor qui tutti gli elementi del moto del vortice per mezzo di quelli di C, determinandone i punti d'arresto e la condizione per la loro stabilità.

Pertanto, anche per un canale il moto di un vortice si può considerare determinato in tutti quei casi in cui sia stata determinata una qualsiasi corrente C stazionaria irrotazionale.

Sussistono ancora i risultati qualitativi, già rilevati nelle Note precedenti. In particolare risulta giustificato quanto si osserva nel caso reale, e cioè che i vortici si presentano di preferenza, sostandovi, in prossimità delle sporgenze e delle rientranze delle sponde.

Faccio infine un'applicazione ad un caso particolare che permette di considerare il moto di una coppia di vortici in un canale, che si può risguardare costituito da un recipiente molto grande munito di imboccatura di Borda. Il luogo dei possibili punti d'arresto della coppia è interno al tubo costituente l'imboccatura e coincide con le linee isotachie della vena libera effluente nel caso di Borda.

9. Siano μ e ν le due pareti del canale, le quali si estendono indefinitamente a monte ed a valle. Con μ si conviene indicare quella parete che risulta parete *destra* per una corrente C a portata q *positiva.* Il sistema di riferimento e le notazioni sono quelli già introdotti al n. 1.

Perciò, se $f = \varphi + i\psi$ è il potenziale complesso del moto di C, possiamo fissarne una determinazione, in guisa che risulti $\psi = 0$ su μ, $\psi = q$ su ν, qualunque sia il segno della portata q. Si ponga ora

$$Z = e^{\frac{\pi}{q} f} = e^{\frac{\pi}{q}\varphi}\left(\cos\frac{\pi}{q}\psi + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{q}\psi\right).$$

La nuova variabile complessa $Z = X + iY$ rappresenta manifestamente in modo conforme il campo A del moto sul semipiano $Y \geq 0$. Sostituendo nella (1) il 2° membro di questa, a meno di una inessenziale costante additiva, diviene

$$\frac{1}{2\pi} \log \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{q}\psi}{V}.$$

Perciò la funzione di corrente del moto del vortice, *composto* del moto della corrente C e di quello proprio del vortice stesso, risulta

$$\psi^* = \frac{I}{2\pi} \log \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{q} \psi}{V} - \psi ,$$

che differisce dalla ψ^* della Nota II, relativa al caso in cui una delle pareti del canale è a distanza infinita, per lo scambio di ψ in $\operatorname{sen} \frac{\pi}{q} \psi$ nell'argomento del log. Sono quindi traiettorie del vortice le linee

$$V = a e^{\frac{2\pi}{I}\psi} \operatorname{sen} \frac{\pi}{q} \psi , \qquad a = \text{cost.}$$

La sua velocità $\mathbf{V}^*$ è data da

$$\mathbf{V}^* = \left(\frac{I}{2q} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{q} \psi + 1 \right) \mathbf{V} - \frac{I}{2\pi} \operatorname{grad} \vartheta ,$$

che si può scrivere

$$\mathbf{V}^* = \left\{ \left(\frac{I}{2q} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{q} \psi + 1 \right) V - \frac{I}{2\pi} \frac{\partial \vartheta}{\partial s} \right\} \mathbf{t} + \frac{I}{2\pi} \frac{\partial \tau}{\partial s} \mathbf{n} ,$$

$\mathbf{t}$ ed $\mathbf{n}$ rappresentando sempre i vettori unitarî tangente e normale alla vevelocità $\mathbf{V}$ della corrente C.

I punti d'arresto del vortice evidentemente sono quelli in cui

$$\left(\frac{I}{2q} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{q} \psi + 1 \right) V = \frac{I}{2\pi} \frac{\partial \vartheta}{\partial s} \quad , \quad \frac{\partial \tau}{\partial s} = 0 .$$

La seconda di queste coincide con la relazione già trovata pel caso studiato nelle Note precedenti. Ancor qui essa individua una linea l, di cui fa parte il luogo dei punti dove la velocità V di C ha un massimo od un minimo e sulla quale necessariamente si trovano i punti di arresto.

Per la *stabilità* dell'arresto, seguendo lo stesso procedimento del n. 4, si ritrova la condizione

$$I \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial s^2} > 0 .$$

Ancor qui tutti gli eventuali punti angolari delle pareti appartengono alla linea l, per le stesse ragioni addotte nella Nota II. Ciò mette in evidenza la possibilità che il vortice si presenti e sosti nelle vicinanze delle accidentalità delle sponde, come ho asserito nel n. precedente.

10. In alcuni casi, non del tutto infrequenti, giova definire la corrente C, anzichè con una funzione $f(z)$ della variabile complessa del campo del moto, con una relazione tra w ed f. Risulta allora $V = V(\varphi, \psi)$; e per conseguenza, ricordando che lungo una linea di flusso s di C è $\psi = cost.$,

$$\frac{\partial \tau}{\partial s} = \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial s} = \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial V}{\partial \varphi};$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial s} = \frac{\partial \tau}{\partial n} = \frac{\partial \tau}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial n} = V\frac{\partial \tau}{\partial \psi} = \frac{\partial V}{\partial \psi};$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\right)\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial s} = V\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \, \partial \psi}.$$

La linea l risulta così definita dall'equazione

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0,$$

e la condizione di stabilità si modifica nella seguente:

$$I\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \, \partial \psi} > 0.$$

Ad es., per $z = f + e^f + 1$ si ha $w = (1 + e^f)^{-1}$ (¹). Si tratta di un canale la cui parete μ è l'asse delle x, la parete ν è costituita dai due bordi del taglio fatto con la semiretta $y = \pi$, $x \leq 0$. La corrente C sbocca dalla striscia compresa tra le due pareti nel restante semipiano $y \geq 0$.

Si ha in questo caso

$$V = (1 + e^{2\varphi} + 2e^{\varphi}\cos\psi)^{-\frac{1}{2}};$$

quindi se ne deriva

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = -V^3 e^{\varphi}(e^{\varphi} + \cos\psi).$$

Questa mostra che la linea l è costituita dalle due sezioni normali alla vena C all' ∞ a monte ed a valle e dalla linea $e^{\varphi} + \cos\psi = 0$, avente per assintoto la retta $y = \frac{\pi}{2}$. Su questa linea è

$$\frac{\partial V}{\partial \psi} = \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \, \partial \psi} = V^3 e^{\varphi} \operatorname{sen}\psi = -\frac{\cos\psi}{\operatorname{sen}^2\psi}.$$

Ne segue (poichè nell'interno del campo è $0 < \psi < \pi$) che per la stabilità dell'arresto su questa linea il vortice deve avere intensità positiva e

(¹) Helmholtz [Berl. Monatsber., 23 aprile 1868; opppure Ges. Abh, I. p. 154].

che l'arresto avviene nel punto $I \cot \psi + \pi = 0$. Invertendo la corrente C (cambia quindi il segno di ψ), la linea l non muta; soltanto per la stabilità deve essere allora $I < 0$.

Con una riflessione del campo del moto rispetto alla parete μ si ha un canale con una coppia di vortici, il canale così ottenuto potendosi risguardare nella porzione di larghezza finita quale tubo d'imboccatura di Borda, applicato al recipiente costituito dal rimanente canale, che col tubo considerato ricopre l'intero piano. Particolare degno di nota: la linea l coincide con la linea isotachia della vena libera effluente nel caso di Borda [1].

Meccanica. — *Sopra alcuni casi singolari nella teoria dei giroscopi asimmetrici pesanti.* Nota III di ORAZIO LAZZARINO, presentata dal Corrisp. R. MARCOLONGO [2].

Volendo determinare il vettore Ω', possono servire le equazioni

$$S' = \alpha g \times \Omega' = 0 \; ; \; \alpha\Omega \times \Omega' = T' \; ; \; K\gamma g \times \Omega' = 0 \tag{12}$$

dalle quali si ricava la relazione

$$\alpha g \times \alpha\Omega \wedge K\gamma g \,.\, \Omega' = T' \,.\, K\gamma g \wedge \alpha g \tag{13}$$

che permette di determinare Ω' purchè sia soddisfatta la condizione

$$\alpha g \times \alpha\Omega \wedge K\gamma g \neq 0\,. \tag{14}$$

Per dimostrare che questo prodotto misto non è in generale nullo, basta verificare che non è nullo in qualche caso particolare.

Consideriamo, ad esempio, i giroscopi asimmetrici assiali, per i quali sia $\mathbf{g} = \mathbf{i}$ ove $\mathbf{i}$ è uno dei vettori unitari $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ rispettivamente paralleli agli assi principali d'inerzia del sistema relativi al punto fisso O. Indicando rispettivamente con A, B, C e con p, q, r i momenti principali d'inerzia e le componenti del vettore Ω rispetto ai detti assi, si hanno le relazioni

$$\alpha g = \alpha \mathbf{i} = A\mathbf{i} \; ; \; \alpha\Omega = Ap\mathbf{i} + Bq\mathbf{j} + Cr\mathbf{k}\,;$$
$$K\gamma\mathbf{i} \equiv \mathbf{i} \wedge \alpha\Omega + \alpha\,.\,\Omega \wedge \mathbf{i} = (B - C)(r\mathbf{j} + q\mathbf{k})$$

[1] Le equazioni parametriche di l sono:

$$x = \log(-\cos\psi) + \operatorname{sen}^2\psi\,; y = \psi - \operatorname{sen}\psi\cos\psi.$$

Si faccia in queste $\psi = \pi - \theta/2$, scambiando quindi y in $\pi - y$. Si ottengono così le equazioni della linea isotachia riportate dal Lamb [*Hydrodyn.* traduz. del Friedel (1907), pag. 112, formule (6)].

[2] Pervenuta all'Accademia il 1° giugno 1919.

e quindi la (14) porge

$$(15)\qquad \alpha g \times \alpha\Omega \wedge K\gamma g = Ai \times \alpha\Omega \wedge K\gamma i = A(B - C)(Bq^2 - Cr^2)$$

e da qui si vede che per $A \neq B \neq C$ (giroscopio asimmetrico) il prodotto (14) è diverso da zero. Quindi si può dire che « *per i giroscopi asimmetrici* « *in generale sussiste la condizione* (14) *e quindi si può adoperare la* (13) « *per la determinazione del vettore* Ω' ».

È evidente che quando il giroscopio è simmetrico, poichè risultano eguali fra loro almeno due dei momenti principali d'inerzia, la (15), e quindi anche la (14), si annulla e la (13) non serve più per la determinazione di Ω'.

Un procedimento analogo può essere adoperato per dimostrare che, per i giroscopi asimmetrici *in generale*, l'equazione suppletiva (11), che è una relazione algebrica fra T e U, non è conseguenza delle equazioni di Schiff. Osservando poi che esistono fra T e U due relazioni algebriche e indipendenti fra loro, si deduce che, « *per i giroscopi asimmetrici in generale e* « *per* $S =$ *costante, anche gl'invarianti* T *e* U *risultano costanti e i moti* « *del giroscopio sono rotazioni permanenti* ».

Su questo argomento Hess [1] trovò che, « anche in giroscopi asimme- « trici particolari e in particolari condizioni di moto, solo l'ipotesi $S_0 = 0$ « può condurre a moti che non siano rotazioni permanenti ».

Da questo teorema e da quanto è stato detto precedentemente segue che, « nei giroscopi asimmetrici e nell'ipotesi che sia $S_0 \neq 0$, le due dette « relazioni algebriche frà T e U [cioè la (11) e quella che si ricava « dalle (A)] devono risultare sempre fra loro indipendenti per valori qua- « lunque delle costanti h, k, S_0 ».

Per dimostrare questo teorema, che lo Stäckel non riuscì a provare, si può procedere nel seguente modo:

Dalle tre prime equazioni (A) si deduce col solito procedimento la relazione

$$\Omega \times \alpha\Omega \wedge g \,.\, \alpha\Omega = 2T \,.\, \alpha\Omega \wedge g + 2U \,.\, g \wedge \Omega + S_0 \,.\, \Omega \wedge \alpha\Omega$$

che per la quarta delle (A) può scriversi

$$(16)\qquad 2 \,.\, \alpha\Omega \wedge g \,.\, T + 2g \wedge \Omega \,.\, U = \alpha\Omega \wedge \Omega \,.\, S_0\,,$$

e questa è una delle due relazioni fra T e U da considerare; l'altra è la (11) che conviene scrivere nel seguente modo:

$$(17)\qquad -S_0 \,.\, T + 2g \times \Omega \,.\, U = hS_0 - kg^2 + \alpha\Omega \times g \wedge \alpha\Omega'.$$

Ora, perchè queste due relazioni algebriche e lineari fra T e U siano indipendenti fra loro, è necessario e basta che sia diverso da zero il deter-

[1] Hess, *Bamberger Programm*, § 12, S. 31-40.

minante dei coefficienti di T e di U, che cioè non sia nullo il vettore

(18) $$\mathbf{d} = 4\mathrm{g} \times \Omega . \alpha\Omega \wedge \mathrm{g} + 2\mathrm{S}_0 . \mathrm{g} \wedge \Omega .$$

Dopo ciò la dimostrazione del teorema si riduce a provare che, fatta eccezione del valore $\mathrm{S}_0 = 0$, comunque si scelgano le costanti h, k, S_0, il vettore $\mathbf{d}$ risulta sempre diverso da zero per i giroscopi asimmetrici.

Poichè h e k non figurano nella (18), $\mathbf{d}$ non dipende da queste costanti; quanto ad S_0 si osserva che, per $\mathrm{S}_0 \neq 0$, $\mathbf{d}$ può annullarsi solo quando sia identicamente soddisfatta la relazione

(19) $$2\mathrm{g} \times \Omega . \alpha\Omega \wedge \mathrm{g} = \mathrm{S}_0 . \Omega \wedge \mathrm{g}$$

e questa sussiste evidentemente solo nelle seguenti ipotesi:

(20) $$\mathrm{g} \times \Omega = 0 \quad , \quad \Omega \wedge \mathrm{g} = 0$$

(21) $$\alpha\Omega \wedge \mathrm{g} = 0 \quad , \quad \Omega \wedge \mathrm{g} = 0$$

(22) $$(\alpha\Omega \wedge \mathrm{g}) \wedge (\Omega \wedge \mathrm{g}) = 0 .$$

Ora, fatta esclusione dei casi in cui sia nullo o il vettore g (caso di Poisson) o il vettore Ω (caso del riposo), è evidente che le condizioni (20) sono tra loro incompatibili e che le (21) e la (22) possono sussistere solo nel caso in cui l'omografia α d'inerzia si riduca ad un numero, cioè solo nel caso in cui il giroscopio sia simmetrico. Si può dunque concludere che « *nel caso dei giroscopi asimmetrici, per S costante ma diverso da zero,* « *le relazioni* (16) *e* (17) *fra T e U risultano sempre fra loro indipen-* « *denti, comunque si scelgano le costanti* h, k, S_0 ».

Da ciò segue che « *anche nei giroscopi asimmetrici particolari e per* « *particolari condizioni di moto, con l'ipotesi* $S_0 \neq 0$ *solo le rotazioni* « *permanenti sono compatibils* ».

Passando ora all'esame del caso escluso $S_0 = 0$, si osserva che in tale ipotesi la (19) dà

(19') $$\mathrm{g} \times \Omega . \alpha\Omega \wedge \mathrm{g} = 0$$

e, poichè l'annullarsi del 2° fattore è incompatibile con l'ipotesi $\mathrm{S}_0 = \alpha\Omega \times \mathrm{g} = 0$, si conclude che l'unico caso in cui il vettore $\mathbf{d}$ si annulla è caratterizzato dalla condizione

(23) $$\mathrm{g} \times \Omega = 0 .$$

Supposto quindi $\mathrm{g} \neq 0$, $\Omega \neq 0$, si ha questo nuovo risultato che « *nei* « *giroscopi asimmetrici, per* $S_0 = 0$, *sono possibili delle rotazioni non* « *permanenti solo quando l'asse istantaneo di rotazione risulti perpendi-* « *colare alla retta che congiunge il punto fisso col baricentro del giro-* « *scopio* ».

Poichè tale retta è fissa nel corpo, l'asse istantaneo di rotazione potrà muoversi in un piano, anche fisso nel corpo, normale a g e passante per il punto fisso O. Inoltre, dalla condizione $S_0 = \alpha\Omega \times g = 0$ risulta che anche il vettore $\alpha\Omega$ dell'impulso dovrà mantenersi, durante il moto, parallelo al detto piano; e quindi, posto $P = O + \Omega$, $P_1 = O + \alpha\Omega$, si conclude che « *quando in un giroscopio asimmetrico, per cui si abbia* $S_0 = 0$, « *le rotazioni non sono permanenti, la polodia* (luogo dei punti P) *e la* « *prima curva d'impulso* (luogo dei punti P_1) *sono curve piane e giac-* « *ciono nel piano, passante per il punto fisso, che è normale alla retta* « *che congiunge questo punto col baricentro del giroscopio* ».

4. Studio del caso in cui il piano $S = S_0$ è un elemento del cono di Staude. — In questo caso le due ultime equazioni (A) non sono fra loro indipendenti e il cono degli assi permanenti di rotazione deve necessariamente spezzarsi in due piani.

Cominciamo con l'osservare che quando il giroscopio è simmetrico rispetto ad un asse, ad es. Os, l'equazione del cono assume la forma

$$\alpha\Omega \times \mathrm{s} \,.\, g \times \mathrm{s} \wedge \Omega = 0 \tag{24}$$

ed è chiaro che, supposto sempre $g \neq 0$, $\Omega \neq 0$, questa equazione è soddisfatta solo quando si annulla uno dei due fattori, cioè quando il vettore dell'impulso risulta normale all'asse di simmetria, oppure quando l'asse istantaneo di rotazione risulta complanare coll'asse di simmetria e col vettore g del baricentro. Se poi il giroscopio è simmetrico rispetto al punto fisso, allora, poichè l'omografia α è un numero, la (24) risulta soddisfatta identicamente, cioè ogni retta passante per il punto fisso può essere un asse permanente di rotazione. Ma se il giroscopio è asimmetrico, la (24) non è più una identità e quindi la degenerazione del cono non può aver luogo che in casi particolari.

Considerando una terna di vettori unitari $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ rispettivamente paralleli agli assi principali d'inerzia relativi al punto fisso O e indicando con A, B, C i corrispondenti momenti d'inerzia e rispettivamente con $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$ le componenti, rispetto ai detti assi, dei vettori Ω e g, le due ultime equazioni (A) assumono rispettivamente la forma

$$\mathrm{A}\xi p + \mathrm{B}\eta q + \mathrm{C}\zeta r = \mathrm{S}_0, \tag{25}$$

$$(\mathrm{B} - \mathrm{C})\,\xi qr + (\mathrm{C} - \mathrm{A})\,\eta rp + (\mathrm{A} - \mathrm{B})\,\zeta pq = 0; \tag{26}$$

e da qui si vede chiaramente che, per i giroscopi asimmetrici, cioè per $\mathrm{A} \neq \mathrm{B} \neq \mathrm{C}$, la condizione necessaria e sufficiente perchè il cono (26) contenga come elemento il piano (25) è che sia nulla una delle componenti ξ, η, ζ del vettore g, ossia che il vettore g sia parallelo ad uno dei piani principali d'inerzia.

Dalle (25) e (26) si vede anche che il cono si spezza quando sono eguali fra loro due dei momenti principali d'inerzia A, B, C, cioè quando il giroscopio è simmetrico rispetto ad uno degli assi principali d'inerzia.

Considerando il caso dei giroscopi asimmetrici e supponendo che il baricentro giaccia nel piano principale parallelo a $\mathbf{ij}$, si ha

$$\zeta = \mathrm{g} \times \mathbf{k} = 0\,; \tag{27}$$

e allora, poichè è in generale $r = \Omega \times \mathbf{k} \neq 0$, dalle (25) e (26) si ha

$$\mathrm{A}\xi . p + \mathrm{B}\eta . q = \mathrm{S}_0 \tag{28}$$

$$(\mathrm{C} - \mathrm{A})\, \eta . p + (\mathrm{B} - \mathrm{C})\, \xi . q = 0\,. \tag{29}$$

Ora, perchè queste due equazioni non siano fra loro indipendenti, è necessario e basta che il determinante dei coefficienti di p e di q sia nullo, che cioè si abbia

$$\mathrm{A}(\mathrm{B} - \mathrm{C})\, \xi^2 - \mathrm{B}(\mathrm{C} - \mathrm{A})\, \eta^2 = 0\,. \tag{30}$$

Poichè le condizioni (25), (28) e (30) caratterizzano per $\mathrm{S}_0 = 0$ il noto caso di Hess, si può dire che, « *per* $\mathrm{S}_0 = 0$, *il caso in esame si riduce al caso di Hess* ».

Volendo esaminare come si comportino in questo caso le equazioni (VI) di Schiff, si osserva che la (VI_a) equivale alla (29) ove si ponga $\mathrm{S}_0 = 0$; la (VI_b) porge

$$\mathrm{UT}' = \mathrm{U}'\mathrm{T} \tag{31}$$

e da qui, integrando e indicando con l la costante d'integrazione, si ha

$$\mathrm{T} = l\mathrm{U}\,. \tag{32}$$

Poichè l è un numero arbitrario, si comprende che in questo caso la (VI_b) non è conseguenza della (VI_a) e quindi non occorre più alcuna equazione suppletiva. Finalmente la (VI_c) dà, per la (32), la relazione

$$\mathrm{U}'^2 = \mathrm{g}^2(2\mathrm{U} - k^2) - 2\mathrm{U}(h - l\mathrm{U})^2 \tag{33}$$

e da questa si ricava

$$dt = \pm\, d\mathrm{U} / \sqrt{\mathrm{g}^2(2\mathrm{U} - k^2) - 2\mathrm{U}(h - l\mathrm{U})^2}$$

cioè « *il tempo t è espresso da un integrale ellittico di prima specie in U e, reciprocamente, l'invariante U è funzione ellittica del tempo* ».

Matematica. — *Spazî a tre dimensioni con una curvatura nulla e le altre due eguali ed opposte.* Nota di ATTILIO PALATINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Chiamo, col Bianchi, normale uno spazio curvo S_3 a tre dimensioni, definito dal quadrato del suo elemento lineare

$$ds^2 = \sum_{1}^{3}{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s\,,$$

quando colle linee delle sue tre congruenze principali si può costruire un sistema triplo di superficie ortogonali.

Io mi sono proposto lo studio del seguente problema: *Trovare tutti gli spazî normali* S_3 *dotati di una curvatura nulla e le altre due eguali ed opposte.*

Riserbandomi di sviluppare i calcoli in un'altra Memoria, nella presente Nota espongo in riassunto i risultati ai quali sono giunto.

1. Supposto che il nostro S_3 sia normale, è noto che il ds^2 corrispondente si può presentare sotto la forma normale

$$ds^2 = H_1^2\, dx_1^2 + H_2^2\, dx_2^2 + H_3^2\, dx_3^2\,, \tag{1}$$

assumendo come linee coordinate le linee delle congruenze principali.

Denotiamo con α_{rs} i simboli di Ricci relativi alla forma differenziale (1) e con $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ le tre curvature riemanniane principali. Per il fatto che le congruenze principali sono normali, si ha

$$\alpha_{rs} = 0 \quad (r \neq s) \quad \text{e} \quad \alpha_{ii} = H_i^2\, \omega_i\,,$$

ossia le funzioni H_1, H_2, H_3 di x_1, x_2, x_3 devono soddisfare alle sei equazioni

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 H_1}{\partial x_2\, \partial x_3} &= \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x_3}\frac{\partial H_1}{\partial x_2} + \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial x_2}\frac{\partial H_1}{\partial x_3}\,, \\ \frac{\partial^2 H_2}{\partial x_3\, \partial x_1} &= \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial x_1}\frac{\partial H_2}{\partial x_3} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial x_3}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}\,, \\ \frac{\partial^2 H_3}{\partial x_1\, \partial x_2} &= \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\frac{\partial H_3}{\partial x_1} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}\frac{\partial H_3}{\partial x_2}\,, \end{aligned} \right.$$

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial x_3}\right)+\frac{1}{H_1^2}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}+\omega_1 H_2 H_3=0\,,\\
&\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial x_3}\right)+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial x_1}\right)+\frac{1}{H_2^2}\frac{\partial H_3}{\partial x_2}\frac{\partial H_1}{\partial x_2}+\omega_2 H_3 H_1=0\,,\\
&\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\right)+\frac{1}{H_3^2}\frac{\partial H_1}{\partial x_3}\frac{\partial H_2}{\partial x_3}+\omega_3 H_1 H_2=0\,.
\end{aligned}\right.
$$

A queste equazioni aggiungiamo le conseguenze differenziali del Bianchi, che, nel caso presente, sono le seguenti:

$$
(4)\qquad \frac{\partial\omega_i}{\partial x_i}+(\omega_i-\omega_{i+1})\frac{1}{H_{i+1}}\frac{\partial H_{i+1}}{\partial x_i}+(\omega_i-\omega_{i+2})\frac{1}{H_{i+2}}\frac{\partial H_{i+2}}{\partial x_i}=0\,,
$$
$$
(i=1\,,2\,,3)\,.
$$

Supposto ora che sia

$$
\omega_1=-\omega_2=\omega\quad,\quad \omega_3=0\,,
$$

si tratta di vedere se il sistema differenziale (2), (3) ammette delle soluzioni; e, nel caso affermativo, di determinare le soluzioni più generali.

Si noti, prima di procedere, che deve ritenersi ω essenzialmente diverso da zero, altrimenti si cadrebbe ovviamente nel caso euclideo. Si noti inoltre che le linee di curvatura, per le quali il ds^2 del nostro S_3 assume la forma normale (1), sono uniche e determinate, perchè le tre curvature sono essenzialmente distinte.

2. Facendo nelle (4) $\omega_1=-\omega_2=\omega$ e $\omega_3=0$, si ottiene

$$
(4')\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial\omega}{\partial x_1}+2\omega\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}+\omega\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial x_1}=0\,,\\
&\frac{\partial\omega}{\partial x_2}+2\omega\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial x_2}+\omega\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial x_2}=0\,,\\
&\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial x_3}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x_3}\,.
\end{aligned}\right.
$$

L'ultima di queste equazioni ci dice che la congruenza [3], oltre ad esser normale, è anche *isotropa*. Dalle prime due poi si deduce

$$
\frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_2}\log\frac{H_2}{H_1}=0\,,
$$

la quale, unita all'ultima delle (4′), sta ad esprimere che le linee delle congruenze [1] e [2] formano un reticolato isotermo.

Scegliendo dunque opportunamente i parametri delle linee [1] e [2], senza cambiare le linee stesse, si può porre il ds^2 sotto la forma

$$
ds^2=e^{2h}(dx_1^2+dx_2^2)+W^2\,dx_3^2\,.
$$

Possiamo quindi ripigliare in esame le (2) e (3), ponendovi $H_1 = H_2 = e^{2h}$ e $H_3 = W$.

Relativamente alle (4'), l'ultima è identicamente soddisfatta e le altre due dànno

$$\omega e^{2h} W = \eta(x_3), \tag{5}$$

denotando con η una funzione della sola x_3, essenzialmente diversa da zero, perchè ciò implicherebbe $\omega = 0$.

Divideremo ora i ds^2, che soddisfanno alle nostre condizioni, in due classi:

A) quelli per cui è $\dfrac{\partial h}{\partial x_3} = 0$,

B) quelli per cui è $\dfrac{\partial h}{\partial x_3} \neq 0$.

3. E cominciamo dall'esaminare il caso A).

Le prime due delle (2) sono identicamente soddisfatte. La terza e le (3) dànno invece

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial h}{\partial x_1}\frac{\partial W}{\partial x_2} - \frac{\partial h}{\partial x_2}\frac{\partial W}{\partial x_1} = 0, \\ &\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} - \frac{\partial h}{\partial x_1}\frac{\partial W}{\partial x_1} + \frac{\partial h}{\partial x_2}\frac{\partial W}{\partial x_2} - \eta = 0, \\ &\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} - \frac{\partial h}{\partial x_2}\frac{\partial W}{\partial x_2} + \frac{\partial h}{\partial x_1}\frac{\partial W}{\partial x_1} + \eta = 0 \\ &\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} = 0. \end{aligned}\right.$$

Le condizioni di integrabilità di questo sistema sono identicamente soddisfatte.

I ds^2 della classe A) sono dunque caratterizzati dal sistema (6).

L'ultima delle (6) ci dice che h è funzione armonica di x_1, x_2 ed esprime che le superficie $x_3 = \text{cost.}$ sono a curvatura gaussiana nulla e che anzi sono piani dello spazio curvo S_3, per essere $\dfrac{\partial h}{\partial x_3} = 0$.

Dimostreremo che vi sono infiniti ds^2 appartenenti alla classe A), il grado di arbitrarietà essendo quello di una funzione armonica di due variabili. Ad ogni funzione armonica, o, ciò che è lo stesso, ad ogni funzione della variabile complessa $z = x_1 + ix_2$, resta così associata una soluzione del sistema (6).

Sommando a membro a membro la seconda e la terza delle (6), si deduce

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} = 0, \tag{7}$$

cioè la funzione W delle tre variabili x_1, x_2, x_3 è armonica rispetto a x_1, x_2.

Ritenuto allora che W ed h sono funzioni armoniche, è noto che, posto

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x_1} - i \frac{\partial W}{\partial x_2} &= w, \\ \frac{\partial h}{\partial x_1} - i \frac{\partial h}{\partial x_2} &= \mathfrak{h}, \end{aligned} \right. \tag{8}$$

w e $\mathfrak{h}$ risultano funzioni della variabil ecomplessa $z = x_1 + ix_2$, la w dipendendo eventualmente anche da x_3.

La integrazione del sistema (6) si riconduce allora alla integrazione dell'unica equazione

$$w'(z; x_3) = \eta + w(z; x_3)\, \mathfrak{h}(z),$$

l'apice denotando derivazione rispetto all'argomento z.

Da questa equazione si deduce che w deve essere della forma

$$w = \eta \{ \alpha(z) + x_3 \beta(z) \},$$

α e β dovendo soddisfare alle equazioni

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha' &= 1 + \alpha \mathfrak{h}, \\ \beta' &= \beta \mathfrak{h}. \end{aligned} \right. \tag{9}$$

Scelta ad arbitrio una delle tre funzioni $\alpha, \beta, \mathfrak{h}$, le altre due restano ovviamente determinate a meno di una costante, per mezzo di quadrature evidenti. Converrà scegliere ad arbitrio α: la prima delle (9) fornisce così la conoscenza di $\mathfrak{h}$. Posto allora

$$\mathcal{H}(z) = \int \mathfrak{h}(z)\, dz = u + iv,$$

risulta

$$\beta = c_1 e^{\mathcal{H}(z)} \quad ; \quad \mathfrak{h}(z) = \frac{\partial u}{\partial x_1} - i \frac{\partial u}{\partial x_2}$$

e, in virtù della seconda delle (8),

$$h = u + c_2,$$

c_1 e c_2 denotando delle costanti.

Restano così caratterizzate tutte le soluzioni della classe A).

4. Veniamo ora al caso B), in cui deve ritenersi $\frac{\partial h}{\partial x_3} \neq 0$. Dalle prime due delle (2) si deduce

$$\frac{1}{W}\frac{\partial h}{\partial x_3} = \zeta(x_3), \tag{10}$$

con ζ funzione della sola x_3, essenzialmente diversa da zero.

Con riferimento alla metrica (1), ricordiamo che

$$\frac{1}{H_3 H_1}\frac{\partial H_1}{\partial x_3}\ ;\quad \frac{1}{H_3 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x_3}$$

sono gli inversi dei raggi principali di curvatura delle superficie $x_3 = \text{cost.}$ lungo le linee di curvatura [1] e [2] rispettivamente. Dalle (10) scende quindi che, nel nostro caso, le superficie $x_3 = \text{cost.}$ sono sfere dello spazio curvo S_3, con curvatura eguale a ζ^2.

La (10) può servire alla determinazione di W quando sia noto h.

Per determinare h servono le (2) e (3), dalle quali si sia eliminato W e ω mediante le (10) e (5). Delle dette sei equazioni, due sono identicamente soddisfatte, una apparisce come conseguenza delle altre e le rimanenti sono:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial h}{\partial x_1}\frac{\partial h}{\partial x_2} = \Phi(x_1, x_2), \\ &2\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} - \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)^2 + \zeta^2 e^{2h} = 2(\Psi + \theta), \\ &2\frac{\partial^2 h}{\partial x_3^2} - \left(\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2 + \zeta^2 e^{2h} = -2(\Psi + \theta), \end{aligned}\right. \tag{11}$$

nelle quali equazioni $\theta = \int \zeta\eta\, dx_3$; Φ e Ψ sono due funzioni, *a priori* arbitrarie, dei soli argomenti x_1 e x_2. Formando le condizioni di integrabilità, si trova

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{\partial \Psi}{\partial x_2}\ ;\quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_1},$$

cioè le due funzioni Φ e Ψ devono essere armoniche associate. Soddisfatta questa condizione, per teoremi generali ben noti, il sistema (11) ammette una sola soluzione, dipendente da tre costanti arbitrarie (in generale funzioni di x_3).

Il sistema (11) caratterizza tutti i ds^2 della classe B). Abbiamo quindi anche qui una infinità di ds^2 soddisfacenti alle condizioni poste, il grado di arbitrarietà essendo quello di una funzione armonica.

Spero di esaurire la discussione del sistema (11) nella redazione della Memoria *in extenso* del presente lavoro.

Matematica. — *Nuove regole per la riduzione degli integrali multipli generalizzati di Riemann.* Nota II di MAURO PICONE, presentata dal Socio L. BIANCHI [1].

Si ha, inversamente, il

TEOREMA II. — *Se la funzione f è commutabile in* G, *essa possiede un integrale generalizzato* (R) *esteso al dominio* E, *ed è*

$$(L)\int_G f\,dP = (R)\int_E f\,dP\,.$$

Si ha invero

$$(L)\int_G f\,dP = \lim_{mA=mG}\left\{(L)\int_A f\,dP\right\} = \lim_{mA=mG}\left\{(R)\int_A f\,dP\right\}.$$

Possiamo, dopo i teoremi I e II, enunciare il

TEOREMA III. — *Se l'insieme* F *in un dominio* E *dei punti singolari per l'integrabilità* (R) *di una funzione f è misurabile* (J), *condizione necessaria e sufficiente affinchè la funzione f ammetta un integrale generalizzato* (R) *esteso ad* E, *è che essa sia sommabile in* $G = E - F$. *Si avrà allora*

$$(R)\int_E f(P)\,dP = \lim_{mA=mG}\int_A f(P)\,dP = (L)\int_G f(P)\,dP\,.$$

3. Si consideri una particolare successione, avente per limite $G - H$, di dominii

$$A_1\,,\,A_2\,,\dots,\,A_n\,,\dots \tag{3}$$

tutti contenuti in G e, ciascuno, contenente il precedente. Può darsi che la successione

$$\int_{A_1} f(P)\,dP\,,\dots,\int_{A_n} f(P)\,dP\,,\dots \tag{6}$$

ammetta un limite determinato e finito, senza che la funzione f possieda un integrale generalizzato (R) esteso ad E; è però evidente che, se f possiede un tale integrale, poichè $\lim_{n=\infty}(mA_n) = mG$, esiste il limite della successione (6), ed esso è l'integrale indicato.

[1] Pervenuta all'Accademia il 25 settembre 1919.

Sussiste però il teorema, talvolta utile in pratica:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la funzione f possieda un integrale generalizzato (R) *esteso ad* E, *è che esista una particolare successione* (3) per cui

$$\int_{A_n} |f(\mathrm{P})|\, d\mathrm{P} \tag{7}$$

sia limitato rispetto ad n.

La condizione è evidentemente necessaria. Dimostriamone la sufficienza. Se l'integrale (7) è limitato rispetto ad n, poichè esso non decresce al crescere di n, comunque si assegni un numero positivo ε, si potrà determinare un valore ν di n tale che, qualunque sia il numero intiero e positivo μ, risulti:

$$\int_{A_{\nu+\mu}} |f(\mathrm{P})|\, d\mathrm{P} - \int_{A_\nu} |f(\mathrm{P})|\, d\mathrm{P} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8}$$

Poichè $|f|$ è integrabile (R) in A_ν, esiste un numero positivo δ tale che, per ogni dominio A, contenuto in A_ν e di misura non superiore a δ, sia

$$\int_A |f(\mathrm{P})|\, d\mathrm{P} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dico che allora (e ciò dimostra il nostro teorema), per ogni dominio A contenuto in G e di misura non superiore a δ, risulta

$$\int_A |f(\mathrm{P})|\, d\mathrm{P} < \varepsilon. \tag{9}$$

Ed invero, esisterà sempre un valore di μ tale che A sia contenuto in $A_{\nu+\mu}$. Poniamo $A' = A_\nu A$, $A'' = A - A'$; si avrà

$$\int_A |f(\mathrm{P})|\, d\mathrm{P} = \int_{A'} |f(\mathrm{P})|\, d\mathrm{P} + \int_{A''} |f(\mathrm{P})|\, d\mathrm{P},$$

$$\int_{A'} |f(\mathrm{P})|\, d\mathrm{P} < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\int_{A''} |f(\mathrm{P})|\, d\mathrm{P} \leq \int_{A_{\nu+\mu} - A_\nu} |f(\mathrm{P})|\, d\mathrm{P} =$$

$$= \int_{A_{\nu+\mu}} |f(\mathrm{P})|\, d\mathrm{P} - \int_{A_\nu} |f(\mathrm{P})|\, d\mathrm{P} < \frac{\varepsilon}{2},$$

e quindi la (9).

4. Per la riduzione dell'integrale generalizzato (R) di f esteso al dominio E, cominciamo dall'osservare che se si aggiungono a $\mathrm{G} = \mathrm{E} - \mathrm{F}$ i

punti della frontiera di F comuni a quella di G, otteniamo un dominio E′ di misura eguale a quella di G, ed è

$$(R)\int_{E} f(P)\,dP = (R)\int_{E'} f(P)\,dP = (L)\int_{E'} f(P)\,dP\,.$$

L'insieme dei punti singolari per l'integrabilità (R) di f in E′ è un insieme [chiuso di misura (J) nulla] contenuto nella frontiera di E′. Possiamo pertanto limitarci a considerare un integrale generalizzato (R) esteso ad un dominio E, per una funzione f per cui l'insieme F dei punti singolari per la sua integrabilità (R) è contenuto nella frontiera di E.

Ci limiteremo anche, per brevità, a considerare il caso dei dominii E a due dimensioni, essendo immediata l'estensione al caso di un numero qualunque di dimensioni.

Diciamo Δ un rettangolo *chiuso*, a lati paralleli agli assi coordinati, limitato dalle rette $x = a_1$, $x = a_2$; $y = b_1$, $y = b_2$, contenente nel suo interno il dominio E. Prolunghiamo la funzione f all'esterno di E ed in tutto Δ, dando ad f il valore *zero* in ogni punto di Δ esterno ad E. È evidente che la funzione f è integrabile (R) in ogni dominio Δ contenuto nell'insieme $\Delta - F$ e che l'insieme dei punti singolari in Δ per l'integrabilità (R) della f è sempre l'insieme F dei punti singolari in E. Se f possiede un integrale generalizzato (R) esteso ad E, possiede anche un tale integrale esteso a Δ e viceversa e si ha

$$(R)\int_{E} f(P)\,dP = (R)\int_{\Delta} f(P)\,dP.$$

Possiamo dunque ulteriormente limitarci a considerare, in luogo del dominio E, un rettangolo chiuso $\Delta\,(x = a_1\,, x = a_2\,;\, y = b_1\,, y = b_2)$ per il quale l'insieme dei punti singolari in Δ per l'integrabilità (R) della funzione f è un insieme chiuso F, interno a Δ e di misura (J) nulla.

Non perderemo però di vista il dominio E.

Facciamo la seguente ipotesi:

I p o t e s i I_x. — *Se si esclude un insieme* X′ *di valori di* ξ *in* (a_1, a_2) *di misura* (*lineare* J) *nulla, l'insieme dei punti singolari in* (b_1, b_2) *per l'integrabilità* (R) *della funzione* $f(\xi, y)$ *è di misura* (*lineare* J) *nulla.*

Se f ammette un integrale generalizzato (R) esteso a Δ, essa è, per il teorema III, sommabile in Δ; ma allora, per il teorema di Fubini, $f(x, y)$ è, rispetto a y, sommabile in (b_1, b_2), per ogni valore di x in (a_1, a_2) fuori di un insieme X″ di misura (lineare) nulla. Ne segue, per il teorema III, che $f(x, y)$, per ogni valore di x in (a_1, a_2), fuori di X′ e di X″, ammette un integrale generalizzato (R) esteso a (b_1, b_2):

$$\varphi(x) = (R)\int_{b_1}^{b_2} f(x, y)\,dy\,.$$

La funzione $\varphi(x)$ è, di nuovo per il teorema di Fubini, comunque se ne completi la definizione in $X' + X''$, sommabile in (a_1, a_2), e si ha

$$(R)\int_{\Delta} f(P)\,dP = (L)\int_{\Delta} f(P)\,dP = (L)\int_{a_1}^{a_2} \varphi(x)\,dx.$$

Aggiungiamo ora l'ulteriore ipotesi:

Ipotesi II_x. — *L'insieme dei punti singolari in* (a_1, a_2) *per la integrabilità* (R) *della funzione* $\varphi(x) = (R)\int_{b_2}^{b_1} f(x, y)\,dy$ *è di misura* (*lineare* J) *nulla.*

Ne segue, in virtù del teorema III, che la funzione $\varphi(x)$ possiede un integrale generalizzato (R) esteso a (a_1, a_2), e che

$$(L)\int_{a_1}^{a_2} \varphi(x)\,dx = (R)\int_{a_1}^{a_2} \varphi(x)\,dx.$$

Si ha dunque il

Teorema IV. — *Se l'insieme dei punti singolari nel rettangolo* Δ *per l'integrhbilità* (R) *della funzione* $f(x, y)$ *è di misura* (J) *nulla, mentre, nelle ipotesi* I_x *e* II_x, *la* $f(x, y)$ *ammette un integrale generalizzato* (R) *esteso a* Δ, *sussiste la formola di riduzione*

$$\iint_{\Delta} f(x, y)\,dx\,dy = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} f(x, y)\,dy, \tag{10}$$

ove i segni di integrale sono di integrale generalizzato (R).

Ritornando al dominio E si ha, in particolare, il teorema:

Designino a_1 *e* a_2 *i limiti inferiore e superiore della* x *per i punti del dominio* E, *e supponiamo che, se si esclude un insieme di valori di* ξ *in* (a_1, a_2) *di misura* (*lineare* J) *nulla, la sezione* $\lambda(\xi)$ *di* E, *con la retta* $x = \xi$, *sia un insieme misurabile* (J); *allora se, nelle ipotesi* I_x *e* II_x, *la funzione* $f(x, y)$ *ammette un integrale generalizzato* (R) *esteso a* E, *si ha:*

$$\iint_{E} f(x, y)\,dx\,dy = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\lambda(x)} f(x, y)\,dy,$$

ove i segni di integrale sono di integrale generalizzato (R).

Indicheremo con *ipotesi* I_y e II_y le ipotesi i cui enunciati si ottengono da quelli delle ipotesi I_x e II_x scambiando l'ufficio dell'asse x con quello dell'asse y. Si ha il seguente teorema di invertibilità dell'ordine di integrazione:

Se l'insieme dei punti singolari nel rettangolo Δ *per l'integrabilità* (R) *della funzione* $f(x, y)$ *è di misura* (J) *nulla, mentre, nelle ipotesi* I_x *e* II_x, I_y *e* II_y, *la funzione* $f(x, y)$ *ammette un integrale generalizzato* (R) *esteso a* Δ, *si ha*

$$\int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_2}^{b_1} f(x, y)\,dy = \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{a_1}^{a_2} f(x, y)\,dx,$$

ove i segni di integrale sono di integrale generalizzato (R).

Matematica. — *Risoluzione dell'equazione di Fredholm con serie assolutamente sommabili del Borel.* Nota di GUSTAVO SANNIA, presentata dal Socio ENRICO D'OVIDIO.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Deformazioni simmetriche dei corpi elastici.* Nota di ROCCO SERINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

È ben noto il teorema del Cerruti [1], secondo il quale le componenti dello spostamento di un corpo elastico omogeneo ed isotropo si possono sempre esprimere mediante tre sole funzioni armoniche.

Nel caso delle deformazioni simmetriche è naturale che tali componenti si esprimano mediante due sole funzioni armoniche: scopo della presente breve Nota è di dimostrare questo fatto, calcolando le effettive espressioni delle componenti.

Mi servo a tal uopo delle note formole del Beltrami relative alle funzioni armoniche simmetriche e loro associate.

§ 1. *Funzioni armoniche simmetriche e loro associate* [2]. — Sia V una funzione armonica, simmetrica rispetto all'asse z, quindi funzione soltanto di z e di $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Essa soddisferà all'equazione

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial V}{\partial z}\right)=0. \tag{1}$$

Si può, introducendo una funzione ausiliaria W, sostituire alla (1) il sistema di equazioni

$$\frac{\partial W}{\partial r}=r\frac{\partial V}{\partial z}, \quad \frac{\partial W}{\partial z}=-r\frac{\partial V}{\partial r}, \tag{2}$$

dalle quali si può ricavare la (1). Data V, la W si ottiene con quadrature; cioè

$$W=\int\left(r\frac{\partial V}{\partial z}\,dr-r\frac{\partial V}{\partial r}\,dz\right).$$

[1] Vedi R. Marcolongo, *Teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici*, cap. VI, § 8. Milano, Hoepli, 1904.

[2] Vedi E. Beltrami, *Sulle funzioni potenziali di sistemi simmetrici intorno ad un asse*, Rend. Istituto lombardo, agosto 1878; oppure *Opere*, tomo III.

La W si dice associata alla V; e quando questa rappresenti un potenziale (nello spazio esterno alle masse), la $W = \text{cost}$, è l'equazione delle linee di forza. Si ha inoltre

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial z}\right)=0, \tag{3}$$

e di qui, oppure direttamente dalle (2),

$$\Delta^2 W = 2\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{4}$$

Nella interpretazione precedente per V si ha, nello spazio esterno alle masse,

$$\Delta^4 W = 0. \tag{5}$$

§ 2. *Le equazioni indefinite per l'equilibrio di un corpo elastico. Deformazioni simmetriche.* — Si abbia un corpo, non soggetto a forze di massa, deformato simmetricamente rispetto all'asse z: le componenti u, v, w dello spostamento soddisfanno allora a quattro equazioni indefinite che si possono scrivere in due modi diversi: esse sono (¹)

$$\left\{\begin{aligned}&(\Omega^2-\omega^2)\frac{\partial\theta}{\partial x}+\omega^2\Delta^2 u=\Omega^2\frac{\partial\theta}{\partial x}+\omega^2\left(\frac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{T}_3}{\partial y}\right)=0,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ &(\Omega^2-\omega^2)\frac{\partial\theta}{\partial z}+\omega^2\Delta^2 w=\Omega^2\frac{\partial\theta}{\partial z}+\omega^2\left(\frac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{T}_2}{\partial x}\right)=0,\\ &\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z},\end{aligned}\right. \tag{6}$$

dove $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$ sono le doppie componenti della rotazione di ogni particella. Si deduce dalle (6), come è ben noto,

$$\Delta^2\theta = 0; \tag{7}$$

quindi, supposta nota θ (che sarà funzione simmetrica), e detta Θ la sua associata, la terza delle (6) dà immediatamente, per la (4),

$$w = -\frac{\Omega^2-\omega^2}{2\omega^2}\Theta + V, \tag{8}$$

con V funzione armonica simmetrica.

Per calcolare u, v osserviamo che, per la simmetria, dovrà essere

$$u = xf(r, z), \quad v = yf(r, z), \tag{9}$$

(¹) Vedi Marcolongo, loc. cit., cap. VI, § 1.

e quindi

$$
(10)\qquad
\begin{cases}
\mathfrak{T}_1 = \dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z} = \dfrac{y}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r} - y\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{y}{r}\,\mathfrak{T} \\[2ex]
\mathfrak{T}_2 = \dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x} = x\dfrac{\partial f}{\partial z} - \dfrac{x}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r} = -\dfrac{x}{r}\,\mathfrak{T} \\[2ex]
\mathfrak{T}_3 = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0
\end{cases}
$$

essendo

$$
(11)\qquad \mathfrak{T} = \frac{\partial w}{\partial r} - r\,\frac{\partial f}{\partial z}\,.
$$

Se sostituiamo le espressioni (10) nelle (6) della seconda forma, troviamo (siccome le prime due dànno, come è evidente, la stessa relazione)

$$
(6')\qquad
\begin{aligned}
&\Omega^2\frac{\partial\theta}{\partial r} - \omega^2\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial z} = 0\,,\\
&\Omega^2\frac{\partial\theta}{\partial z} + \omega^2\frac{1}{r}\frac{\partial(r\mathfrak{T})}{\partial r} = 0\,.
\end{aligned}
$$

Queste, scritte sotto la forma equivalente

$$
\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{\omega^2}{\Omega^2}\,r\mathfrak{T}\right) = r\,\frac{\partial\theta}{\partial z}\quad,\quad \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\omega^2}{\Omega^2}\,r\mathfrak{T}\right) = -\,r\,\frac{\partial\theta}{\partial r}\,.
$$

dànno, osservando le (2) [1],

$$
(12)\qquad \frac{\omega^2}{\Omega^2}\,r\mathfrak{T} = -\,\Theta\,.
$$

cosicchè, essendo nota $\mathfrak{T}$, si può ora ricavare f risolvendo l'equazione differenziale immediatamente integrabile (11). Per eseguire in modo più elegante tale integrazione, occorre vedere col Beltrami come si costruisca, partendo dalla funzione simmetrica armonica V, una doppia serie di funzioni armoniche e relative associate.

§ 3. *Serie di funzioni armoniche simmetriche e relative associate* [2]. Il Beltrami osserva che le (2) possono essere interpretate separatamente come condizioni di integrabilità; e come tali possono essere usate per definire due nuove funzioni V_1, W_1, che hanno ancora il carattere di funzione

[1] Vedi Cerruti, *Ricerche sull'equilibrio dei corpi elastici isotropi*, Memorie Acc. Lincei, XIII, 1882.

[2] Vedi E. Beltrami, loc. cit.

armonica e relativa associata. La prima di esse dà

$$(13)\qquad V\,dz - \frac{W}{r}\,dr = dV_1\,,$$

e la seconda

$$(13')\qquad W\,dz + Vr\,dr = dW_1\,.$$

Si ha così

$$(14)\qquad V = \frac{\partial V_1}{\partial z}\;,\quad W = -r\frac{\partial V_1}{\partial r}$$

$$(14')\qquad V = \frac{1}{r}\frac{\partial W_1}{\partial r}\;,\quad W = \frac{\partial W_1}{\partial z}\,,$$

quindi

$$(15)\qquad \frac{\partial W_1}{\partial r} = r\frac{\partial V_1}{\partial z}\;,\quad \frac{\partial W_1}{\partial z} = -r\frac{\partial V_1}{\partial r}\,;$$

si deduce di qui, come anche dalle (2), che V_1 è armonica e W_1 ne è la funzione associata. La serie si può continuare, deducendosi dalle V_1, W_1 altre due funzioni V_2, W_2; e così di seguito. Pel nostro scopo basta limitarci alle V_2, W_2 che si deducono immediatamente dalle relazioni precedenti. Si osserverà che, data V, si deducono con successive integrazioni di differenziali esatti tutte le altre funzioni W, V_1, W_1, ecc.; mentre, dati V_2 o W_2, si ritorna indietro nella serie con sole derivazioni.

§ 4. *Applicazione alle deformazioni simmetriche.* — Per ottenere il tipo generale di deformazione simmetrica, ci rimane da trovare la f. Essa è data dalla equazione differenziale (11) dove $\mathfrak{T}$ è nota per la (12) (avendo supposto data θ e quindi Θ). Avremo così, tenendo conto della (8),

$$(16)\qquad -\frac{\Omega^2}{\omega^2}\frac{1}{r}\Theta = -\frac{\Omega^2-\omega^2}{2\omega^2}\frac{\partial\Theta}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial r} - r\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Usando dei risultati ottenuti nei §§ 1 e 3 potremo scrivere

$$\Theta = \frac{\partial\Theta_1}{\partial z}\;,\quad \frac{\partial\Theta}{\partial r} = r\frac{\partial\theta}{\partial z}\;,\quad \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial z}\,;$$

e quindi

$$r\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\Omega^2}{\omega^2}\frac{1}{r}\frac{\partial\Theta_1}{\partial z} - \frac{\Omega^2-\omega^2}{2\omega^2}\,r\frac{\partial\theta}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial z}.$$

Di qui

$$(16')\qquad f = \frac{\Omega^2}{\omega^2}\frac{1}{r^2}\Theta_1 - \frac{\Omega^2-\omega^2}{2\omega^2}\theta - \frac{1}{r^2}.\,W. + \varphi(r)\,,$$

dove $\varphi(r)$ sarà da determinarsi in modo che le

$$u = xf\;,\quad v = yf\;,\quad w = -\frac{\Omega^2-\omega^2}{2\omega^2}\Theta + V$$

diano

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\theta,$$

ossia che

$$2f+r\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}=\theta. \tag{17}$$

Eseguendo i calcoli si trova che, affinchè sia soddisfatta la (17), deve essere

$$2\varphi(r)+r\varphi'(r)=0,$$

ossia

$$\varphi(r)=Cr^{-2}, \tag{18}$$

con C costante. Questo termine porta nelle u, v i contributi

$$Cxr^{-2} \quad , \; Cyr^{-2},$$

che diventano infiniti per $x=y=0$. Quindi, se il sistema ha punti sull'asse z, deve essere $C=0$. Le (8) (9) (16') [in quest'ultima ponendo $\varphi(\nu)=0$] risolvono il nostro problema mediante le due funzioni armoniche arbitrarie θ, V, tutte le altre deducendosi da queste con quadrature. Si osservi però che, mediante tali operazioni, vengono introdotte costanti arbitrarie. Converrà quindi introdurre altre espressioni per le quali questo inconveniente non si verifichi e nelle quali appaiano esplicitamente le due funzioni armoniche arbitrarie. A tal uopo servono le formole del § 3. Si osservi infatti che, con evidente significato dei simboli, si ha

$$\theta=\frac{\partial\theta_1}{\partial z}=\frac{\partial^2\theta_2}{\partial z^2}, \quad \Theta=-r\frac{\partial\theta_1}{\partial r}=-r\frac{\partial^2\theta_2}{\partial r\,\partial z}, \quad \Theta_1=-r\frac{\partial\theta_2}{\partial r}, \tag{19}$$

$$V=\frac{\partial V_1}{\partial z} \quad , \quad W=-r\frac{\partial V_1}{\partial r}. \tag{20}$$

Si vede quindi che tutto si può osprimere mediante le due funzioni armoniche simmetriche θ_2, V_1 che chiameremo rispettivamente Φ, Ψ.

Quindi, concludendo: « Il tipo generale di deformazione simmetrica si ottiene dalle formole

$$\left\{\begin{aligned} &u=xf(r,z)\;,\; v=yf(r,z)\;,\; w=-\frac{\Omega^2-\omega^2}{2\omega^2}\,r\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\,\partial z}+\frac{\partial\Psi}{\partial z}\\ &f=-\frac{\Omega^2}{\omega^2}\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}-\frac{\Omega^2-\omega^2}{2\omega^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}\end{aligned}\right. \tag{21}$$

dove

$$\Delta^2\Phi(r,z)=0 \quad , \quad \Delta^2\Psi(r,z)=0$$

nei punti occupati dal corpo che si deforma.

Astronomia. — *Nuovo calcolo dell'assorbimento totale dell'atmosfera solare.* Nota del prof. Alessandro Amerio, presentata dal Corrisp. M. Cantone.

Nelle mie *Ricerche sullo spettro e sulla temperatura della fotosfera solare* [1] studiando la distribuzione dell'energia totale sul disco solare, dedussi (vedi pag. 57) che l'atmosfera trasmette il 55,6 % ed assorbe il 44,4 % della energia che viene irradiata dalla fotosfera.

Più oltre, nella stessa Memoria, (vedi pag. 63), sono calcolati i valori degli assorbimenti esercitati dall'atmosfera solare sulle singole radiazioni emesse dalla fotosfera e che giungono a noi.

I valori trovati sono i seguenti:

Lunghezza d'onda (in μ)	Energia % assorbita	Energia % trasmessa
0,430	67,0	33,0
0,497	61,6	38,4
0,537	57,9	42,1
0,589	53 4	46,6
0,710	45,8	54,2
0,785	42.3	57,7
1,035	37.5	62,5
1,24	34,1	65.9
1,72	29,4	70,6
2,14	26,0	74,0
2,91	22,0	78,0
3,35	19,4	80,6

Da questi dati, e tenendo conto della distribuzione dell'energia nello spettro della fotosfera solare che si trova nella stessa memoria (tav. VI, curva III), si possono dedurre, per via completamente indipendente dalla prima, i valori delle frazioni di energia totale trasmessa e assorbita.

Se infatti moltiplichiamo le percentuali di energia trasmessa per le ordinate che nello spettro della fotosfera solare rappresentano l'energia irradiata per le lunghezze d'onda che si considerano, otteniamo le ordinate dello spettro solare normale corrispondenti alle stesse lunghezze d'onda [2].

[1] Memorie della R. Accademia dei Lincei, 1914.

[2] Si osservi che questa via per determinare lo spettro solare è solo apparentemente più semplice di quella da me seguita in altra Nota (Rend. Lincei, vol. 24). In

Questi dati sono raggruppati nella tabella seguente che nella seconda e quarta colonna contiene numeri proporzionali rispettivamente alle energie dello spettro della fotosfera e dello spettro solare, per le lunghezze d'onda segnate nella prima colonna.

Lunghezza d'onda	Spettro fotosfera	Percentuale trasmessa	Spettro solare
0,400	162,0	30,0	48,5
0,430	178,3	33,0	58,8
0,497	160,0	38,4	61,4
0,537	145,0	42,1	61,0
0,589	126,6	46,6	59,0
0,710	91,0	54.2	49,3
0,885	76,2	57,7	44,0
1,035	40,1	62,5	25,1
1,24	23,6	65,9	15,5
1,72	8.2	70,6	5,8
2,14	4,2	74,0	3,1
2,91	1,9	78,0	1,5
3,35	1,3	80,6	1,0

I numeri della prima riga sono ottenuti per extrapolazione dai dati sperimentali.

Se ora disegnamo nella stessa scala (vedi figura) lo spettro della fotosfera solare e quello del sole mediante i dati della tabella, otteniamo gli spettri I e II, e se misuriamo le aree comprese tra le singole curve rappresentanti gli spettri e l'asse delle ascisse, e quella compresa tra le due curve, otteniamo rispettivamente dei valori proporzionali alle totali energie emesse dalla fotosfera o trasmesse dall'atmosfera o infine da questa assorbite, nel campo delle lunghezze d'onda che si considerano.

Le misure vennero fatte con un planimetro di Amsler ed i risultati ottenuti sono i seguenti:

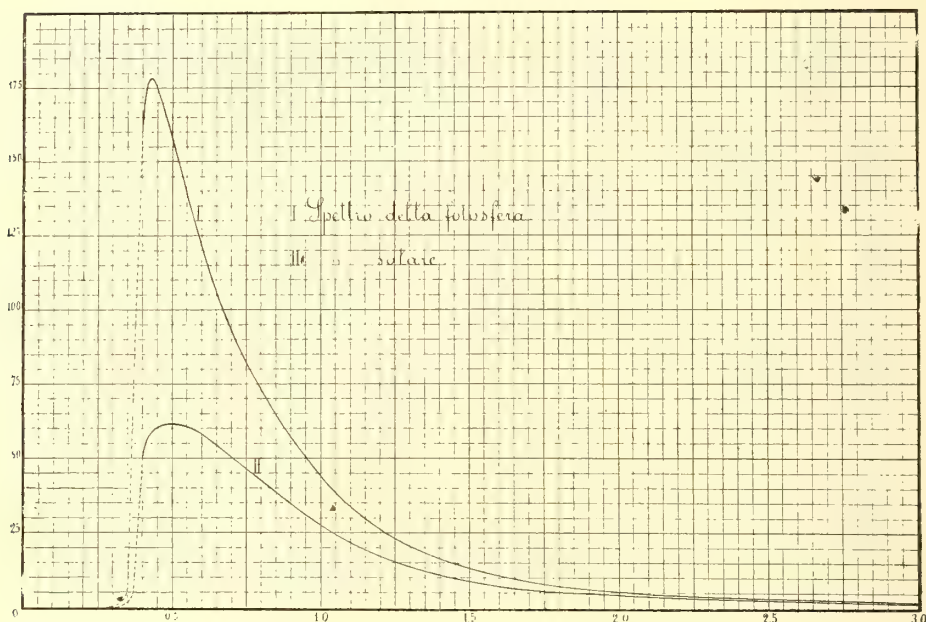
area abbracciata dallo spettro della fotosfera . .	cm^2	84,7
area abbracciata dallo spettro solare	»	43,9
area compresa	»	40,8

---

realtà poichè vi si deriva lo spettro solare da quello della fotosfera, si fa in definitiva il giro vizioso di determinare l'assorbimento dell'atmosfera solare per trovare lo spettro della fotosfera eliminandone l'effetto dagli spettri di alcuni punti del disco solare, per poi da questo spettro dedurre quello solare introducendo l'effetto dell'assorbimento un'altra volta. Questa via, che qui si segue solo per l'ultima parte, è però più comoda e più conveniente in questo caso speciale, nel quale si devono paragonare tra loro i due spettri.

Facendo il rapporto fra la seconda e la prima si ha la percentuale di energia totale trasmessa; il rapporto tra la terza e la prima ci darà l'assorbimento totale.

I risultati sono:

energia totale trasmessa	51,8 %
» » assorbita	48,2 »

Se si osserva che questo valore dell'assorbimento è stato ottenuto per una via che non ha alcun rapporto sperimentale con quella seguìta precedentemente, si vede che esso è una bella conferma del risultato sopradetto.

Il metodo seguìto nella Memoria si potrebbe chiamare *sintetico*, mentre questo sarebbe *analitico*.

E poichè il primo metodo seguìto è tra i due il più diretto e il più esatto, è ovvio che al risultato ad esso dovuto si dia il maggior peso e si possa quindi conchiudere che l'assorbimento totale esercitato dall'atmosfera solare durante le mie ricerche, e nel campo delle radiazioni che arrivano a noi, era del 45 % circa.

Fisica. — *Sull'attrito interno del cobalto in campo magnetico variabile* (1). Nota I del prof. ERNESTO DRAGO, presentata dal Corrispondente M. CANTONE.

I. Con lo scopo di recare nuovo contributo al capitolo complesso e delicato della fisica molecolare ho voluto proseguire le mie ricerche sull'attrito interno del ferro e del nichel (2) in campo magnetico.

E poichè nessuno si è mai occupato di fare esperienze sull'attrito interno del cobalto per la difficoltà che offre questo metallo ad essere tirato in fili, così credetti opportuno eseguire delle ricerche in proposito rivolgendomi intanto a varie officine di lavorazione dei metalli per avere fili di cobalto.

Essendo riusciti infruttuosi i tentativi numerosi fatti per raggiungere lo scopo decisi di costruire io stesso i fili necessarî nella maniera seguente (3):

Da una lamina di cobalto Kahlbaum dello spessore di mm. 0,3 feci tagliare con le cesoie strisce sottili che poi ridussi con ogni accuratezza in prismi a base quadrata, stringendo ciascuna striscia tra due grosse aste prismatiche d'acciaio ben lavorate e limando quindi uniformemente la striscia stessa. Fissai dopo in maniera opportuna il prisma ottenuto per un estremo al disco autocentrante del tornio e per mezzo di carta smerigliata lo ridussi a filo cilindrico del diametro di mm. 0,3, Non insisto sui dettagli tecnici necessarî per avere il filo suddetto di diametro sufficientemente uniforme (4), ma mi preme per ora soltanto far notare che i risultati soddisfacenti ottenuti richiesero parecchi mesi di attento lavoro.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto fisico della R. Università di Catania, già diretto dal compianto prof. Giovan Pietro Grimaldi.

(2) Relativamente a tali ricerche W. Brown dice : « With respect to the internal friction of materials, I would attention to a very interesting paper on *the internal friction of nichel in a variable magnetic field* by prof. Ernesto Drago of the » R. Università of Catania, Italy.

Vedi in « the scientific Proceedings of the Royal Dublin Society », vol. XV, n. 1, 1916, pag. 12.

(3) Grummach ha eseguito ricerche relative all'influenza della magnetizzazione trasversale sulla conducibilità elettrica dei metalli adoperando strisce di cobalto di 0,2 mm. di spessore e 0,5 di larghezza, (« Annalen der Physik und Chemie XXII, 1907. pag. 141 »).

(4) Numerose misure da me fatte con un compasso a vite di Palmer mostrarono che soltanto in qualche punto il filo aveva il diametro di mm. 0,28.

Ottenuto così il filo lungo cm. 20,7 lo sospesi nello stesso solenoide già adoperato per le mie ricerche sull'attrito interno del nichel [1], sottoponendolo alla stessa carica di gr. 218,6 ovvero quasi gr. $3,1 \times 10^5$ per cm^2.

Quindi servendomi della stessa disposizione sperimentale utilizzata nelle citate ricerche feci esperienze circa l'influenza esercitata dalle scariche oscillatorie sull'attrito interno del filo predetto

Al solito dapprima si fecero molte osservazioni di prova lasciando trascorrere il tempo necessario perchè il filo *nuovo* si accomodasse nello stato normale, contando i numeri d'oscillazione e le rispettive ampiezze in divisioni della scala a cominciare dalla divisione 400 corrispondente all'ampiezza angolare di 13° 40′ [2], come si era fatto per il filo di nichel.

Il filo di cobalto essendo stato sospeso il 12 agosto 1917, si credette di raggiungere quasi lo stato normale il 20 dello stesso mese.

Fu allora che si determinò la rigidità e s' incominciarono le esperienze definitive [3] di cui alcuni risultati ottenuti sono consegnati nella seguente:

TABELLA I [4].

Filo crudo di cobalto. Rigidità $= 900 \times 10^9$ [C. G. S].

NUMERO delle oscillazioni semplici	AMPIEZZA DELLE OSCILLAZIONI in divisioni della scala corrispondente ai campi magnetici:			
	terrestre	oscillatorio continuo	costante invertito 173 gauss	oscillatorio intermittente
0	400	400	400	400
5	393	388	386	381
10	386	376	371	363
15	379	365	357	346
20	372	353	343	329
25	366	343	331	312
30	360	334	319	297

[1] Rend. Acc. Lincei, 2° sem., luglio 1915, pag. 12; *Nuovo Cimento,* vol. X, 1916, pag. 448.

[2] Torsione per cm $= 39' 36''$.

[3] Come in tutte le precedeuti ricerche sull'attrito interno del ferro e del nichel nel campo magnetico, l'influenza della temperatura era bene studiata ed eventualmente eliminata.

[4] I valori della rigidità dei fili di cobalto non si trovano nè nelle tabelle del Landolt nè nella raccolta di costanti fisiche della Società francese di fisica. Con un cilindro di cobalto ricotto lungo 22 cm. e del diametro di 1,082 cm. Honda trovò nel 1902 per il modulo di rigidità il valore $6,04 \times 10^{11}$ e recentemente valori compresi fra 7,63 e $4,71 \times 10^{11}$. The Science Reports of the Tohoku Imp. University. April 1919, pag. 54.

dove nella prima colonna è contenuto il numero delle oscillazioni semplici, nella seconda l'ampiezza d'oscillazione corrispondente quando il filo oscillava nel campo magnetico terrestre, nella terza l'ampiezza medesima quando il filo oscillava nel campo prodotto dalle scariche oscillatorie, nella quarta l'ampiezza predetta quando si destava nella spirale magnetizzante il campo magnetico costante di 173 gauss soltanto al principio ed alla fine di ogni oscillazione semplice, avendo cura d'invertire alternativamente la corrente

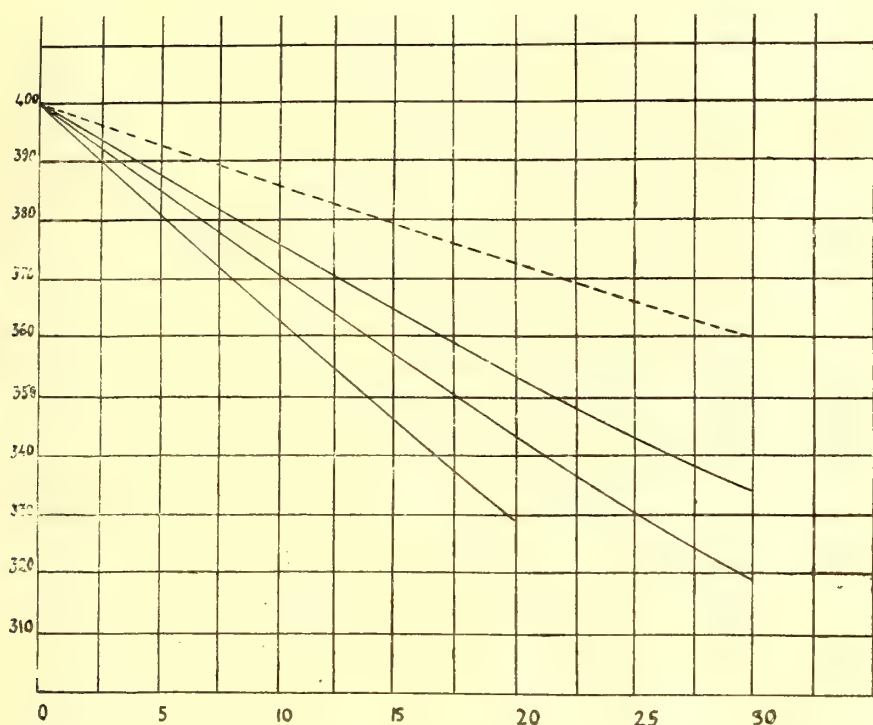



Fig. 1

come già facevo nelle mie analoghe ricerche sul nichel, nella quinta colonna infine è contenuta l'ampiezza d'oscillazione corrispondente quando nel solenoide s'inviavano i treni di scariche oscillatorie soltanto al principio ed alla fine di ogni oscillazione semplice eseguita dal filo.

Nel circuito delle scariche oscillatorie era inserita la capacità di $162 \times 10^{-4}\, \mu . \mathrm{F}$, e si trovò conveniente di mettere dentro una grande cassa piena d'acqua fredda l'interruttore Wehnelt per avere un funzionamento regolare del medesimo.

La distanza esplosiva era di mm. 0,25, il coefficiente di autoinduzione del circuito anzidetto era uguale a 39617 [C. G. S.] e perciò mediante la

formola $I_M = V \sqrt{\frac{C}{L}}$ si poteva calcolare l'intensità massima della corrente oscillatoria [1].

Se si rappresentano sull'asse delle ascisse i numeri delle oscillazioni semplici e sull'asse delle ordinate le ampiezze espresse in divisioni della scala, si ottengono con le cifre della tabella I i diagrammi della fig. 1 ove la curva segnata a tratti (curva normale) mostra l'andamento dello smorzamento delle oscillazioni torsionali del filo di cobalto crudo nel campo magnetico terrestre.

Fisica. — *Curve caratteristiche e consumo di potenza negli interruttori funzionanti nel circuito primario di rocchetti di induzione.* Nota di G. C. Trabacchi, presentata dal Socio O. M. Corbino [2].

Se si misura con un wattmetro il rendimento di un apparecchio destinato alla produzione dei raggi X, del tipo di quelli costituiti da un trasformatore direttamente collegato alla linea stradale e munito al secondario di un selettore che invia nell'ampolla tutti gli impulsi nel medesimo verso, e se si confronta tale rendimento con quello di un apparecchio, di potenza paragonabile, ma munito di interruttore al primario, si trova che, per ottenere in una ampolla la medesima erogazione di energia sotto forma di raggi X occorre fornire al primario quantità di energia sensibilmente uguali in ambedue i casi [3].

Da ciò si deduce che ben poca dovrebbe essere la energia spesa nell'interruttore (che manca nel primario degli apparecchi a trasformatore) e poca infatti tale energia si rivela in una misura diretta, eseguita derivando la spirale voltometrica del wattmetro alle lamine dell'interruttore.

Pur essendo sicuro l'ordine di grandezza di questo consumo, sorge il dubbio che le misure possano essere affètte da un errore in meno, dovuto al fatto che, per la impedenza della spirale voltometrica, la corrente assuma in essa i veri valori, corrispondenti alla differenza di potenziale esistente

(1) Per la determinazione del campo magnetico oscillatorio e del relativo smorzamento, vedi Tissot, *Les oscillations électriques*, O. Doin, Paris, pp. 173 e 179.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto fisico della R. Università di Roma.

(3) Ciò risulta da esperienze da me eseguite sui seguenti apparecchi: 1°) apparecchi a contatti giranti e senza interruttore, dei tipi *Reforme* della « Veifa Werke », *Snook* di « Newton e Wright », *Siemens*, *Scotti-Brioschi* di « Gorla »; 2°) apparecchi a interruttore, *Corbino-Trabacchi* di « Balzarini » per corrente continua e alternata, e *Corbino-Trabacchi* di « Balzarini » per corrente trifase, modello 1918.

ai suoi estremi, con un ritardo tale che essi valori non vengano in ciascun istante moltiplicati per i corrispondenti valori della intensità, ma per valori da questa assunti in tempi successivi, e quindi notevolmente più piccoli. Infatti la tensione ha origine ai poli dell'interruttore solo all'inizio del periodo variabile di rottura, durante il quale la intensità della corrente che circola nella spirale amperometrica scende rapidamente verso zero.

Non è sufficiente a tranquillizzarci sulla veridicità delle indicazioni wattmetriche il fatto che, se si misura la potenza complessiva assorbita dall'intero circuito primario e si paragonano i risultati ottenuti con le misure eseguite sulle singole parti, si trovano risultati concordanti. Infatti in queste misure parziali, mentre può essere, per quanto si è detto, errata *in meno* la misura corrispondente alla energia spesa nell'interruttore, si può, per analoghe ragioni, sospettare di errore *in aumento* la lettura corrispondente alla energia spesa nell'induttore del rocchetto. Ed invero, poichè durante il periodo variabile di rottura, la tensione ai poli dell'induttore è tale che (agendo quest'ultimo come generatore) l'equipaggio mobile del wattmetro riceve impulsi che tendono a ricondurlo a zero, mentre durante il periodo variabile di chiusura accade il contrario, ne risulta che, se si ammette la possibilità di un sensibile ritardo nello stabilirsi dei veri valori della corrente nella spirale voltometrica, questo ritardo agirà in modo da diminuire la coppia che tende a far rotare l'equipaggio del wattmetro verso zero e da aumentare invece quella che tende a far crescere la deviazione dello strumento. Infatti tale ritardo tende a dare per moltiplicatori, ai varî valori della corrente voltometrica, dei valori della corrente amperometrica più alti di quelli che in realtà vi corrispondono, in quanto che durante questo periodo la corrente primaria aumenta continuamente.

È scopo della presente Nota di riferire intorno ad una ricerca che ho istituito per chiarire tale questione.

Disponendo di un tubo di Braun-Wehnelt, munito di laminette per esplorare, mediante le deviazioni elettrostatiche del fascetto catodico, le tensioni istantanee esistenti fra punti con esse collegati, le ho connesse con i poli di un interruttore inserito nel circuito primario di un rocchetto di induzione; disponendo le cose in modo che gli spostamenti del fascetto avessero luogo orizzontalmente.

L'interruttore usato era del tipo a getto di mercurio tra lamine contrapposte, racchiuse in una pignatta riempita di gas da illuminazione.

La corrente circolante nel primario veniva fatta passare attraverso una bobina costituita da poche spire di grosso filo, la quale veniva disposta rispetto al tubo di Braun in modo da determinare spostamenti verticali del fascetto.

Facendo agire il tubo Braun, mentre funziona il rocchetto il puntino luminoso generato dal fascetto catodico sullo schermo del tubo descrive una

traiettoria che è la composizione ortogonale dei valori istantanei della tensione esistente ai poli dell'interruttore e della intensità che lo attraversa.

Quando il secondario è aperto, o eroga una debolissima corrente, la curva sopra descritta assume la forma del diagramma 1.

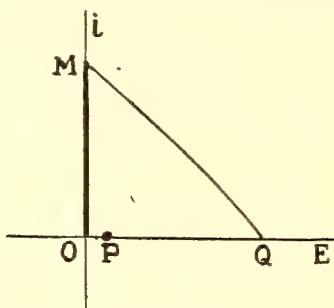



Fig. 1.

O rappresenta il punto di riposo del fascetto catodico, corrispondente ai valori *zero* della tensione e della corrente; allo stabilirsi della corrente, esistendo tra le lamine dell'interruttore un vero corto circuito, la tensione è nulla, e il fascetto sale pertanto lungo l'ordinata che parte da *O*; all'istante della rottura, mentre la corrente scende rapidamente a zero, nasce la tensione, la quale, in virtù dell'autoinduzione (che, per essere il secondario poco carico, è poco attenuata nei suoi effetti dalla presenza di esso) sale fino ad un valore molto superiore a quello della linea, raggiungendo il massimo *OQ* quando la intensità si è quasi annullata. Poi la tensione ridiscende anch'essa fino al valore della tensione di linea, rappresentato nel diagramma dalla posizione *P*, dove si vede indugiare il puntino luminoso durante la pausa che precede la successiva chiusura; a partire dalla quale si ripetono le medesimi vicissitudini.

Man mano che aumenta il carico nel secondario, e cioè man mano che va scemando l'autoinduzione apparente del primario, la salita della tensione di rottura si fa meno rapida, in modo che, per grandi regimi, l'ipotenusa del triangolo *OMQ* tende ad avvicinarsi al lato *MO*.

Poichè, per quanto si sa intorno all'impiego delle laminette per la esplorazione della f. e. m., si ha ragione di ritenere che malgrado la loro capacità apparente, la deviazione elettrostatica del fascetto catodico segua senza ritardo sensibile le variazioni della tensione vera, il diagramma ottenuto ci può servire come termine di confronto nella esplorazione dell'eventuale ritardo nello stabilirsi della corrente nella spirale voltometrica del wattmetro, se si paragona tale diagramma con quello che si ottiene sostituendo alla azione elettrostatica delle laminette quella elettromagnetica di una bobina del tipo di quella voltometrica di un wattmetro.

Ho pertanto sostituito alle laminette, derivate ai poli dell' interruttore, una bobinetta costituita da numerosissime spire accuratamente isolate fra loro con la tecnica in uso nella costruzione delle moderne bobine di induzione, e disposta in modo da agire elettromagneticamente sul fascetto, determinando spostamenti nello stesso piano in cui agivano le laminette. Per evitare ogni azione elettrostatica, un punto della bobina era messo a terra.

Portando la bobina ad una distanza dal tubo tale da avere uno spostamento orizzontale massimo eguale a quello determinato nella precedente esperienza dalle laminette, si ottenevano nei varî casi sopra considerati dei diagrammi che differivano da quelli ottenuti servendosi delle laminette solo per un lieve incurvamento della ipotenusa del triangolo verso l' interno. Ciò denota nella corrente (che, percorrendo la spiralina, dovrebbe rivelarci con gli spostamenti orizzontali del fascetto i valori istantanei della tensione) una lieve tendenza ad assumere con ritardo i valori che corrispondono a quelli della f. e. m. e che ci erano stati rivelati dalla osservazione fatta in precedenza con le laminette.

Tale osservazione, se si riflette che il sistema delle due bobine impiegate nell'ultima esperienza costituisce un sistema simile a quello esistente nel wattmetro, ci tranquillizza notevolmente nei riguardi dei dubbî sorti in principio, rivelandoci che, sebbene la tensione sorga ai poli della spirale voltometrica, derivata ai poli dell' interruttore, assai bruscamente, e cresca fino a valori molto elevati durante il periodo variabile di apertura, il ritardo con cui si raggiungono i varî valori della corrente rispetto alla f. e. m., in una ordinaria spirale voltometrica, non sono tali da dar luogo a errori sensibili nell' impiego del wattmetro in tali condizioni.

Tra le condizioni date dalle laminette e quelle date dalla bobina, come è sopra descritto, si potrebbe fare anche un confronto diretto, componendone ortogonalmente gli effetti; però il trovare che il diagramma della loro composizione abbraccia un'area non perfettamente nulla, come realmente ho osservato in questo caso, potrebbe facilmente trarci in inganno in un apprezzamento quantitativo dell'errore che ci fa commettere l' impiego della spiralina. Basta infatti osservare che l'area abbracciata dal diagramma in questione ci rivela il più lieve ritardo della corrente voltometrica rispetto alla f. e. m. mediante il paragone di due spostamenti della stessa ampiezza e che si compiono ambedue con la stessa grande rapidità, mentre a noi interessa apprezzare *praticamente* il valore di un ipotetico ritardo nello stabilirsi della corrente voltometrica rispetto alle variazioni della intensità della corrente che circola nella spirale amperometrica, ritardo che dalle considerazioni fatte ci si rivela di limitata efficacia.

*
* *

Un'altra esperienza, che permette di rendersi conto della prontezza dello stabilirsi della corrente voltometrica rispetto alla f. e. m. è la seguente: se, lasciando le due bobine, amperometrica e voltometrica, al posto precedentemente occupato, si deriva un condensatore ai poli dell' interruttore, le due bobine saranno percorse, rispettivamente, una dalle oscillazioni della intensità, l'altra da quelle della tensione.

Il diagramma che così si ottiene è quello della fig. 2.

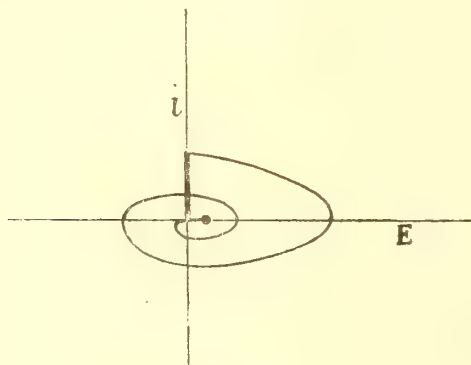



Fig. 2.

Ripetendo la stessa esperienza, ma sostituendo alla spirale voltometrica le laminette, si ottiene una figura praticamente uguale, ma che denota una lieve tendenza dei rami orizzontali a fare un angolo minore con l'asse della tensione, confermando così il risultato sopra riferito.

Si può dunque concludere che il wattmetro può essere impiegato per la misura della potenza spesa in un interruttore funzionante nel primario di un rocchetto di induzione, senza timore che la rapida variabilità degli elementi in giuoco possa dar luogo a gravi errori.

Meteorologia. — *La distribuzione della temperatura sulle pendici dell' Etna.* Nota di F. EREDIA, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH.

Vicino alla sommità del monte Etna e propriamente alla base del cono centrale, che si erge al confine nord del piano del lago, trovansi i locali del R. Osservatorio astrofisico e ivi si effettuano osservazioni meteorologiche quasi continue nei mesi estivi e, compatibilmente con le condizioni di viabilità, nei rimanenti mesi. Le osservazioni raccolte dal 1892 al 1906 furono esaminate in una pubblicazione apparsa qualche anno fa (¹). Da allora le osservazioni si sono continuate, ma con poca regolarità a causa della mancanza di personale adatto e si sono limitate quasi a quei giorni in cui si effettuano scandagli internazionali dell'atmosfera; cosicchè l'aggiunta di queste nuove osservazioni non potrà spostare di molto i valori medî termometrici ottenuti precedentemente, attesa la lunghezza del periodo esaminato.

Sulle pendici dell' Etna trovansi scaglionate diverse stazioni meteorologiche, e alle falde del monte da molto tempo funzionano due osservatorî. L'esame di tutte queste osservazioni raccolte nell'anzidette località dal 1890 al 1915 consente di considerare la distribuzione dei fenomeni termici lungo il sistema orografico dell' Etna.

Le stazioni di cui si posseggono osservazioni riferibili al maggior numero di anni compresi nell'anzidetto periodo e disposte nell'estesa zona di vegetazione favorita dal dolce declivio specialmente nel versante meridionale sono le seguenti: Catania (osservatorio astrofisico), Catania (regia scuola di viticultura), Viagrande, Sant'Alfio, Linguaglossa, Maniace, Randazzo e Riposto.

Le osservazioni termometriche raccolte all'osservatorio Etneo furono anche esaminate dall'Hann (²) che espresse l'andamento annuale con la formola:

$$T = -1{,}1^\circ + 7{,}5^\circ \sin.(253^\circ 7 + x) + 1^\circ 0 \sin(73^\circ + 2x)$$

di cui il primo termine fu dedotto dai valori medî stagionali e il secondo termine, che è un termine di correzione, fu ottenuto approssimativamente dall'andamento annuale conosciuto per altre stazioni di altezza similmente poste.

(¹) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, luglio 1907, vol. XVI, ser. 5ª, 2° sem., fasc. 1°.

(²) *Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen am Aetna-Obesrvatorium.* Meteorologische Zeitschrift, Heft 12. 1907.

Le osservazioni termometriche rilevate nelle stazioni poste sulle pendici e sulle falde dell' Etna non riguardano lo stesso periodo, ma siccome si riferiscono a periodi superiori al decennio, possiamo ritenere perfettamente comparabili i valori medî ottenuti, e nella sottostante tabella trascriviamo le temperature medie mensili di ciascun luogo di osservazione [1].

	Altitudine in metri	Periodo esaminato	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre	Media annuale
Etna	2950	1892–1906	− 7°,3	− 7°,6	− 6°,8	− 4°,2	− 0°,1	4°,3	7°.1	6°,9	4°,1	0°,1	− 3°,6	− 6°,1	− 1°,1
Randazzo . .	750	1890–1915	4,5	4,8	7,2	10,1	15,1	18,9	23,2	22,5	19,2	14,6	9,8	6,5	13,3
Maniace . .	600	1894–1915	5,2	5,8	7,4	10,5	13,9	18,0	21,5	21,6	18,7	14,8	9,8	6,6	12,8
Linguaglossa .	560	1893–1915	6,3	6,9	8,7	11,4	15,6	19,3	23,4	23,1	19,8	15,5	10,6	7,8	14,0
Sant'Alfio . .	550	1895–1915	7,1	7,6	9,1	11,8	15,8	19,7	23,1	23,2	19,7	16,0	11,9	8,9	14,4
Viagrande . .	405	1890–1915	8,6	8,8	11,2	13,8	18,2	22,2	26,0	25,8	22,1	18,3	14,5	10,6	16,7
Catania (s. v.)	168	1895–1913	9,4	9,7	11,4	13,7	17,7	20,8	24,1	25,4	21,8	17,8	13,3	10,4	15,5
Catania (o. a.)	65	1892–1915	10,0	10,7	12,5	14,9	18,6	22,9	25,6	25,5	23,5	19,9	15,2	12,0	17,6
Riposto . . .	14	1892–1915	11,3	11,7	13,1	15,1	18,7	22,4	25,6	25,5	23,5	20,3	16,2	12,8	18,0

L'esame di dette osservazioni dà modo di determinare il seguente gradiente medio mensile:

G	F	M	A	M	G	L	A	S	O	N	D
0,61	0,61	0,62	0,62	0,64	0,65	0,66	0,66	0,65	0,64	0,63	0,62

e i valori così ottenuti sono poco diversi da quelli ricavati dal Lugli [2] e da quelli impiegati dall' Hann [3]. L' isoterma 0° sul monte Etna, come deducesi dalla superiore tabella, raggiunge l'altitudine a cui trovasi l'osservatorio nei mesi di marzo e di ottobre; quindi nei mesi da novembre ad aprile la detta isoterma dovrà raggiungere altitudini minori, alla cui determinazione può giungersi con grande approssimazione, impiegando i gradienti

[1] L'andamento di tali valori medii può rappresentarsi a mezzo delle seguenti formole:

Randazzo	$T = 13°,3 + 9{,}093 \sin(242°.23' + x) - 0{,}194 \sin(255°.37' + 2x)$
Maniace	$T = 12°,8 + 8{,}369 \sin(241°.08' + x) - 0{,}806 \sin(229°.57' + 2x)$
Linguaglossa	$T = 14°,0 + 8{,}494 \sin(242°.01' + x) - 0{,}175 \sin(258°.29' + 2x)$
Sant'Alfio	$T = 14°,4 + 8{,}119 \sin(240°.13' + x) - 0{,}771 \sin(229°.41' + 2x)$
Viagrande	$T = 16°,7 + 8{,}441 \sin(240°.27' + x) - 0{,}101 \sin(258°.02' + 2x)$
Catania (s. v.)	$T = 15°,5 + 8{,}047 \sin(239°.46' + x) - 0{,}130 \sin(263°.14' + 2x)$
Catania (o. a.)	$T = 17°,6 + 8{,}145 \sin(240°.35' + x) + 0{,}041 \sin(272°.55' + 2x)$

[2] Lugli A., Annali del R. Ufficio di meteorologia e geodinamica, vol. IV, parte I, Roma, 1882.

[3] Hann J., *Ueber die Temperaturabnahme mit der Höhe bis 10 km. nach den Ergebenissen der intern. Ballonaufstiege.* K. Akad. der Wiss., Wien, April 1904.

termici anzidetti, e da tale calcolo si hanno le seguenti altitudini in metri [1]. novembre 2388, dicembre 1966. gennaio 1774, febbraio 1704, marzo 1853, aprile 2273. Considerata la costanza che detti gradienti termici hanno in altre località montuose, essi potranno impiegarsi per la determinazione delle temperature medie mensili ad altri livelli e con tanto maggiore approssimazione quanto più ci si avvicina alla zona coltivata, poichè la maggior parte delle stazioni, i cui dati sono stati impiegati per questa ricerca, si trovano a quote non elevate. E l'approssimazione di siffatte determinazioni è maggiore, se ci limitiamo a considerare la zone distanziate da 500 a 500 m. pel tratto compreso tra l'altitudine 2950 (osservatorio etneo) e 750 (Randazzo). La tabella seguente contiene le temperature così calcolate e di esse evidentemente diamo peso soltanto ai gradi.

	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre
Altitudine m. 2450 . .	— 4,4	— 4,6	— 3,7	— 1,1	3,1	7,6	10,4	10,2	7,8	3,4	— 0,4	—
" " 1950 . .	— 1,1	— 1,5	— 0,6	2,0	6.3	10,8	13,6	13,5	11,0	6,6	2,8	0,1
" " 1450 . .	2,0	1,5	2,5	5,1	9,5	14,1	15,9	16.8	14,3	9,9	6,0	3,2
" " 950 . .	5,1	4,6	5,6	8,2	12,7	17,3	20,1	20,1	17,5	13,1	9,2	6,3

L'insieme dei dati così ottenuti ci consente di esaminare la distribuzione della temperatura dell'aria lungo il monte Etna servendoci della rappresentazione isopleta (v. figura). Gli elementi impiegati in tale costruzione sono tutti quelli sopra riferiti e per le località come Linguaglossa, Sant'Alfio, poste ad altitudini poco diverse fra loro, si introdussero i valori medii delle anzidette località.

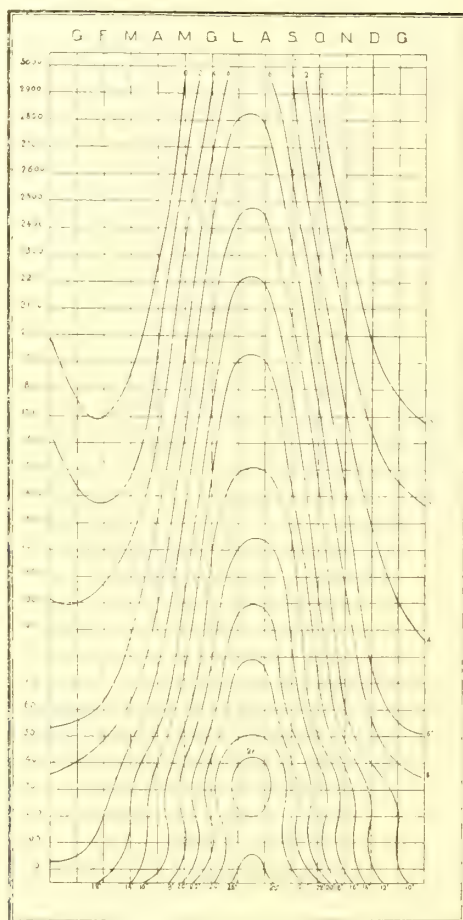
I livelli altimetrici di cui abbiamo calcolato le temperature medie, sono stati scelti anche in relazione con la distribuzione delle formazioni o associazioni vegetali e difatti i botanici vi hanno distinto le seguenti zone di vegetazione: zona inferiore con flora mediterranea, il cui limite superiore, tenuto conto della coltivazione della vite e dell'olivo, si estende ordinariamente ai 950 metri e talora si eleva ai 1200 m.; la zona montana, che può suddividersi in zona media o submontana ove predominano estesi boschi di castagno e che si estende fino ai m. 1600, e zona montana propriamente detta, ove si hanno boschi di pino e di faggio che si estende fino ai 2200 m.

Le varie isoterme così disegnate presentano un andamento molto rego-

[1] Hann ottenne per il detto periodo le seguenti altitudini : gennaio e febbraio 1760, aprile 2270, ottobre 2930.

lare, e altre ricerche fitogeografiche potranno confermare il tracciamento delle medesime.

Richiamiamo l'attenzione sull'andamento che le isoterme presentano tra il livello del mare e l'altitudine di m. 750 e, in ispecie, segnaliamo la persi-

stenza del massimo di temperatura, nei mesi estivi, ad un'altitudine intorno ai 400 m., il che viene indicato chiaramente dalle osservazioni eseguite a Viagrande. Nei mesi estivi abbiamo quindi la tendenza delle isoterme ad elevarsi, cosicchè si viene ad avere intorno ai 400 m. un massimo vicinissimo a quello che si accerta al livello del mare. E questa zona di elevata temperatura evidentemente si individuerebbe maggiormente se si fondasse l'esame sulle temperature massime assolute.

Già il Gemellaro [1], confrontando le temperature massime osservate a

[1] Gemellaro C., *Saggio sopra il clima di Catania,* Atti dell'Acc. Gioenia di scienze naturali, serie I, tomo VI, Catania 1832.

Nicolosi e a Catania nel periodo 1817-1826 aveva notato che i calori estivi nei villaggi di Catania, benchè elevati sul livello del mare sino a mille piedi parigini, sono maggiori che non alla costa. E questa minore temperatura che si ha a Catania potrebbe dipendere dal fatto che dalle 10^h alle 16^h in estate, a Catania domina il grecale, che rinfresca la regione circostante contribuendo a rendere meno elevati i massimi diurni della temperatura, il che non avviene nei villaggi posti a maggiore altitudine.

Anche Schouw [1] notò qualche cosa di simile, difatti egli esaminando le determinazioni termometriche da lui eseguite dal 7 al 9 settembre 1819, fra Catania e il villaggio Nicolosi, notò in questa ultima località in estate una temperatura più elevata di quella contemporaneamente riscontrata a Catania. Dalla presente ricerca rimane adunque maggiormente individuata questa zona di elevata temperatura estiva ad un'altitudine dove dovrebbe corrispondere una temperatura minore, e ciò è da ascriversi in particolar modo al dolce declivio del versante meridionale dell'Etna che si riscalda molto, e non risente l'effetto rinfrescante del cosiddetto grecale che domina in tali mesi lungo il litorale.

Chimica. — *Ricerche sopra i nitroderivati aromatici.* XI: *Azione dell'idrato d'idrazina sopra i nitrocomposti aromatici* [2]. Nota di MICHELE GIUA, presentata dal Socio G. PATERNÒ [3].

È noto da parecchio tempo che l'idrazina, come la fenilidrazina, può ridurre facilmente il gruppo $-NO_2$ ad $-NH_2$. R. van Rothenburg [4], trattando il nitrobenzene con l'idrato d'idrazina in soluzione alcoolica, a caldo, ha ottenuto l'anilina. Uno studio molto importante sul comportamento dei nitrocomposti aromatici verso l'idrato d'idrazina è stato fatto da Th. Curtius e collaboratori [5]. Dal punto di vista del processo di sostituzione nell'anello benzenico è interessante di ricordare i risultati ottenuti dallo stesso Curtius con l'idrato d'idrazina e alcuni nitro-alogeno-composti, contenenti l'atomo alogenico labile. Prima del Curtius, A. Purgotti [6] ha fatto reagire l'idrato d'idrazina col cloruro di picrile, ottenendo la 2,4,6-trinitro-fenilidrazina. Più tardi il Purgotti ha preparato questo stesso composto facendo reagire l'idrato

[1] Schouw J. F., *Tableau du climat et de la végétation de l'Italie*, vol. I, pag. 92. Copenhague, 1839.

[2] Lavoro eseguito nel laboratorio di chimica generale della R. Università di Sassari.

[3] Pervenuta all'Accademia il 16 ottobre 1919.

[4] Ber. *26*, 2056 (1893).

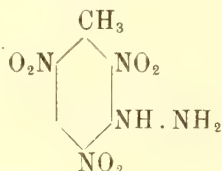
[5] Journ. prakt. Chem., *76*, 233 seg. (1907).

[6] Gazz. chim. ital., *24*, I, 112 (1894).

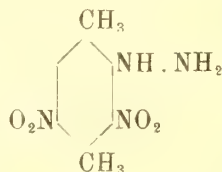
d'idrazina col trinitro-fenetolo. Recentemente G. Ponzio [1] ha ottenuto la sostituzione del gruppo nitrico, legato ad un atomo di carbonio alifatico, col residuo dell'idrazina.

Nulla ancora si conosce sul comportamento dell'idrato d'idrazina verso i nitro-composti aromatici contenenti un gruppo nitrico labile.

Facendo reagire il trinitro-p-xilene, il β- e il γ-trinitro-toluene con l'idrato d'idrazina, ha luogo la sostituzione del gruppo nitrico labile, presente in queste sostanze, col residuo idrazinico. Anche l'etere etilico o metilico del 2,4,6-trinitro-m-cresolo, nelle condizioni accennate, si trasforma nella metil-trinitro-fenilidrazina seguente:

CH_3
O_2N NO_2
$NH.NH_2$
NO_2

Il rendimento e la grande facilità con cui avviene la trasformazione accennata rendono l'idrato d'idrazina uno dei reagenti più indicati per ottenere, nel caso di nitro-composti con gruppo nitrico labile, derivati della fenilidrazina.

Dinitro-dimetil-fenilidrazina

CH_3
$NH.NH_2$
O_2N NO_2
CH_3

ottenuta da trinitro-p-xilene e idrato d'idrazina in soluzione alcoolica. Cristallizza dall'alcool in prismi gialli che fondono a 180° con decomposizione.

Gr. 0,1052 di sostanza: cc. 23,8 di N ($t = 24°,5$, $H = 731$ mm.)
per $C_8H_{10}O_4N_4$ N % trovato 25,09 calcolato 24,78.

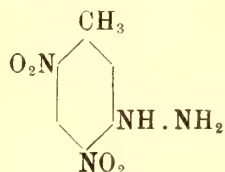
β-acetilderivato. — Dall'idrazina per ebollizione con anidride acetica. Lamelle lucenti, debolmente gialle, che fondono a 232° con decomposizione.

Benzalderivato. — Dall'idrazina per riscaldamento con aldeide benzoica. Aghi lunghi, giallo chiari, fusibili a 221° con decomposizione.

[1] Gazz. chim. ital., *44*, II, 63 (1914).

Anisalderivato. — Aghi giallo-dorati fusibili a 224° con decomposizione.

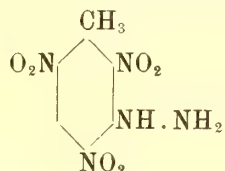
Dinitro-metil-fenilidrazina

CH_3
O_2N (ring) $NH.NH_2$
NO_2

Si ottiene dal trinitro-toluene γ ed idrato d'idrazina. Cristallizza dall'alcool in aghi giallo-rossastri che fondono a 194° con decomposizione.

Gr. 0,1039 di sostanza: cc. 24,4 di N ($t=23°$, $H=734,3$ mm.)
per $C'_7H_8O_4N_4$ N % trovato 26,55 calcolato 26,42.

β-Acetilderivato. — Aghetti gialli fusibili a 175°.

Trinitro-metil-fenilidrazina

CH_3
O_2N (ring) NO_2
$NH.NH_2$
NO_2

Si ottiene dall'etere etilico o metilico del trinitr-om-cresolo e idrato d'idrazina in soluzione alcoolica. Lamelle giallo-dorate, lucenti, che fondono a 176° con sviluppo gassoso.

Gr. 0,1084 di sostanza: cc. 27,2 di N ($t=24°$, $H=735,9$ mm.).
Gr. 0,1023 di sostanza: cc. 24,7 di N ($t=22°$, $H=736,6$ mm.)

		I.	II.	
per $C'_7H_7O_6N_5$ N %	trovato	27,56	27,20	calcolato 27,23.

β-Acetilderivato. — Prismi gialli fusibili a 136°. Si ottiene dall'idrazina per ebollizione con acido acetico glaciale.

α-β-Diacetilderivato. — Lamelle madraperlacee fusibili a 216° con decomposizione. Si ottiene dall'idrazina per ebollizione con anidride acetica.

Benzalderivato. — Prismi giallo-rossastri fusibili a 249°-250° con decomposizione.

Questo lavoro verrà pubblicato per esteso nella Gazzetta chimica italiana.

Chimica. — *Sopra alcuni sali a struttura p-o-, e m-chinoide.* Nota di R. Ciusa [1], presentata dal Socio G. Ciamician.

I p-nitrofenilidrazoni si colorano a contatto degli alcali — meglio se in soluzione acetonica — intensamente in violetto [2]. Per aggiunta di acqua o per acidificazione si riottiene inalterato l'idrazone di partenza. I sali corrispondenti si ottengono molto facilmente (vedi parte sperimentale).

Che la costituzione di questi sali sia differente da quella del p-nitrofenilidrazone di partenza lo dimostra il differente colore delle soluzioni ed il loro differente spettro di assorbimento.

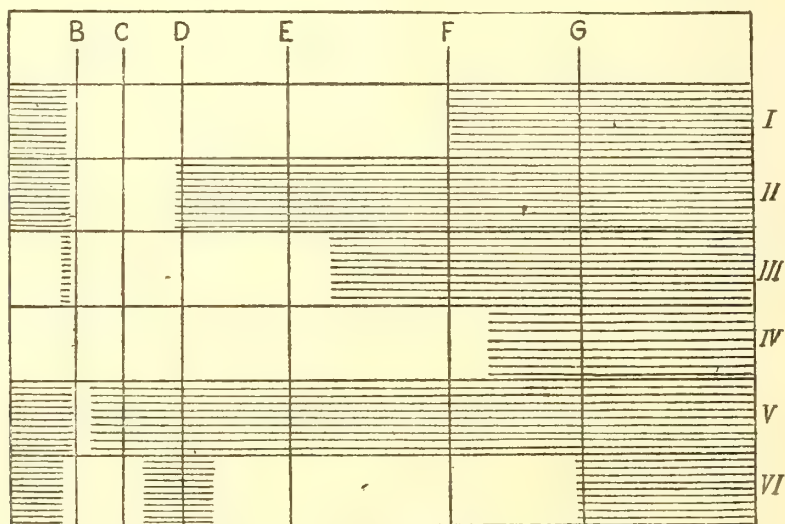
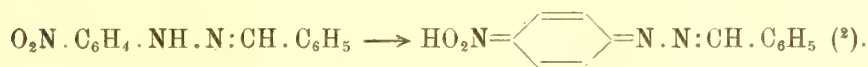



Fig. 1. — I p-Nitrofenilidrazone della benzaldeide: soluzione acetonica N/1000.
II Sale sodico id. id.
III p-Nitrofenilidrazone della p-dimetilaminobenzaldeide: soluzione acetonica N/1000
IV Id. id.: soluzione N/16000.
V Sale sodico id. id. N/1000
VI Sale sodico id. id. N/16000.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica generale della R. Università di Bologna.
(2) E. Bamberger, Berichte *32*, 1806 (1889).

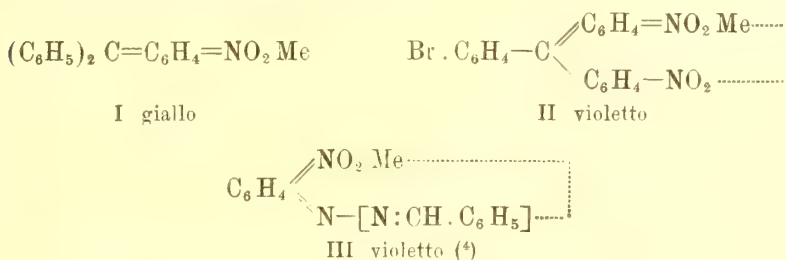
Per quanto, per mancanza di uno spettrografo adatto, mi sia dovuto limitare all'osservazione della parte visibile dello spettro [1], si può dedurre che nella salificazione è avvenuto un profondo cambiamento di struttura: i p-nitrofenilidrazoni debbono essere considerati come pseudo-acidi, ed i loro sali derivano dall'acido nitronico p-chinoide

$$O_2N.C_6H_4.NH.N:CH.C_6H_5 \longrightarrow HO_2N{=}\langle\ \rangle{=}N.N:CH.C_6H_5 \ ^{(2)}.$$

Per rendersi però conto completamente del colore intenso dei sali corrispondenti, non basta la semplice costituzione chinoide: bisognerà prendere in considerazione una formula complessa III, nella quale il metallo sia legato per valenze secondarie al resto della molecola. Debbo infatti far osservare che i sali del mononitrotrifenilmetano sono gialli (I), mentre sono violetti quelli del bromodinitrotrifenilmetano (II) [3].

$$(C_6H_5)_2\,C{=}C_6H_4{=}NO_2Me \qquad\qquad Br.C_6H_4{-}C\begin{cases} C_6H_4{=}NO_2Me\cdots \\ C_6H_4{-}NO_2\cdots \end{cases}$$

I giallo — II violetto

$$C_6H_4\begin{cases} NO_2Me\cdots \\ N{-}[N:CH.C_6H_5]\cdots \end{cases}$$

III violetto [4]

Così non bisogna dimenticare, a maggior conferma, che, mentre i sali dei mononitroidrocarburi alifatici sono incolori, sono colorati invece quelli dei dinitroidrocarburi. Una formula complessa analoga va attribuita a tutti i sali chinoidi dei quali mi occupo in questa Nota.

Oltre il sale potassico p-chinoide del p-nitrofenilidrazone della benzaldeide (IV), ho preparato il sale bisodico del p-nitrofenilidrazone dell'acido benzalpiruvico (V), ed il sale bipotassico del p-nitrofenilidrazone dell'acido benzoilgliossilico (VI).

(1) Mi riservo di comunicare la curva completa dell'assorbimento delle sostanze delle quali mi occupo in questa Nota, quando mi sarò procurato uno spettrografo a prisma e lenti di quarzo.

(2) L'atomo di idrogeno metinico non prende parte alla trasformazione, perchè i p-nitrofenilidrazoni dei chetoni si comportano analogamente. La stessa osservazione vale per gli o-, e m-nitroidrazoni.

(3) A. Hantzsch, Berichte, *52*, 493.

(4) Rimanendo per ora incerti sul punto d'attacco della valenza secondaria.

$$C_6H_5.CH:N.NH.C_6H_4.NO_2 \longrightarrow C_6H_5CH:N.N{=}C_6H_4{=}NO_2Me$$

giallo (1) IV violetto

$$C_6H_5CH:CH.\underset{\underset{N.NH.C_6H_4.NO_2}{\|}}{C}.COOK \longrightarrow C_6H_5CH:CH.\underset{\underset{N.NH.C_6H_4.NO_2}{\|}}{C}.COOK \longrightarrow$$

rosso (2) rosso aranciato (3)

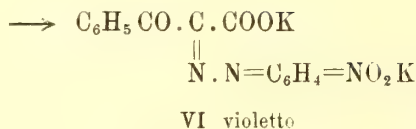
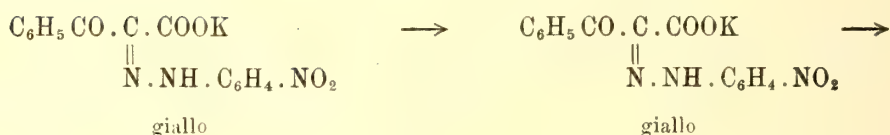
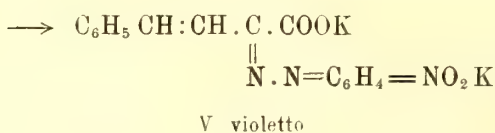
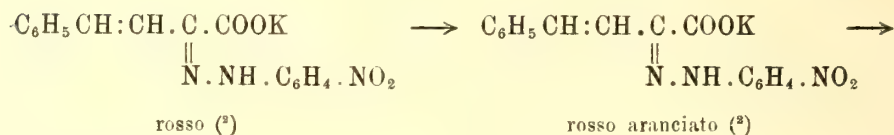
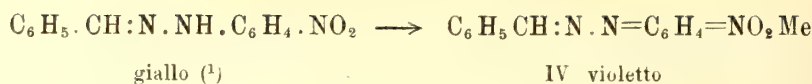
$$\longrightarrow C_6H_5CH:CH.\underset{\underset{N.N{=}C_6H_4{=}NO_2K}{\|}}{C}.COOK$$

V violetto

$$C_6H_5CO.\underset{\underset{N.NH.C_6H_4.NO_2}{\|}}{C}.COOK \longrightarrow C_6H_5CO.\underset{\underset{N.NH.C_6H_4.NO_2}{\|}}{C}.COOK \longrightarrow$$

giallo giallo

$$\longrightarrow C_6H_5CO.\underset{\underset{N.N{=}C_6H_4{=}NO_2K}{\|}}{C}.COOK$$

VI violetto

Anche gli o-nitrofenilidrazoni si sciolgono negli alcali in soluzione alcoolica, e meglio acetonica, con colorazione *azzurra*.

Mentre non son riuscito ad ottenere sali cristallizzati dall' o-nitrofenilidrazone della benzaldeide (VII), il cui sale sodico esiste certamente in soluzione, ho ottenuto un sale bipotassico dell'o-nitrofenilidrazone dell'acido benzoilgliossilico (VIII).

(1) R. Ciusa e L. Vecchiotti., Rendiconti R. Accademia Lincei, XX, 1°, 803.

(2) R. Ciusa, Gazzetta chimica italiana, XLIX, 1°, 166; R. Ciusa e A. Bernardi, Gazzetta chimica italiana, XLI, 1°, 144.

(3) M. Busch (Berichte, *43*, 1540) a proposito del p-nitrofenilidrazone del benzofenone — da lui preso in esame in occasione di ricerche di un ordine completamente differente dalle mie — attribuisce la colorazione che assumono le sue soluzioni a contatto della potassa alcoolica, alla formazione, di composti a struttura chinolica contenente una molecola d'alcool. I sali alcalini, dei quali mi occupo in questa Nota, non contengono alcool, come pure non contengono alcool alcuni sali analoghi, come per es. il sale potassico della picril-α- naftilamina, (Berichte, *43*, 1540), ed il sale sodico dell'acetil-p-nitrofenilidrazone (Berichte, *32*, 1814

Lo spettro d'assorbimento della soluzione alcalina degli o-nitrofenilidrazoni è differente da quello delle soluzioni dei nitroidrazoni corrispondenti.

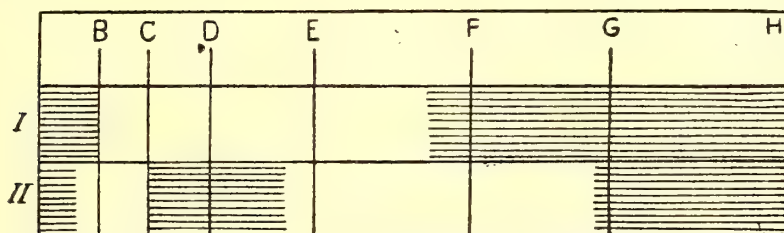



Fig. 2. — I o-Nitrofenilidrazone della benzaldeide: soluzione acetonica N/1000.
II Sale sodico id. id.

Anche per gli o-nitroidrazoni bisogna ammettere quindi che nella salificazione avvenga una trasformazione e che quindi i sali alcalini derivino da una forma o-chinoide.

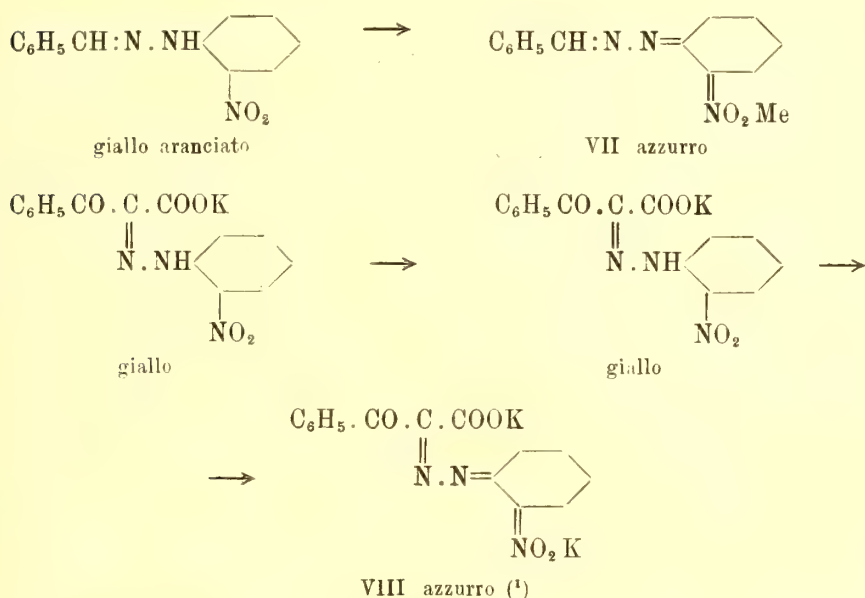
$C_6H_5CH:N.NH\langle C_6H_4 \rangle$ (—NO_2) → $C_6H_5CH:N.N=\langle C_6H_4 \rangle$ (=NO_2Me)

giallo aranciato — VII azzurro

$C_6H_5CO.C.COOK$ (‖ $N.NH\langle C_6H_4 \rangle$ —NO_2) → $C_6H_5CO.C.COOK$ (‖ $N.NH\langle C_6H_4 \rangle$ —NO_2) →

giallo — giallo

→ $C_6H_5.CO.C.COOK$ (‖ $N.N=\langle C_6H_4 \rangle$ =NO_2K)

VIII azzurro [1]

A proposito dei m-nitroidrazoni era stato affermato che il m-nitrofenilidrazone del benzofenone non si salifica a contatto della potassa alcoolica [2]. Osservando però attentamenfe, si vede che, per aggiunta di potassa alcoolica alla soluzione alcoolica di un m-nitrofenilidrazone, avviene un leggerissimo cambiamento di colore: se però si scioglie un m-nitrofenilidrazone (compreso

[1] Allo stato solido: cristalli splendenti color bronzo; dall'acetone: polvere azzurra.
[2] Berichte, *49*, 361.

quello del benzofenone) in acetone, si ha, per aggiunta di potassa alcoolica, una colorazione *verde*. Per aggiunta di acqua si riottiene il m-nitroidrazone inalterato.

Lo spettro d'assorbimento delle soluzioni alcaline, ossia delle soluzioni dei sali alcalini corrispondenti, anche in questo caso è differente da quello delle soluzioni dei metanitroidrazoni primitivi, e si mantiene tale anche per diluizione.

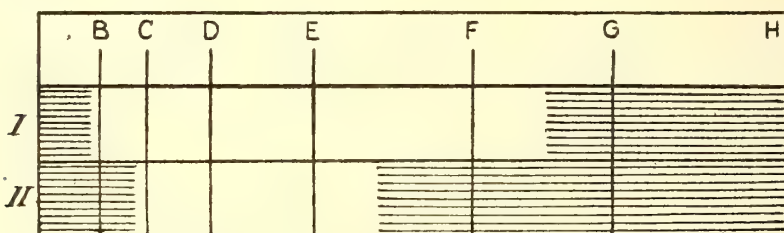
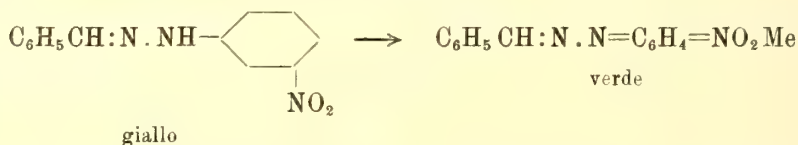



FIG. 3. — I m-Nitrofenilidrazone della benzaldeide: soluzione acetonica N/1000.
II Sale sodico id. id.

Non sono peraltro riuscito ad ottenere sali cristallizzati: anche coi m-nitrofenilidrazoni dei composti carbonilici, i cui p- ed o-nitrofenilidrazoni mi avevano dato sali chinoidi ben cristallizzati, non ho avuto altro risultato se non che il colore delle soluzioni diventa verde oppure verde-scuro.

Se però si ammette che la salificazione nei p- ed o-nitroidrazoni è accompagnata da un cambiamento di struttura e che i sali corrispondenti derivano da acidi p- ed o-chinonnitronici, non mi pare fuor di luogo ammettere anche in questo caso che la salificazione avvenga col passaggio dalla struttura benzoide a quella m-chinoide

$$C_6H_5CH{:}N.NH-C_6H_4(NO_2) \longrightarrow C_6H_5CH{:}N.N{=}C_6H_4{=}NO_2Me$$

giallo — verde

(senza per altro voler entrare in merito alla questione della costituzione dei m-chinoni).

Questi composti salini m-chinoidi sono certamente assai facilmente idrolizzabili, e di ciò si può avere in certo qual modo una misura dal contegno dei tre nitrofenilidrazoni della benzaldeide cogli alcali. Il cambiamento di colore comincia ad essere nettamente visibile

per il p-nitrofenilidrazone: col carbonato sodico all'ebollizione;

per l'o-nitrofenilidrazone: con la potassa alcolica in soluzione alcoolica;

per il m-nitrofenilidrazone: con la potassa alcoolica in soluzione acetonia.

La formazione dei sali m-chinoidi per azione della potassa alcoolica sulla soluzione acetonica dei m-nitrofenilidrazoni va ammessa certamente con riserva, almeno per ora; non bisogna però dimenticare che l'esistenza di sali a struttura m-chinoide è ora generalmente ammessa, sia per considerazioni d'indole puramente teorica (¹), sia in seguito a risultati sperimentali (²).

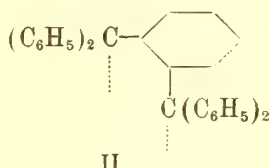
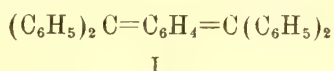
La tendenza a formare composti a struttura m-chinonica è certamente assai piccola. Per ora pare che l'unico composto a struttura m-chinonica, oltre ai sali dei m-nitrofenoli di Hantzsch (loc. cit.), sia il tribromoresochinone di Liebermann e Diller (³). Invece la struttura m-chinoide, per un certo tempo attribuita all'idrocarburo $C_{32}H_{24}$ (⁴) ottenuto dall'acido isoftalico allo stesso modo col quale Thiele ottenne il tetrafenil-p-xililene (I), è stata riconosciuta errata: Schlenk ha dimostrato che si tratta di un derivato del trifenilmetile con due atomi di carbonio trivalente (II) (⁵).

Ciò sta ad indicare la difficoltà della formazione di un m-chinone. Tale difficoltà, come fa notare lo stesso Hantzsch, è minore per i composti m-chinonici salini (⁶).

$$(C_6H_5)_2C{=}C_6H_4{=}C(C_6H_5)_2$$

I

$$(C_6H_5)_2C-C_6H_4-C(C_6H_5)_2$$

II

La parte sperimentale sarà pubblicata altrove.

(¹) Baly, Edwards, and Stewart: Journal ot the chem. Society, *89*, 520.

(²) A. Hantzsch, Berichte, *40*, 330. Questi (Berichte, *52*, 506) dice che, secondo J. Lifschitz (Berichte, *48*, 1738), anche i cianuri di o- m, e p-nitrobenzile $O_2N.C_6H_4.CH_2.CN$ forniscono sali violetti. Nei sunti del Central Blatt, del Bulletin e del Journal of the chem. Society, non ho trovato alcun dato ulteriore. Il fascicolo corrispondente del 48° volume dei Berichte (1915) manca in questo Istituto.

(³) Annalen der Chemie, *169*, 252; R. Meyer und Kurt Dèramai, Berichte, *41*, 2437.

(⁴) Berichte, *46*, 659, 2252, 2542; *47*, 125.

(⁵) Berichte, *48*, 661.

(⁶) I fenil- e benzil-fenilidrazoni delle o- m- e p-nitrobenzaldeide si colorano intensamente in verde, per aggiunta di potassa alcoolica alla loro soluzione acetonica.

Chimica. — *Sulle azioni fotochimiche nei cristalli ottenute mediante la luce polarizzata.* Nota di M. Padoa, presentata dal Socio G. Ciamician.

Da una comunicazione fatta alla Deutsche Bunsen Gesellschaft (¹) risulta che F. Weigert ebbe la buonissima idea di far agire la luce polarizzata sopra sostanze cristalline sensibili alla luce, per vedere se vi fossero direzioni privilegiate rispetto all'intensità di tali azioni.

I cristalli sui quali Weigert ha fatto agire la luce polarizzata (in un piano sono quelli della β-tetracloro-α-chetonaftalina di cui il Markwald (²) ha scoperto le proprietà fototropiche. Questi cristalli sono gialli inizialmente e si presentano colorati in verde quando la luce ha agito, ma non ugualmente in tutte le direzioni. Weigert ha poi osservato che, a seconda dell'orientamento dei cristalli rispetto al piano della luce polarizzata, si ha un'azione minima, oppure intensa; dall'insieme di questi fatti l'A. viene tratto a ritenere che la fototropia, anzichè consistere in una trasformazione chimica, sarebbe dovuta ad uno speciale assettamento degli atomi, tale da conferire proprietà ottiche speciali al reticolo cristallino (³).

Le mie conclusioni su tale argomento sono diverse: in qualche caso la misura della velocità con la quale si compiono i processi fototropici mi ha fatto ritenere trattarsi di fotopolimerizzazioni reversibili; in ogni caso poi il complesso dei caratteri della fototropia mi apparve concordare con quello dei fenomeni fotochimici veri e proprî.

La considerazione di tutti questi fatti mi ha convinto che le osservazioni intraprese dal Weigert avrebbero, con opportuna estensione, fornito un nuovo argomento in favore del mio modo di vedere, tanto più che l'attuale conoscenza della intima struttura dei cristalli fa pensare che le eventuali azioni fotochimiche non dovrebbero avere la stessa intensità in tutte le direzioni. Bisognava perciò fare agire la luce polarizzata sopra corpi cristallini che notoriamente subiscono trasformazioni fotochimiche; la scelta peraltro di questi corpi è circoscritta dalla difficoltà di ottenere individui cristallini ben

(¹) Zeitschrift für Elektrochemie *1918*, 222.

(²) Insieme col cloridrato di chinochinolina (Zeitschrift für physikalische Chemie, XXX, 140).

(³) In via pregiudiziale vi sarebbe da osservare che qualunque spostamento o trasposizione di atomi nella molecola andrebbero considerati come una isomerizzazione, così come sarebbero da riguardare isomere le modificazioni polimorfe di uno stesso corpo.

formati e dalla lentezza con la quale agisce spesso la luce. Citerò qui alcuni casi di corpi che la luce polimerizza allo stato cristallino: acido cinnamico [1]; acido cinnamilidenmalonico [2]; cumarina [3]; cinnamilidenacetilacetone [4]; acido metilcinnamilidenacetico [5].

Si traspongono o si trasformano: l'acido maleico [6], e corpi analogamente costituiti, nei relativi derivati fumarici; l'o-nitrobenzaldeide [7], e corpi analogamente costituiti [8], negli acidi o-nitrosobenzoici corrispondenti. Alcuni di questi corpi si alterano tanto allo stato cristallino quanto sciolti in altri corpi; altri, come l'acido cinnamico, non si trasformano che allo stato solido, appunto come accade per le sostanze fototrope (il che non esclude che altre sostanze siano fototrope in soluzione, nello stesso modo come l'antracene si polimerizza alla luce soltanto in soluzione). A questo proposito ricorderò che, non essendomi risultato che fosse nota l'azione della luce sulle soluzioni dell'acido cinnamilidenmalonico, ho verificato che la polimerizzazione di questo corpo segue in soluzione alcoolica in modo estremamente lento, mentre è rapidissima allo stato cristallino.

Fra i corpi nominati ho potuto fare osservazioni coi seguenti: acido cinnamico; o-nitrobenzaldeide; acido cinnamilidenmalonico.

I. L'acido cinnamico si può ottenere in cristalli appiattiti, in forma di parallelepipedi, da soluzioni alcooliche. Questi cristalli possono venire illuminati per varie ore con la luce solare, senza che si intorbidino; insistendo, però, si osserva un appannamento ed esaminandoli col microscopio si vedono dei noduli di nuova formazione. L'acido cinnamico passa al dimero (acido α-trussillico) [9]:

$$\begin{matrix} C_6H_5CH : CH . COOH \\ HOOC . CH : CH . C_6H_5 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} C_6H_5CH . CH . COOH \\ \quad\;\; | \quad\;\; | \\ HOOC . CH . CH . C_6H_5 \end{matrix}$$

(1) Bertram e Kürsten, Berichte *28* (IV), 387 (1895); Riiber, ibid., *35*, 2908; Ciamician e Silber, ibid., *35*, 4128; *36*, 4266.

(2) Liebermann, Berichte, *28*, 1440.

(3) Ciamician e Silber. Berichte *36*, 4266.

(4) Ruhemann, Journal of the Chemical Society *85*, 1453 (1904).

(5) Macleod, Journal of the American chemical Society *44*, 331 (1910).

(6) Ciamician e Silber, Berichte *36*, 4266.

(7) Ciamician e Silber, Berichte *34*, 2040.

(8) Bamberger e Elger, Liebigs Annalen *371*, 319.

(9) Secondo H. Stobbe (Berichte *52* [1919], 1021), l'acido α-trussillico avrebbe i carbossili voltati entrambi dalla stessa parte, e però sarebbe uno stereoisomero del β-trussillico. Ciò farebbe apparire più facile la formazione di soluzioni solide con l'acido cinnamico. Lo stesso Stobbe [Berichte *52* (1919), 666] ha trovato che l'acido β-trussillico si forma per illuminazione del *cis*-cinnamico, e l'acido α-trussillico dalla forma usuale dell'acido cinnamico, che è *trans*-.

Non si può a meno di pensare che l'azione della luce cominci dai primi istanti d'illuminazione; pertanto, non manifestandosi segni di appannamento nei cristalli se non dopo esposizione prolungata, è giusto di ammettere che si formino soluzioni solide fra il dimero e il monomero. Queste soluzioni solide saranno certamente soprasature; infatti, dalle seguenti esperienze crioscopiche si vede che l'acido α-trussillico si comporta crioscopicamente in modo normale quando viene sciolto nell'acido cinnamico.

Costante crioscopica dell'acido cinnamico ottenuta sciogliendovi naftalina:

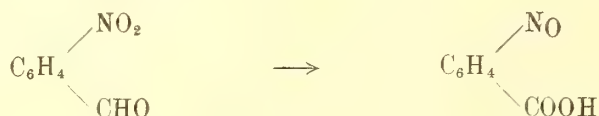
$C = 1,01 \qquad \Delta = 0°,82 \qquad K = 10,39$

Peso molecolare dell'acido α-trussillico in acido cinnamico:

$C = 0,587 \qquad \Delta = 0°,20 \qquad M = 305$ (M calcolato = 296)

A confermare la formazione di soluzioni soprasature per azione della luce sull'acido cinnamico, sta il fatto che i cristalli illuminati fino a scomposizione appena iniziata fondono a 131-132°, mentre l'acido puro fondeva a 134°. Da miscele preparate per pesata si rileva che tale abbassamento corrisponde ad un contenuto di circa il 3 % di acido trussillico: questa sarebbe la concentrazione-limite delle soluzioni soprasature. Col fare agire la luce polarizzata sui cristalli di acido cinnamico, facendo coincidere il piano della luce polarizzata ora con la direzione dell'una coppia di spigoli paralleli dei cristalli ed ora con la direzione normale, non ho ottenuto risultati nettamente diversi, come accade invece nelle seguenti esperienze.

II. L'o-nitrobenzaldeide si può avere in aghi prismatici appiattiti, da soluzioni alcooliche, od in acido acetico glaciale. Questa sostanza si trasforma alla luce in acido o-nitrosobenzoico, secondo la bella reazione scoperta da Ciamician e Silber (loc. cit.):

$$C_6H_4\begin{matrix}\diagup NO_2 \\ \diagdown CHO\end{matrix} \longrightarrow C_6H_4\begin{matrix}\diagup NO \\ \diagdown COOH\end{matrix}$$

I cristalli di o-nitrobenzaldeide sulle prime diventano verdi, poi si intorbidano e si imbiancano; l'interpretazione di questo fatto fu data da Lobry de Bruyn [1] e da Bruni [2]. Sull'inizio dell'azione si formano soluzioni solide dell'acido o-nitrosobenzoico nella o-nitrosobenzaldeide; queste soluzioni sono verdi perchè si tratta di un nitrosoderivato sciolto in molecole semplici. Ben presto la concentrazione di queste soluzioni solide passa il limite della stabilità, circa il 3 %, e ne segue la scomposizione dei cristalli misti.

[1] Lobry de Bruyn e Jungius, Recueil de travaux chimiques des Pays Bas, *22*, 298 (1903).

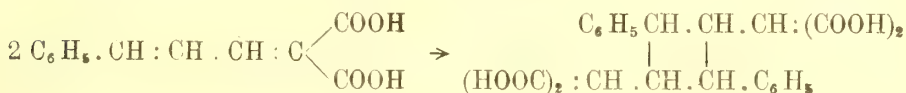
[2] Bruni e Callegari, questi Rendiconti 1904, I, 567.

Le esperienze che ora descrivo furono fatte prendendo due dei cristalli prismatici di uguali dimensioni, anzi possibilmente due porzioni di uno stesso prisma, e disponendoli in croce in direzione normale l'una all'altra, sopra un vetro portaoggetti. L'illuminazione aveva luogo in un microscopio a polarizzazione, facendo giacere gli assi dei cristalli a 45° dal piano di polarizzazione. Sorgente di luce era una lampada elettrica a filamento metallico da 100 candele, posta a breve distanza. Uno dei due cristalli, e cioè quello situato a 45° rispetto al piano di polarizzazione ed in posizione di oscuramento, quando venga osservato anche attraverso il nicol analizzatore, appariva maggiormente alterato dell'altro per il processo di scomposizione più avanzato. Che le cose stessero realmente a questo modo, ho potuto constatare ripetendo le esperienze molte volte: sette su sei sono state favorevoli. Invece, con direzione rispettivamente coincidente e normale al piano di polarizzazione, le differenze erano poco appariscenti.

Ora, in base a ciò che era noto ed a ciò che ho esposto, ci si può persuadere che il comportamento della o-nitrobenzaldeide è, all'infuori del processo di scomposizione dei cristalli misti, perfettamente analogo a quello osservato dal Weigert sui cristalli fototropi: se si preparassero dei grossi cristalli di o-nitrobenzaldeide, disponendo le cose come io ho fatto, si vedrebbe il cristallo con l'asse giacente a 45° dal piano di polarizzazione ed in posizione di oscuramento colorarsi in verde assai più intensamente di quello con l'asse ad esso perpendicolare; se non si conoscesse il processo chimico che qui avviene, si potrebbe ritenere trattarsi di un caso di fototropia.

III. I risultati più appariscenti si ottengono con l'acido cinnamilidenmalonico.

Questa sostanza si prepara (Liebermann, loc. cit.) facendo agire aldeide cinnamica ed acido malonico in presenza di acido acetico glaciale; si può cristallizzare dall'alcool in aghi gialli che fondono a 208°. Esposto alla luce, si trasforma rapidamente in un dimero.

$$2\,C_6H_5.CH:CH.CH:C\begin{matrix}\diagup COOH\\ \diagdown COOH\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}C_6H_5CH.CH.CH:(COOH)_2\\ \quad\;\; | \quad\; | \\ (HOOC)_2:CH.CH.CH.C_6H_5\end{matrix}$$

A questo dimero si attribuisce la costituzione qui riprodotta perchè, ossidandolo, si ottiene l'acido α-trussillico (vedi n. 1) [1]; il dimero è bianco e fonde a 178°. Con qualche precauzione si possono ottenere cristalli di acido cinnamilidenmalonico nella forma di piccoli prismi allungati a sezione rombica molto schiacciata.

Disponendo due cristalli in croce ed esponendoli, come nel caso prece-

[1] Riiber, Berichte *35*, 2411

dente, all'azione della luce polarizzata, in modo che uno dei cristalli sia col suo asse perpendicolare al piano di polarizzazione, non si osserva sulle prime nessuna differenza nè modificazione; entrambi i cristalli permangono intatti e trasparenti. Insistendo nel far agire la luce, dopo un tempo che varia, nelle nostre condizioni d'esperienza, da un'ora e $^3/_4$ a tre ore, a seconda delle dimensioni dei cristalli, si osserva, in quel cristallo che si trova con la direzione del suo asse perpendicolare al piano di polarizzazione, il distacco violento di una sua parte e spesso con proiezione a distanza. Talvolta si osservano soltanto delle segmentazioni trasversali che appaiono però sempre prima e più numerose nel cristallo predetto.

Sopra sette esperienze, per ben sei volte saltava per primo il cristallo nella posizione descritta ([1]). Insistendo nell'illuminazione, tutto il cristallo vien distrutto per ripetute segmentazioni, e finalmente compaiono i noduli cristallini del dimero. A questi fatti si può, a mio parere, dare la seguente interpretazione: sul principio si formano delle soluzioni solide del dimero nel monomero; queste sono instabili a tal segno che si forma uno stato di tensione nel cristallo così da farlo, per così dire, esplodere. Che fin dal principio la luce trasformi parzialmente il monomero nel dimero, sebbene ciò non si renda visibile, è dimostrato dal fatto che il punto di fusione dei cristalli apparentemente inalterati andava diminuendo man mano che si prolungava l'azione della luce; dal p. f. iniziale, di 208°, si scendeva a 204°, e, dopo prolungata illuminazione, a 196° e 193°; proseguendo, avveniva la scomposizione. Per avere un'idea approssimativa della concentrazione alla quale si può arrivare senza che tale scomposizione avvenga, ho determinato il p. f. di miscele dei due corpi, preparate per pesata, e ne dedussi che i cristalli, i quali dopo illuminazione fondevano a 193°, potevano contenere dal 16 al 20 $^0/_0$ del dimero; quelli semplicemente segmentati fondevano da 204° a 196° e potevano contenere dal 2 al 15 $^0/_0$. Se si aggiunga che i cristalli, inizialmente gialli, tendono sempre più a divenire incolori, apparirà evidente l'analogia esteriore del comportamento dell'acido cinnamilidenmalonico e dei corpi fototropi.

Sugli argomenti portati dal Weigert in appoggio alla sua tesi, si può osservare quanto segue: 1°) L'identità degli spettrogrammi ottenuti coi raggi X sulle sostanze fototrope prima e dopo illuminazione, sembra contraddire l'ipotesi dello spostamento di gruppi atomici; tale identità si spiegherebbe piuttosto invocando o uno spostamento di legami senza movimento di gruppi, o lo spostamento di qualche atomo d'idrogeno, che non sembra facile distinguere per la sua piccolezza. 2°) Che nei cristalli impiegati dal Weigert la legge fotochimica dell'assorbimento non sia valida, è cosa per la quale non

([1]) Collocando il cristallo a 45° dal piano di polarizzazione, il comportamento era il medesimo, sebbene la distinzione fosse un po' meno netta.

si può dire che la sola spiegazione possibile sia nel negare l'esistenza di azione fotochimica: sul meccanismo di assorbimento della luce non si sa abbastanza per poter trarne conclusioni di questo genere; il fatto che la luce polarizzata agisce nei cristalli esaminati di preferenza in certe direzioni, farebbe piuttosto pensare che in altre direzioni le molecole potrebbero bensì dar luogo ad assorbimento della luce, ma offrendo poca presa alle trasformazioni chimiche.

In quanto agli argomenti per ritenere che la fototropia sia da classificare fra i fenomeni fotochimici veri e proprî, essi possono compendiarsi come segue: 1°) la fototropia è fenomeno reversibile, e la trasformazione va nei due sensi con luce di diversa lunghezza d'onda, precisamente come avviene in tanti equilibrî fotochimici di natura perfettamente chiarita [1]; 2°) la velocità di trasformazione segue la legge dell'azione di massa ed è proporzionale all'intensità della luce [2]; 3°) i coefficienti di temperatura delle trasformazioni fototropiche hanno dei valori che corrispondono perfettamente a quelli trovati nelle altre azioni fotochimiche [3]; 4°) gli stessi coefficienti crescono con la lunghezza d'onda, come io ho trovato per la prima volta in sostanze fototrope e come ho poi verificato per reazioni fotochimiche di carattere indiscutibile [4]; 5°) la fototropia è stata osservata in qualche caso anche in soluzione [5]; 6°) la forma cristallina, che resta uguale, secondo Weigert, prima e dopo illuminata la β-tetracloro-α-chetonaftalina, non sembra mutare neppure nelle azioni fotochimiche qui descritte [6] purchè non si lasci inoltrare l'azione della luce fino all'inizio della scomposizione dei cristalli misti; 7°) la luce polarizzata in un piano agisce differentemente sia sui cristalli di corpi fototropi sia su quelli soggetti a trasformazioni chimiche permanenti, a seconda della posizione in cui vengono esposti i cristalli stessi.

Debbo qui ringraziare la signorina Sofia Morassutti, laureanda in chimica, che mi ha validamente coadiuvato nelle esperienze qui descritte.

(1) Stobbe, Liebigs Annalen, *359*, I.

(2) M. Padoa e T. Minganti, questi Rendiconti, (1913), II, 500

(3) M. Padoa e G. Tabellini, ibid. (1912), II, 188; M. Padoa e B. Foresti, ibid., (1913), II, 5.

(4) M. Padoa e A. Zazzaroni, ibid. (1915), I, 828; M. Padoa e T. Minganti, ibid. (1915), II, 97; M. Padoa e C. Butironi, ibid. (1916), II, 215.

(5) Schmidt e Lupp, Berichte, XLI, 4223; Foresti, questi Rendiconti (1914), II 270.

(6) Per darne migliore conferma si stanno tentando misure cristallografiche.

Geologia. — *Ritrovamento di fossili nella dolomia del M. Gazzo presso Sestri Ponente* [1]. Nota di E. Repossi, presentata dal Socio E. Artini.

Nell'Appennino Ligure, ad occidente di Genova, esistono, come ognuno sa, alcune masse calcareo-dolomitiche degne di molto interesse. Una si trova presso Cogoleto, una seconda presso Arenzano, e diverse altre, in serie quasi continua, si allineano in direzione meridiana tra Sestri Ponente e Voltaggio. Esse si ritengono sottostanti ai calcescisti con ofioliti del gruppo di Voltri e, dal punto di vista tectonico, sulle tracce di quanto riconobbe per primo il Rovereto [2], sono generalmente considerate come nuclei di pieghe anticlinali.

La somiglianza con le masse dolomitiche a ponente di Savona (Bergeggi, Spotorno, Noli), abbastanza ricche di fossili, e coi *grezzoni* delle Alpi Apuane, le ha fatte attribuire fin da principio, in blocco, al *trias medio* [3]; e le scarsissime tracce di organismi in esse rinvenute poi (diplopore, crinoidi, gasteropodi indeterminabili), se confermano il riferimento loro al *trias*, non permettono una specificazione cronologica più precisa.

Alcuni autori (De Stefani, Franchi), considerando in particolar modo la massa calcareo-dolomitica della Madonna del Gazzo presso Sestri Ponente e quelle che seguono verso settentrione, e basandosi specialmente sui caratteri litologici, hanno emesso l'ipotesi che in esse siano rappresentati diversi piani. Così, ad esempio, il Franchi [4] attribuisce al *trias medio-superiore* la parte inferiore, propriamente dolomitica, di tali masse, mentre riferisce dubitativamente al *retico* una formazione-calcareo-scistosa, a luoghi fossilifera, che, specie a Monti Torbi e ad Isoverde, si sviluppa sopra gli strati dolomitici. Il De Stefani [5] va anche più in là, distinguendo, sempre nelle stesse masse,

[1] Lavoro eseguito nel laboratorio di mineralogia del Museo civico di storia naturale in Milano.

[2] G. Rovereto, *La zona di ricoprimento del Savonese e la questione dei calcescisti* (Boll. Soc. geol. ital., vol. 28, an. 1909).

[3] L. Mazzuoli e A. Issel, *Nota sulla zona di coincidenza delle formazioni ofiolitiche eocenica e triasica della Liguria occidentale* (Boll. com. geol., 1884).

[4] S. Franchi, *Relazioni preliminari sulla campagna geologica dell'anno 1911* (Boll. com. geol., 1912).

[5] C. De Stefani, *La zona serpentina della Liguria occidentale* (Rend. Acc. d. Lincei, 1913). Questo autore si era già antecedentemente occupato della questione, giungendo a conclusioni cronologiche alquanto diverse, ma in parte più rispondenti agli ultimi risultati ai quali ora si arriva, in diversi lavori: *Sulle serpentine italiane* (Atti Ist. veneto, 1884); *L'Appennino fra il Colle dell'Altare e la Polcevera* (Boll. Soc. geol. ital., vol. VI, 1887); *I grezzoni triasici nell'Appennino Ligure e nelle Alpi Marittime* (Proc. verb. Soc. tosc. sc. nat., 13 novembre 1887).

tre gruppi di strati: 1) calcari compatti, cerulei, chiari, alquanto magnesiaci, da lui per primo riconosciuti identici ai *grezzoni* che nelle Alpi Apuane stanno alla base della formazione marmifera; 2) calcari ceruleo-scuri, compatti, sottilmente stratificati, talora con qualche strato siliceo, spesso molto scistosi, simili ai calcari cerulei ed ai *bardigli*, talora scistosi, delle Alpi Apuane; 3) calcari terrosi, brecciosi, con frammenti di calcare compatto scuro e di scisti verdognoli. I primi sono ritenuti rispondenti al *Muschelkalk*; gli altri al *trias superiore*, giungendo forse, in qualche caso, all'*infralias*.

Le ragioni che inducono il Franchi a riferire dubitativamente al retico gli strati superiori della massa di M. Torbi e di Isoverde stanno nelle analogie ch'essi presentano nella posizione, nella facies litologica e nei fossili, sebbene indeterminabili, che contengono, con formazioni retiche delle Alpi occidentali e della Valtellina. Da questo riferimento scaturisce come conseguenza, confortata pure da analogie consimili, che le dolomie sottostanti debbono comprendere, oltre che il trias medio, anche il superiore.

Le ragioni del De Stefani sono invece ricavate dalle analogie che le masse calcareo-dolomitiche liguri presentano specialmente con le formazioni apuane.

Le ragioni dell'uno, come dell'altro di questi autori, sono certamente di grande valore, ma, pur tuttavia, essenzialmente analogiche, perchè, come appare da quanto s'è detto, gli scarsi avanzi fossili trovati nelle masse calcareo-dolomitiche in discorso sono appena sufficienti ad un lato riferimento cronologico.

In tali condizioni di cose, può avere un'importanza non del tutto trascurabile (tanto più che la posizione tectonica di queste masse è sommamente interessante pel geologo) il rinvenimento casuale di alcuni fossili determinabili in modo sicuro negli strati dolomitici della Mad. del Gazzo. Salendo verso questo santuario pel sentiero che ordinariamente percorre chi proviene da Sestri e dal Pian del Forno, a circa 300-320 m. sul livello del mare, e precisamente appena sotto un piccolo ripiano scavato artificialmente nella costa più sporgente del monte verso sud, trovai gli strati dolomitici abbastanza ricchi di avanzi fossili. E sebbene tali avanzi, come tutti quelli contenuti nelle formazioni congeneri, non siano in uno stato di conservazione molto buono, e sia difficile, data la natura della roccia, ottenerne esemplari interi, tuttavia vi potei riconoscere le tracce sicure di almeno *sei* specie diverse, di cui *due* determinabili in modo, a mio avviso, indiscusso.

Le due specie determinabili sono:

Macrodus Songavatii Stopp. sp.

Myophoria Caroli-Rivai Tommasi

Della prima specie, frequentissima in un tratto della roccia che per l'abbondanza di fossili si potrebbe chiamare una vera lumachella, si riconoscono bene numerosi esemplari, generalmente piccoli (5-8 mm. nella massima dimensione), ma in soddisfacente stato di conservazione.

Nella figura 1 è rappresentato uno degli esemplari meno incompleti e migliori. Confrontando tra loro parecchi individui, che si completano reci-

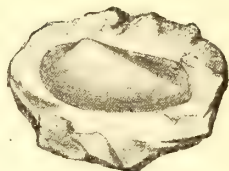



Fig. 1. — *Macrodus songavatii* Stopp. sp.

procamente, si ha un'idea sufficiente di tutti i caratteri della specie, rispondenti esattamente a quelli dati dagli autori [1].

Della seconda specie, assai più appariscente della prima, possiedo pure parecchi esemplari, in parte ridotti a semplici impronte od al solo modello interno: il guscio fu spesso completamente asportato, lasciando un incavo caratteristico tra il modello interno e la superficie della roccia includente, tappezzata di minuti cristalli di dolomite.

Anche sul riferimento di questa specie, fondata dal Tommasi proprio su esemplari da me raccolti nella *dolomia principale* delle vicinanze di Menaggio, sul lago di Como, non nutro dubbio alcuno.

La fig. 2 rappresenta due degli esemplari meno incompleti ed un modello interno. La determinazione fu fatta, oltre che in base alla descrizione datane dal Tommasi [2], anche per confronto con materiale della località tipica posseduto dal Museo Civico di Milano.

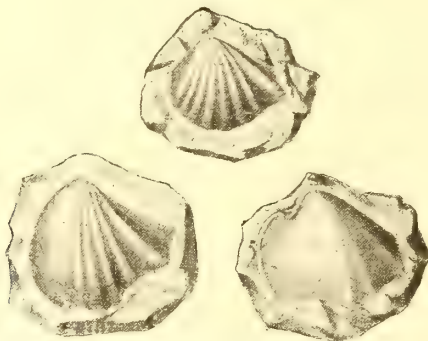



Fig. 2 — *Myophoria Caroli Rivai* Tomm.

Questa elegante specie fu rinvenuta finora solo tre volte, per quanto io so: a Velzo presso Menaggio; a Meride presso Mendrisio (Ticino), pure

[1] Vedi, ad es.: A. Tommasi, *Revisione della fauna a molluschi della dolomia principale di Lombardia* (Palaeontogr. ital., vol. IX, 1903).

[2] A. Tommasi, Mem. cit.

nella *dolomia principale*, dove la raccolsi in buoni e numerosi esemplari; ed alla Madonna del Gazzo. Essa va sicuramente avvicinata alla *Myophoria inaequicostata* Klipst., alla *M. picta* Leps. ed alla *M. chenopus* Laube, tutte specie del *trias superiore* o più propriamente della *dolomia principale*, formanti un gruppo che parmi assai caratteristico per questo piano.

Insieme con questa Myophoria, nel materiale raccolto al Gazzo, trovansi numerosi frammenti che sono probabilmente riferibili ad un'altra Myophoria, ad essa molto somigliante, specie per lo sviluppo caratteristico di una costa a forma di carena staccata nettamente dalle altre, ma differente per un numero maggiore di coste quasi egualmente robuste alle due estremità della conchiglia e per una maggiore convessità, oltre che per un maggiore sviluppo. Essa appartiene certamente al gruppo delle Myophorie ora citate, e si avvicina bene alla *M. picta*, ma non credo di poterla determinare in modo sicuro.

Pure in modo dubitativo avvicino alla *Myophoria Balsami* Stopp. alcuni esemplari, veramente un po' piccoli, della dolomia del Gazzo, ed alla *Myoconcha Cornalbae* Stopp. sp. un modello interno alquanto incompleto.

Nel materiale da me raccolto esistono pure molti altri frammenti di bivalvi, che possono far sperare in una più ampia mèsse con nuove ricerche sul posto, ma che non bastano ad un ravvicinamento qualsiasi a forme note.

Non rari sono pure i modelli interni di piccoli gasteropodi turricolati, simili assai probabilmente a quelli rinvenuti dal Franchi a M. Torbi e da lui ritenuti confrontabili con *Loxonema* trovati nei banchi superiori di molte masse dolomitiche delle Alpi Cozie e di Corona presso Savona.

Tenendo conto delle diplopore trovate dal De Stefani, dal Rovereto e dallo stesso Franchi negli strati del Gazzo, gli avanzi fossili di questa massa dolomitica si possono adunque così elencare:

Macrodus Songavatii Stopp. sp.
Myophoria Caroli Rivai Tomm.
M. cfr. *picta* Leps.
M. cfr. *Balsami* Stopp.
Myoconcha Cornalbae Stopp. sp. (?)
Loxonema sp. (?).
Gyroporella sp.

E se si vuol ricavarne una conclusione cronologica, si può ritenere che la dolomia del Gazzo sia almeno in gran parte, se non nella sua totalità (esclusi, s'intende, i calcari neri scistosi del suo fianco orientale), riferibile alla *dolomia principale*, o, comprensivamente, al *trias superiore*, escluso il retico. Difatti, sebbene tra i fossili finora rinvenuti manchino le specie più caratteristiche della *dolomia principale* (*Gervilleia exilis*, *Megalodus*, *Worthenia*), le specie sopra elencate sono tutte di tale livello o almeno del trias superiore.

Va inoltre notato che il punto in cui i fossili furono ritrovati è nel bel mezzo della serie degli strati costituenti, con un fascio pressochè verticale e diretto da sud a nord, il Bric del Gazzo. Se questi, come ritengono molti fra i valentissimi geologi che studiarono tectonicamente la regione, formano veramente un anticlinale, bisognerebbe concludere che almeno la parte affiorante della dolomia del Gazzo sia tutta appartenente alla parte superiore del trias. Nè voglio tralasciar di dire che anche i caratteri litologici della dolomia del Gazzo ricordano in modo perfetto quelli della dolomia principale delle Prealpi Lombarde: si notano in quella le stesse tinte, la stessa cristallinità alquanto grossolana, la stessa farinosità superficiale, la stessa forma brecciata a rigature bianche sporgenti e rugose, le stesse particolarità di modellamento superficiale che si osservano in questa. Chi conosce la dolomia principale lombarda, non può sottrarsi, salendo al Gazzo, all'impressione di trovarsi sopra una formazione perfettamente identica ad essa sin nei minimi particolari.

Questa determinazione cronologica della parte superiore almeno della dolomia del Gazzo viene infine a confermare il riferimento al *retico* dei calcari scistosi soprastanti, fatto dal Franchi. Oltre che al M. Torbi e ad Isoverde, anche in questi calcari neri scistosi del Gazzo, affioranti fra Panigaro e Serra in Val Chiaravagna, lungo il fianco orientale del complesso calcareo-dolomitico, ed anche un po' sul lato sud, io rinvenni lumachelle scistose a bivalvi e calcari con tracce, pare, di brachiopodi che in tutta la loro fisonomia ricordano le formazioni retiche delle più classiche località lombarde.

E nonostante che, sfortunatamente, non vi abbia finora rinvenuto forme determinabili, non esito ad associarmi completamente al Franchi nelle sue conclusioni sul riferimento cronologico di questi strati.

Più difficile è giudicare che importanza abbia il rinvenimento di fossili del trias superiore nella dolomia del Gazzo in riguardo al riferimento cronologico delle altre masse dolomitiche accennate in principio, e specie quelle di Cogoleto e di Arenzano. Per conto mio ritengo, quantunque non possa affermar nulla di preciso in proposito, che queste ultime siano veramente da riferirsi al *trias medio.* Noto che esse sono petrograficamente molto diverse dagli strati fossiliferi del Gazzo: sono più compatte, spesso quasi marmoree, e se contengono tracce di fossili, queste sono di crinoidi spatizzati, assai simili a quelle delle dolomie del trias medio di Noli, Spotorno ecc., alle quali parmi si avvicinino anche per la composizione chimica molto più che non a quella del Gazzo. La questione, del resto, va oltre il modestissimo cómpito che mi sono ora proposto e lascio ad altri, di me assai più competenti, il risolverla.

Geologia. — *Il problema dell'evoluzione dell'idrografia carsica sotterranea.* Nota I di P. SAVINI, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH.

J. Cvijić, l'illustre professore dell'Università di Belgrado, che da molti anni va occupandosi attivamente dello studio dei fenomeni carsici, nel fascicolo IV del tomo VI della « Recueil des travaux de l'Institut de Géographie Alpine » (Grénoble, 1918), ci dà uno sguardo d'assieme dei fenomeni carsici, quali gli sono apparsi dallo studio delle cavità sotterranee delle regioni carsiche in genere e di quelle della sua patria in particolare. Già nel 1893 egli aveva pubblicato un lavoro complessivo sui fenomeni carsici, nel quale questi sono opportunamente classificati e descritti secondo le conoscenze che se ne avevano allora; ed in seguito ci diede pure varî altri studî di regioni carsiche, d'interesse non solo regionale ma anche generale.

Poche questioni poterono appassionare i geografi e gli idrologi in questi ultimi anni quanto quella delle condizioni della circolazione sotterranea delle acque entro i massicci calcarei, in altre parole, dell'*idrologia carsica*, e quella del così detto ciclo di erosione carsico. La controversia aveva assunto persino il carattere di polemica, e, ciò che è peggio, addirittura di polemica personale. Data dunque l'importanza dell'argomento, che viene a conferire alla questione un nuovo carattere di attualità, sia anche perchè recentemente cercai con altri concetti, non molto dissimili, di risolvere in modo definitivo lo stesso problema, credo di qualche interesse riassumere il succitato studio geologico-speleologico, rilevando le analogie e le divergenze che passano fra la teoria del geologo serbo e quella da me ideata.

L'Autore, che considera il problema in una forma generale, esaminandolo dal punto di vista dello sviluppo delle idrografie sotterranee nelle regioni carsiche, svolge la tesi che questo sviluppo, il quale ha luogo a cominciare dalla superficie, in seguito ad un progressivo approfondimento delle idrografie stesse, dà luogo, a processo compiuto, all'esistenza di tre successive zone idrografiche, cioè:

1) La *zona secca*, la quale è costituita dalla parte più superficiale del massiccio calcareo, ed è caratterizzata da una siccità quasi assoluta. Le fessure e le cavità sotterranee di questa zona sono percorse da qualche corrente d'acqua solo durante il periodo delle pioggie, e in essa mancano quasi del tutto le sorgenti, e il movimento delle acque è per lo più quello dall'alto in basso. I corsi d'acqua ascendenti, proprî della zona idrografica sottostante, vi mancano quasi del tutto.

2) La *zona di transizione idrografica*, che presenta due caratteristiche, l'una permanente, l'altra temporanea. In questa si constata anzitutto l'esistenza di vene d'acqua costanti, talora veri corsi d'acqua; nel periodo delle pioggie, lo scarico delle acque verso il basso è rallentato localmente od arrestato, sia da strozzature delle fessure e delle cavità sotterranee, sia dall'influenza di corsi d'acqua ascendenti, provenienti dalla zona soggiacente. Queste acque ascendenti appaiono allora, in forma di sorgenti, nelle depressioni carsiche, le quali però nelle altre stagioni rimangono asciutte.

3) La *zona costantemente percorsa dall'acqua*, che è la più profonda, trovandosi al di sotto del fondo delle depressioni carsiche. Essa è troncata solo dalle valli allogene incavate fino allo strato impermeabile. Tutte le fessure in questa zona sono percorse da masse d'acqua più o meno voluminose, che discendono lentamente verso la profondità, rallentate dall'aderenza, come pure dalla forma, grandezza e ramificazione dei canali sotterranei, che sono spesso disposti a sifone. L'acqua è spesso arrestata e costretta a risalire, onde si sviluppano corsi d'acqua ascendenti, i quali, sotto la pressione idrostatica, penetrano in tutte le fessure e rimontano nella zona di transizione e, delle volte, più in alto ancora. È egualmente l'acqua di questa zona che sgorga nelle sorgenti sottomarine della costa adriatica.

Queste tre zone idrografiche non rimangono immutabili, ma, come s'accennò, ciascuna tenderebbe a svilupparsi progressivamente verso il basso, mentre anche l'abbassamento del massiccio calcareo fino al livello impermeabile si effettuerà costantemente per opera della degradazione atmosferica. Le tre zone non sono neppur sempre presenti, mentre, all'incontro, assai varie possono essere le particolari condizioni locali, come l'Autore cerca di far notare con alcuni esempî caratteristici.

Da questo esame, la Memoria del Cvijić ci appare quindi, nel suo complesso, come un prezioso sguardo d'assieme dei fenomeni carsici, mentre invece non troppo chiara e non sempre convincente riesce la sua spiegazione allorquando essa giunge alla parte conclusiva. L'Autore stesso ci confessa (a pag. 379) che, assorbito da altre ricerche, ancor nel 1909 non era riuscito a coordinare i fatti, a rifletterli sufficientemente e a formarsi delle opinioni ben fissate, il che intese fare appena nel suo lavoro che pubblicò di recente. Questa imprecisione potrà apparire ancor meglio dalle sue stesse spiegazioni, che ora esaminerò nelle loro particolarità, e ponendole di fronte agli accertamenti fatti, allorchè, anni or sono, mi accinsi a studiare le regioni carsiche della Venezia Giulia.

Premesso che le condizioni idrologiche possano essere assai diverse da una regione carsica a un'altra (tra la Carsia Giulia con un'ossatura di calcari cretacei e la penisola balcanica, caratterizzata dalla presenza di calcari amorfi o dolomitizzati dell'êra triassica) a seconda dell'altezza e dell'estensione del rilievo carsico, del modo e del grado di fessurazione, del regime

delle pioggie, della presenza e dell'estensione di strati impermeabili intercalati o laterali, del tempo da cui il processo carsico si è iniziato, e finalmente dei movimenti orogenetici di innalzamento o di abbassamento che possono essersi verificati o verificarsi nella regione, i risultati delle osservazioni non dovranno necessariamente essere gli stessi, indifferentemente se ottenuti da ricerche in territorî dei calcari cretacei o mesozoici. Questa circostanza, già rilevata dal Cvijić nel suo lavoro (a pag. 404), mentre ammette la possibilità che la profonda conoscenza della costituzione geologica di una determinata regione possa modificare i principî generali dell'idrografia stati precedentemente stabiliti per quei luoghi, non esclude invece il pericolo delle teorie troppo semplici e la mancanza di critica di chi le applica.

Di fronte a quel complesso di argomenti e di fatti addotti dall'Autore nel suo lavoro, potrebbe sembrare di poco valore una statistica contradittoria, tanto più che questa dovrebbe essere studiata caso per caso, sul posto, tenuto conto delle speciali situazioni geologiche e idrologiche della regione. Pur tuttavia, uno di questi casi, che non rientra nello schema, troppo semplicista, del Cvijić, sarebbe quello che considera la particolare funzione di ogni singola zona idrografica, il quale non sembra destinato a mantenere e rafforzare di nuovi argomenti e di nuove prove la posizione fondamentale che il professore serbo, con l'ideazione della sua teoria, erasi creata. Questo caso, che più degli altri viene a rendersi importante, ben differentemente è apparso dall'esplorazione stessa delle caverne, di quanto ce lo descrive il nostro Autore, la cui teoria, per vero dire, non sempre risponde a un concetto intuitivo. Le contraddizioni, in cui egli incorse, si renderanno maggiormente manifeste dai seguenti passi:

(A pag. 395-396): « *Les venues d'eau ascendante que nous rencontrerons souvent dans la zone hydrographique inférieure y manquent* (nella zona secca) *presque complètement: l'écoulement des eaux dues aux précipitations n'y est pas arrêté par des cours d'eau ascendants* ». A pag. 383 tale opinione vi si trova alquanto modificata, asserendo l'Autore che « *il y a même des cas, rares assurément, où des sources sont apparues* (indubbiamente attraverso la così detta zona secca) *dans les maisons des paysans du Karst* ». Alla pag. 398, ove tratta della III zona idrografica, l'Autore asserisce infine che in essa « se développent les cours d'eau ascendants qui, sous la pression hydrostatique, pénètrent dans toutes les fissures et remontent dans la zone de transition, *parfois même plus haut encore.* Dans cette zone, ils empêchent la descente des eaux venues de la partie supérieure et provoquent ainsi de nouveaux courants ascendants *qu'on voit apparaître au fond des poljes les plus élevés* et même des ouvalas les plus profondes ».

Non sempre corrispondente è pure l'ipotesi che l'Autore emette (a pag. 397) in riguardo alla presenza o assenza di cavità sotterranee nella « zona costantemente percorsa dall'acqua ». « *Déjà dans la zone de transition* — egli

scrive — *les cavités souterraines sont beaucoup moins nombreuses; ici, les grottes deviennent une rareté* ».

Per la spiegazione di tale sua teoria, il Cvijić tiene conto tanto delle idee del Martel, quanto di quelle del Grund, accostandosi però, nella parte sostanziale, decisamente a quelle dello speleologo francese. Per quanto egli non lo rilevi espressamente, dalla sua esposizione emerge chiaramente, che egli si appoggiò soprattutto a induzioni puramente logiche e a generalizzazioni forse troppo semplıciste. Rigettò, senza discuterle, le opinioni del Grund, il quale ritenne che la spiegazione più naturale per la circolazione sotterranea delle acque carsiche era quella di considerare il massiccio di calcare fessurato come imbevuto fino a una certa altezza da un'unica massa d'acqua, che dovrebbe riempire tutte le fessure e le cavità intercomunicanti, analoga alle falde acquifere che imbevono i terreni alluvionali, dette *falde freatiche*, perchè da esse si attinge l'acqua coi pozzi. Egli chiamò perciò questa massa d'acqua profonda semplicemente « *acqua di fondo* » (*Grundwasser*) [1], e la immaginò limitata da una superficie soggetta a forti oscillazioni coll'alternarsi dei periodi piovosi ed asciutti. Questa rappresentazione il Cvijić avrà avuto certamente presente quando iniziò lo studio delle regioni carsiche e delle acque sotterranee da cui quelle sono percorse. Fin dalle prime osservazioni dovette però trovarsi affatto disorientato, e la teoria dei così detti « pratici », seguìta da una valorosa schiera di esploratori, a capo dei quali era il Martel, dev'essergli sembrata certamente più corrispondente. Lo speleologo francese aveva spinto il suo ardimento nelle più profonde voragini e nelle più impervie caverne delle regioni calcaree di Francia, del Belgio, della Carsia

[1] Scartai del tutto la definizione di « *acque di fondo* » (*Grundwasser*) per distinguere le acque sotterranee scorrenti su terreni non assorbenti, da quelle attraversanti entro canali orizzontali i massicci calcarei, perchè assolutamente non appropriata. Qui si tratta in realtà di *acque freatiche semplicemente scorrenti* su terreni impermeabili soggiacenti ai massicci calcarei permeabilissimi. Di natura diversa sono invece le *falde freatiche salienti*, le quali alimentano i pozzi artesiani, e si trovano racchiuse entro strati impermeabili. In nessun caso però queste acque possono considerarsi come « acque di fondo ». Nel loro lavorìo sotterraneo, esse giunsero a compenetrare appena uno strato superficialissimo dell'epidermide, per così dire, della Terra, che è data dalla sua dura corteccia. Così che, se si riduce la Terra ad 1 : 10,000,000, ossia ad uno sferoide di circa metri 1,27 di diametro, persino le più vaste depressioni oceaniche, che oscillano fra i 4,000 e i 5,000 metri sotto il livello della superficie, non apparirebbero su tale sfera che come lievissime ammaccature di meno di mezzo millimetro di entità; e le più eccelse montagne ed i più profondi abissi del mare appena si potrebbero scorgere come leggeri increspamenti ed esigui infossamenti di meno d'un millimetro di grandezza. Dato adunque il loro ristretto raggio di azione, e data, soprattutto, la loro superficialità, come si possono ritenere tali acque sotterranee come « acque di fondo »? Che rappresentano infatti sulla Terra quei sedimenti superficiali che esse riescono ad attraversare prima di trasformarsi in vapore? Essi sono appena come lievi ammaccature di tre o quattro millimetri di entità sopra una sfera di tredici metri di diametro.

Giulia, di Grecia e degli Stati Uniti d'America, constatando in tal modo *de visu* l'andamento delle acque sotterranee. Egli discese con mirabile ardimento nei profondi pozzi o *avens* delle Causses e con imbarcazioni portatili potè percorrere gran parte delle grotte di Postumia e delle altre cavità percorse dalla Piuca sotterranea. In questo caso, egli, con Schmidl, Kraus ed altri, potè affermare di aver seguìto il corso sotterraneo del fiume, che riappare a Nord sotto il nome di Oncia, per scomparire nuovamente e ritornare di nuovo alla luce nei pressi di Nauporto, col nome di Lubiana. Analogamente si potè seguire per lungo tratto nelle ampie caverne di S. Canziano del Carso il Timavo superiore, che in esse si precipita e scompare; poi l'acqua chiude ogni accesso ulteriore, costituendo un passaggio forzato foggiato a sifone; ma era convinzione popolare che il virgiliano Timavo, corpo d'acqua che sbocca come fiume già formato presso S. Giovanni di Duino nella baia di Monfalcone, e dopo soli 1750 metri di percorso va a perdersi in mare, non fosse altro che la risorgenza del Timavo superiore, nascente alle falde del monte Catalano. Tale tradizione parve confermata anche quando, il 6 aprile 1841, Antonio Federico Lindner, essendo riuscito a discendere, dopo un paziente lavoro di sgombero di materiale franato, alla collina di sabbia esistente al fondo della grotta di Trebiciano, al cui piede, alla profondità di ben 322 metri, scorreva un vero fiume: evidentemente, si disse, il Timavo sotterraneo.

Questi esempî, e numerosi altri consimili, avevano formato la convinzione che l'acqua scorresse entro i massicci calcarei in vene, ruscelli e fiumi, attraverso canali liberi, qualche volta interrotti da sifoni, ma che, prescindendo da ciò e da altre particolarità, somigliassero a corsi d'acqua superficiali, mentre mancherebbero falde acquee simili a quelle dei terreni di imbibizione. Di fronte a questo nuovo complesso di argomenti e di fatti, che si potrebbero moltiplicare, e con cui il concetto dei « teorici », capitanati dal Grund, certamente non venne a conciliarsi, gli speleologi non tralasciarono di mettere in evidenza le smentite che l'esperienza dava alla teoria, e tutti i fatti particolari che parevano in contraddizione con essa. Il Grund si difese caso per caso, cedendo, in trincee successive, un po' di terreno, riconoscendo cioè una complessità di fenomeni che non rientrava tutta nello schema primitivo, secondo il suo dire, troppo semplicista. Ma nè allora nè poi il problema della circolazione sotterranea delle acque nelle regioni carsiche potè ritenersi definitivamente risolto. Coll'aumentare del numero degli studiosi della materia, si moltiplicarono pure le ipotesi; e la questione, che sino ad oggi aveva continuato a sfidare la perspicacia dei geologi e degli speleologi, non cessa perciò di rimanere un problema insoluto.

Fisiologia. — *Ricerche sulla natura del veleno dell'anguilla.* IV: *Nuovi esperimenti sulla dializzabilità dell'ittiotossico* [1]. Nota del dott. G. Buglia, presentata dal Corrisp. V. Aducco [2].

Per ciò che si riferisce alla proprietà del veleno dell'anguilla di essere o no dializzabile, riferii alcuni esperimenti in una nota precedente a questa [3]. Da essi è risultato che l'acqua di dialisi del siero di anguilla e dell'estratto di *cieche*, antecedentemente sottoposti ad un'accurata azione disgregativa (di natura chimica o fisica), iniettata nell'addome delle rane, produce la morte, dando fenomeni tossici che si osservano anche nell'avvelenamento per siero di anguilla e per estratto di *cieche* normali.

Sebbene avessi contemporaneamente constatato che il siero normale, anche dopo prolungata dialisi, conserva la sua tossicità, mentre il siero e l'estratto, dializzati dopo disgregazione, diventano innocui, allorchè si iniettano nell'addome delle rane, non mi ritenni ancora autorizzato ad affermare che il veleno dell'anguilla sia una sostanza dializzabile, poichè desideravo avere maggiori prove di giudizio.

A questo scopo ho ripetuto gli esperimenti, fatti precedentemente, sulle rane, con siero di anguilla e con estratto di *cieche*, associandovene altri, su cani e su conigli, con estratto di *cieche*, per indagare (come ho fatto nelle ricerche sulla termostabilità) [4] l'effetto dell'estratto, dializzato dopo accurata disgregazione, e l'effetto dell'acqua di dialisi di questo estratto, sulla funzione respiratoria e cardio-vascolare di animali a sangue caldo.

1° *Esperimento* (21-VII-919). — Si macinano in mortaio con cristalli di quarzo 4 cc. di siero del sangue di anguilla e si mettono a dializzare entro un ditale dializzatore in presenza di toluolo. Dopo poco tempo si osserva che la polvere di quarzo, derivante dai cristalli per l'effetto della macinazione, sedimenta al fondo del ditale, separandosi nettamente dal siero che rimane superiormente.

Per 5 giorni (due volte al giorno) rinnovo l'acqua di dialisi e al 6° giorno la riunisco tutta insieme (cc. 400). È trasparente incolora ed, evaporata a bagnomaria, dà

---

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Pisa, diretto dal prof. V. Aducco.

[2] Pervenuta all'Accademia il 12 settembre 1919.

[3] G. Buglia, *Ricerche sulla natura del veleno dell'anguilla*, Nota II. Atti della R. Acc. dei Lincei, 1919.

[4] G. Buglia, *Ricerche sulla natura del veleno dell'anguilla.* Nota I e III. Atti della R. Acc. dei Lincei, 1919.

un piccolo residuo che, sciolto in 12 cc. di soluz. fisiol (Na Cl al 0,9 %), è di colore gialliccio ed ha reazione alcalina.

Contemporaneamente raccolgo per decantazione il siero che, nell'interno del dializzatore, trovasi superiormente alla massa compatta della polvere di quarzo suindicata. Lascio il siero per qualche tempo all'aria, sino a evaporazione completa del toluolo. Il suo volume è di 12 cc. La reazione leggermente alcalina. Aggiungo ad esso gr. 0,1 di Na Cl.

a) Inietto 3 cc. del siero, sottoposto alla dialisi, nell'addome di una rana. Non osservo alcun fenomeno tossico degno di nota. L'animale muore nel 4° giorno dopo l'inezione.

b) Inietto 3 cc. del liquido, derivante dall'acqua di dialisi, nell'addome di un'altra rana di peso pressochè eguale a quello della precedente, gr. 20 circa. L'animale presenta, dopo poco tempo, fenomeni catalettici, seguìti da paresi e paralisi degli arti posteriori, e da leggero arrossamento del ventre e delle coscie. Dopo 1 ora circa, capovolto, dimostra grande difficoltà a raddrizzarsi spontaneamente, e nello sforzo ha tremori alle estremità degli arti posteriori. Dopo 10 ore, questi fenomeni persistono, anzi sono più gravi: la pelle dell'animale è diventata asciutta, e il corpo appare insecchito. Dopo 36 ore l'animale muore.

2° *Esperimento* (21-VII-919). — Si tritano in mortaio 20 grammi di *cieche* e se ne fa un estratto, aggiungendo alla poltiglia 40 cc. di acqua distillata. Dopo centrifugazione si macinano accuratamente, con cristalli di quarzo, 30 cc. dell'estratto e si mettono a dializzare entro tre ditali dializzatori, in presenza di tuololo. Come per il siero, dopo poco tempo osservo depositarsi, al fondo dei ditali, la polvere di quarzo.

Dializzo per 5 giorni, rinnovando l'acqua due volte al giorno. Al 6° giorno riunisco tutta l'acqua di dialisi (cc. 1000) e la faccio evaporare a bagnomaria. Il residuo, sciolto in 25 cc. di soluz. fisiol., mi dà un liquido di colore gialliccio a reazione alcalina.

Contemporaneamente raccolgo per decantazione l'estratto dializzato, che trovasi superiormente alla massa di polvere di quarzo, e lo lascio all'aria sino ad evaporazione completa del toluolo. Il volume è di 35 cc. Aggiungo ad esso gr. 0,25 Na Cl.

a) Inietto 3 cc. dell'estratto dializzato nell'addome di una rana del peso di gr. 22. Non avverto alcun fenomeno tossico. L'animale muore nel 4° giorno dopo la iniezione.

Inietto 17 cc. di questo stesso liquido nella vena giugulare di un coniglio ♂ del peso di gr. 3000. Non si rileva alcuna apprezzabile modificazione nè della pressione arteriosa, nè della frequenga della pulsazioni cardiache, nè del ritmo respiratorio.

b) Inietto 3 cc. del liquido, derivante dall'acqua di dialisi, nell'addome di una rana del peso di gr. 19. Dopo 1 ora circa si osservano fenomeni di paresi e paralisi agli arti posteriori. Capovolgendo l'animale, emette gridi e, sebbene compia sforzi per raddrizzarsi, non vi riesce. Alla mattina seguente si trova morto.

Inietto 17 cc. di questo stesso liquido nella vena giugulare del coniglio, che aveva rivevuto l'iniezione dell'estratto dializzato. L'altezza della pressione arteriosa non subisce variazioni. Gli atti respiratorî, dopo circa 10′, si fanno invece molto più ampî e meno frequenti (da 200 al 1′, diventano 74); le pulsazioni cardiache si rarefanno, ma diventano più energiche. L'animale diventa così calmo e tranquillo che sembra addormentato. Muore nella notte.

Dagli esperimenti riferiti, risulta evidente che il liquido di dialisi del siero di anguilla e quello dell'estratto di *cieche* macinati accuratamente, iniettati nell'addome di rane, producono la morte con fenomeni che si osservano anche

nell'avvelenamento da siero e da estratto normali. Essi però hanno prevalentemente carattere paralizzante, così che assomigliano ai fenomeni di quella forma di intossicazione lenta che si ha con piccole dosi di siero, o quando si usa siero che per natura è poco tossico [1].

Risulta inoltre, dall'esperimento fatto sul coniglio, che il liquido di dialisi dell'estratto di *cieche*, iniettato nelle vene, produce un effetto sedativo, ipnotico, che si rileva dalla minore frequenza e maggiore ampiezza degli atti respiratorii, dalla rarefazione delle pulsazioni cardiache e dallo stato di sonnolenza da cui è preso l'animale.

Il liquido dializzato invece (siero di sangue di anguilla ed estratto di *cieche*) non ha manifestato alcuna azione tossica immediata nè sugli animali eterotermi (rane), nè sugli omotermi (coniglio).

L'interpretazione di questi risultati mi lasciò dubbioso, poichè non avendo rilevato, nè col *liquido di dialisi* nè col *liquido dializzato* fenomeni tossici convulsivanti accompagnati da alterazione del ritmo respiratorio e da modificazioni della pressione sanguigna (come si osservano normalmente nell'avvelenamento da siero di anguilla e da estratto di *cieche*), ero condotto a pensare che, durante il processo di dialisi, il veleno venisse in parte alterato o distrutto. Ma, prima di giungere a questa conclusione, considerando che gli esperimenti sulla termostabilità avevano messo in evidenza la notevole resistenza che il veleno offre alle azioni fisiche anche energiche, volli ripetere gli esperimenti con alcune modalità tecniche.

3° *Esperimento* (28-VII-919). — Si tritano in mortaio 20 gr. di *cieche* e, aggiungendo alla poltiglia 40 cc. di acqua distillata, se ne fa un estratto che viene centrifugato. 30 cc. di esso si macinano con cristalli di quarzo e si mettono a dializzare entro tre ditali dializzatori.

Dopo 5 giorni di dialisi (durante i quali viene rinnovata l'acqua 2 volte al giorno), evaporo a bagnomaria tutta l'acqua di dialisi (cc. 1200). Sciolgo il residuo in 50 cc. di soluz. fisiol. e neutralizzo il liquido col qualche goccia di $HCl \frac{n}{5}$.

Raccolgo per decantazione l'estratto dializzato e lavo la polvere di quarzo, depositata al fondo dei tubi dializzatori, per tre volte con acqua, sbattendola ripetutamente: unisco quest'acqua di lavatura all'estratto decantato. Complessivamente ottengo 100 cc. di liquido (che chiamerò B), al quale, dopo neutralizzazione, aggiungo gr. 0,9 di Na Cl.

a) Inietto 20 cc. del liquido dializzato (liquido B), corrispondenti a 6 cc. di estratto originale, nella vena giugulare sinistra di un coniglio ♂ di gr. 2300 (cc. 2,5 circa per kgr.). Non è ancora terminata la iniezione che la pressione carotidea si abbassa rapidamente, portandosi, da un'altezza corrispondente a cm. 10,5 di Hg, a quella corrispondente a cm. 1; contemporaneamente l'animale è preso da un accesso convulsivo, il ritmo respiratorio si fa irregolare e le oscillazioni respiratorie diventano più manifeste. Circa

---

[1] L. Camus e E. Gley, *Recheches sur l'action physiologique du sérum d'anguille: contribution* ecc. Arch. internat. de pharmacodyn., vol. V, 1918, p. 247.

2′ dopo l'iniezione, cessano gli atti respiratorî. La pressione è a zero, e sul tracciato si osservano le ultime deboli pulsazioni cardiache.

55 cc. di questo stesso liquido (corrispondenti a cc. 16,5 di estratto originale) si iniettano, in tre riprese, nella vena giugulare sinistra di un cane ♂ di kgr. 7,800 (cc. 2 circa per kgr.). Anche in questo caso la morte dell'animale avviene coi fenomeni detti precedentemente: rapido abbassamento della pressione arteriosa, accesso convulsivo e irregolarità del ritmo respiratorio. L'arresto del respiro avviene un poco prima dell'arresto delle pulsazioni cardiache. Durante l'esperimento l'animale ha avuto un'abbondante secrezione salivare.

b) Inietto 30 cc. di liquido, proveniente dall'acqua di dialisi, nella vena giugulare sin. di un coniglio ♂ di gr. 2000. Non si hanno modificazioni della pressione arteriosa nè delle pulsazioni cardiache. Dopo 10′ circa, l'animale è così calmo e tranquillo come fosse addormentato; gli atti respiratorî sono diventati assai più ampî, regolari e meno frequenti. Dopo due giorni, durante i quali ha manifestato ripugnanza per il cibo, l'animale muore.

Questo esperimento chiarisce perfettamente il risultato negativo di quelli precedenti, poichè dimostra che una parte del veleno, quella ad azione prevalentemente convulsivante e che agisce sulle funzioni respiratoria e cardio-vascolare, non viene alterata o distrutta durante il processo di dialisi, ma semplicemente trascinata al fondo del dializzatore dalla polvere di quarzo, che si sedimenta.

Volendo quindi riassumere i risultati ottenuti con la dialisi, nelle presenti ricerche e in quelle precedenti, si può così concludere: *a*) che il siero di anguilla e l'estratto di *cieche*, quando sono in precedenza sottoposti ad un'accurata azione disgregativa, lasciano dializzare una sostanza ad effetto prevalentemente paralizzante sugli animali eterotermi (rane), e sedativo. ipnotico sugli animali omotermi; *b*) che i detti liquidi, disgregati e poi dializzati, producono negli animali omotermi (cani, conigli) un effetto prevalentemente convulsivante (con alterazione del ritmo respiratorio e della pressione arteriosa) e rapidamente letale.

Differente, dunque, risulta l'azione del *liquido di dialisi* da quella del *liquido dializzato*. Questa differenza potrebbe interpretarsi, a mio modo di vedere, in due maniere: si potrebbe pensare che il veleno dell'anguilla sia costituito da un'unica sostanza la quale, in determinate condizioni (dipendenti da processi disgregativi), dializza soltanto in piccola quantità, e allora presenta un'azione paralizzante; la maggior quantità invece, non dializza perchè rimane legata a sostanze non dializzabili, e allora ha un' azione prevalentemente convulsivante. Ovvero si potrebbe supporre che i fenomeni tossici, che si osservano nell'avvelenamento da siero di anguilla, per l'azione dell'estratto di *cieche* ecc., siano dovuti all'azione di due differenti sostanze, aventi in comune il carattere della termostabilità, di cui l'una (quella ad azione ipnotica, paralizzante) è dializzabile, l'altra (quella

ad azione convulsivante) non è dializzabile [1]. Delle due interpretazioni, la seconda mi sembra per ora assai più attendibile e soddisfacente.

E siccome il siero, che non è stato sottoposto ad azioni disgregative, conserva inalterata la sua azione tossica dopo prolungata dialisi, si potrebbe ammettere anche come propabile che, nel siero normale di anguilla, la sostanza o le sostanze tossiche si trovino in un legame più o meno labile con altre sostanze contenute nel siero stesso (sostanze albuminose). Il calore avrebbe per effetto di aumentare la stabilità di questo legame, rendendo il siero quasi del tutto innocuo per semplice immobilizzazione, non per alterazione o distruzione del veleno; le azioni disgregative, quali potrebbero essere una sufficiente macinazione con cristalli di quarzo od un processo fermentativo, romperebbero invece detto legame.

L'azione disgregativa, dovuta ad un processo fermentativo, potrebbe così spiegare non soltanto la differente intensità dell'azione tossica del siero di anguilla sui varî tessuti e sui diversi animali (immunità naturale), ma anche spiegherebbe particolarmente perchè l'azione globulicida del siero di anguilla si manifesti più intensa e più rapida a quelle temperature che rappresentano l'*optimum* per lo svolgersi dei processi fermentativi in genere.

Ulteriori ricerche, specialmente con indirizzo chimico. potranno chiarire meglio la questione. Per ora, come primo tentativo di orientamento, posso riferire di aver constatato che il siero di anguilla e l'estratto di *cieche* (come anche l'estratto di pelle di anguilla e il liquido *filante* concentrato con l'evaporazione), sottoposti o non a macinazione con cristalli di quarzo, presentano tutti, coi reattivi del Pettenkofer, una colorazione, più o meno evidente, che ricorda quella dei sali biliari, e che questa stessa reazione (e non quella del biureto) la dà l'acqua di dialisi dei suddetti liquidi, quando in precedenza sono sottoposti ad accurata azione disgregativa.

[1] Nel corso di queste ricerche ho fatto alcune prove per stabilire se l'azione emolitica che hanno il siero di anguilla e l'estratto di *cieche* sul sangue di altri animali, sia dovuta alla sostanza che dializza o, piuttosto, a quella che non dializza; ma non avendo potuto raccogliere dati sufficienti per giungere ad una sicura conclusione, mi riprometto di fare al riguardo nuove e più numerose indagini.

Fisiologia. — *Contributo alla conoscenza degli enzimi. I: Amilasi dell'orzo germogliato* (1). Nota di D. Maestrini, presentata dal Corrisp. S. Baglioni.

La pianta, come è noto, a periodi di riposo alterna periodi di attività; in cui produce quantità di sostanze alimentari maggiori del bisogno, che deposita nel così detto *sistema di riserva* (semi o spore).

In questo *sistema*, all'epoca della germinazione, le proteine, i carboidrati, i grassi e i lipoidi depositati, subiscono per opera di speciali fermenti, modificazioni, che li rendono utilizzabili dalla nuova pianta.

Tra i fermenti, che operano queste profonde modificazioni, il più studiato fu l'*amilasi*, come è la più diffusa: essa trovasi in tutte le piante o parti di piante amilifere, nonchè in altre prive di amido, ma capaci di utilizzarlo (es., aspergillus, muffe ecc.).

Le *proteasi* richiamarono pure l'attenzione dei ricercatori, furono divise in *fermenti pepsici* (agenti in ambiente acido), che dànno la sola peptonizzazione delle sostanze proteiche, ed in fermenti tripsici (agenti in ambienti alcalini), che trasformano i peptoni in aminoacidi. Nei funghi, ad es.: sarebbero *fermenti pepsici*, nei batterî, invece *tripsici*.

Molto poco studiate al contrario furono le *lipasi*: dimostrate nelle piante inferiori (funghi, alghe, muffe, ecc.), nelle piante superiori sono state ricercate soltanto nei semi oleiferi (2).

Anche per molti altri fermenti (seminasi, citasi, pectinasi, emulsina, mirosina, ossidasi ecc.), le indagini possono dirsi appena iniziate (3).

Sia dunque per le vaste lacune, che lo studio degli enzimi vegetali presenta, sia per l'utile pratico, che da indagini accurate e complete potrebbe derivare, sono state intraprese nel nostro Istituto una serie di ricerche. Di esse le prime sono state rivolte all'*orzo germogliato*.

Nella presente Nota riferiamo i risultati sull'*amilasi*, riserbandoci di riferire sugli altri fermenti in Note successive.

L'*amilasi*, scoperta nel 1914 da Kirchoff (4), fu lungamente oggetto di studio.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di fisiologia della R. Università di Roma, diretto dal prof. S. Baglioni.

(2) Cfr. C. Richet, *Dict. de physiologie*, tom. X. fasc. I, pp. 158 160, anno 1919.

(3) Cfr. Enciclop. agr. ital., parte I. *Fisiologia vegetale*, pag. 181, anno 1919.

(4) Cfr. I. Effron, *Les enzymes et leurs applications*, pag. 121, an. 1899, Paris; e C. Richet, *Dict. de physiol.*, tom. VI, pag. 317, an. 1903.

La tecnica da noi seguìta fu: Farina di orzo, germogliato ed essiccato al disotto di 40° C., mescolata nelle proporzioni del 30 °/₀ con acqua distillata (acidulata mediante ac. acetico al titolo di gr. 0,03 mole °/₀₀), è estratta per 6 ore alla temperatura di 20° C. circa, coll'aggiunta di timolo o di toluolo. L'estratto è filtrato, e, preso di esso varie parti aliquote uguali (di cui alcune bollite, per distruggere il fermento), si aggiunse a ciascuna una determinata quantità di soluzione di amido solubile (2 °/₀), e si portarono tutte in termostato, a 37°-40° C. Dopo 24 o più ore di digestione, si calcolava lo ***zucchero invertito***, seguendo, con qualche modificazione, il metodo di C. I. Litner[1]. Terminata, cioè, la digestione, tutte le prove erano bollite per 10′ e filtrate. Contemporaneamente si preparano 6 provette, contenenti ciascuna 5 cm.³ di liquido di Fehling; si fanno cadere da una buretta quantità varie (per es., da 1-6 cc.) di ciascun filtrato da esaminare; si portano le provette in bagno-maria bollente, ove si tengono per 10′, indi, mediante acido acetico e ferrocianuro potassico si osserva la provetta, in cui la riduzione è completa, e quella immediatamente precedente, in cui è incompleta. Si ripete la prova più volte, usando quantità varie del liquido della buretta, comprese fra i limiti suddetti, finchè si giunge ad avere il risultato con errori assolutamente trascurabili.

I risultati delle molteplici esperienze eseguite, furono:

1) l'*amilasi dell'orzo germogliato* è estraibile con acqua distillata; più attiva però si presenta nell'estratto acidulato con acido acetico, al titolo di gr. mole 0,03 °/₀₀;

2) per ottenere un liquido molto attivo l'estrazione deve avere una certa durata (almeno 6 ore);

3) l'*amido solubile del commercio* è da questo estratto molto fortemente scisso, anche in ambiente neutro (potere riducente di 1 cm³ di estratto al 30 °/₀ = mmgr. 9,6 di zucchero invertito); gli *altri amidi* (di orzo, di patate o di mais) non sono scissi, se prima non ridotti a salda, e se l'ambiente non ha un certo grado di acidità (ac. acetico al titolo di g. mole 0,03 °/₀₀);

4) la diversa origine degli amidi non influisce sensibilmente sull'attività amilolitica;

5) l'*ac. cloridrico* e l'*ac. acetico* agevolano l'azione dell'amilasi pressochè nello stesso modo;

6) l'*idrato di potassio al titolo di gr. mole 0,03* °/₀₀, agendo per 10 ore, paralizza l'attività amilolitica.

Mediante apparecchi simili a quelli di Shukoff, per la determinazione del punto di solidificazione[2], ho anche stabilito la temperatura di distruzione del fermento e la temparatura ottima di azione. Per determinare la prima si sono tenute varie quantità di estratto, per 1/2 ora a diverse temperature, indi si è proceduto, col solito metodo alla digestione in termostato. Per ricercare la seconda, le varie miscele di estratto e di amido furono tenute nei suddetti apparecchi, per alcune ore, a determinate temperature.

7) Da 50° C. in su, il rendimento in zucchero invertito va diminuendo; verso 70° C. è assolutamente nullo. *Il massimo rendimento è a circa 45° C.*

(1) E. Molinari, *Chimica organica*, pag. 238, an. 1912.
(2) Shukoff, Chem. Zeit., 99, 1111, an. 1901.

Biologia. — *Metodo per la determinazione dei piani del cranio* (¹). Nota del dott. Sergio Sergi, presentata dal Corrisp. S. Baglioni.

Se imagino che una sorgente luminosa sia ridotta ad un punto, posso considerare il fascio di raggi lucidi che individuano un cono. Se un piano interseca detto fascio perpendicolarmente all'asse del cono, questo sarà retto e circolare. Il segmento di retta che taglia il cono, passando per l'asse, si proietta sulla base del cono passando per il centro del cerchio base. I segmenti di retta possono essere materializzati da fili che intercettano la luce, donde le ombre di essi sul piano base.

Se fra la base del cono e un filo nelle condizioni sopraddette io colloco un corpo opaco di figura qualsiasi, il filo, l'ombra del filo sul corpo opaco e la sua proiezione sulla base giacciono in un unico piano perpendicolare alla base del cono. Un secondo filo, sempre passante per l'asse del cono, proietterà la sua ombra sul corpo opaco; e questa, il nuovo filo e la sua proiezione sulla base individuano un piano pur perpendicolare alla base. Questi due piani formano un diedro che può essere misurato; e l'angolo del diedro sarà l'angolo delle due proiezioni dei due fili sul cerchio base, e intanto sul corpo opaco si avranno le tracce dei due piani del predetto diedro.

Per la determinazione dei piani del cranio dell'uomo e dei primati in genere, e conseguente orientamento del medesimo su uno di essi, mi valgo di questo principio nel modo che segue:

La sorgente luminosa deve essere di una intensità notevole e deve avere una estensione possibilmente molto ridotta; la luce migliore è quella data da una lampada ad arco. Su un piano orizzontale, scelto per compiere l'osservazione ed esattamente controllato con il livello a bolla d'aria, determino con un filo a piombo il punto nel quale cade la perpendicolare dal centro della sorgente luminosa. La distanza di questa dal piano si stabilisce sperimentalmente, avendo cura di fissare la lampada quando l'ombra del filo o dei fili, di cui parlerò qui sotto, è contemporaneamente più distinta sul piano orizzontale base e sul cranio. Questo saggio si compie una volta tanto, prima di incominciare le osservazioni. La verticale è l'asse del cono luminoso retto e circolare; il punto di incontro di esso con il piano orizzontale è il piede dell'asse. Il cerchio base del cono che considero è inscritto in un quadrato di lati uguali a quelli del cubocranioforo di Martin. Disegno sul piano il

(¹) Lavoro eseguito nell'Istituto di Antropologia dell'Università di Roma.

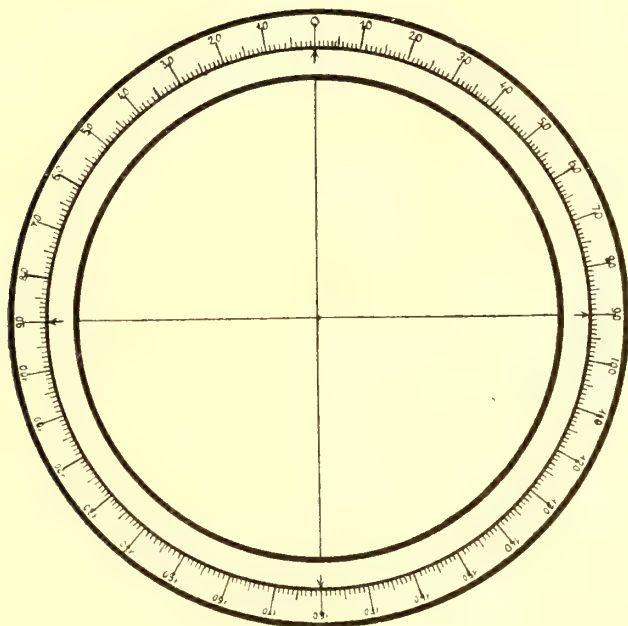
quadrato e due rette a novanta gradi che passano per il suo centro e dividono per metà ogni lato del quadrato. Le rette disegnate nel quadrato cadono su diametri della base del cono luminoso, perchè passano per il centro di esso.

Pongo sul piano così preparato il cubocranioforo in modo che una delle sue facce coincida con il quadrato disegnato; l'asse verticale dello strumento allora coincide con la verticale della sorgente luminosa. Sulla faccia superiore del cranioforo applico un telaio quadrangolare, a lati uguali a quelli del cranioforo. Questo telaio porta due fili disposti ad angolo retto, che si incontrano nel mezzo di esso. L'apparecchio è orientato quando il punto di intersezione dei fili si trova sulla verticale della sorgente luminosa, ed allora le ombre dei due fili si possono far coincidere con le rette inscritte nel piano base.

Per determinare nel cranio la traccia di un piano, si fa ruotare il cranio sul cranioforo intorno ai suoi assi fino a che l'ombra di uno dei due fili coincide con i punti del cranio per i quali deve passare il piano prescelto. Il piano è indicato esattamente dall'ombra che si proietta sulla superficie del cranio, ed il suo tracciato può essere disegnato su di essa con la matita. Così il cranio è orientato verticalmente rispetto al piano prescelto, e quindi si fissa stabilmente allo strumento. Se si vuole orientarlo orizzontalmente rispetto al medesimo piano, basta rivolgere il cranioforo di novanta gradi su una delle facce perpendicolari a questo piano. Si può raccogliere il craniogramma o col diagrafo o col diottografo in una delle due posizioni secondo i fini della ricerca. Tutto questo, finchè si mantiene rigorosamente l'orientamento tra telaio portafili e cubocranioforo secondo le norme suindicate. Se però si sposta il cranioforo dalla posizione primitiva e si fa ruotare tutto l'istrumento intorno al suo asse verticale con il cranio già fissato e orientato verticalmente rispetto ad un piano prescelto, avendo cura di mantenere il telaio portafili in modo che il punto di intersezione dei fili cada sulla verticale della sorgente luminosa e l'ombra dei due fili coincida sempre con due relative rette del piano base, si possono disegnare, seguendo le relative ombre proiettate sulla superficie cranica, le tracce di tutti quei piani verticali che si vogliono studiare con quel dato orientamento del cranio. Rivoltato allora il cranioforo nella seconda posizione, e cioè di novanta gradi rispetto al piano già prescelto e secondo il quale il cranio si dispone orizzontalmente, si raccoglie il craniogramma e su questo si riportano anche i piani tracciati sulla superficie cranica. Sul craniogramma si potrà così compiere la misura degli angoli che fanno fra loro i varî piani tracciati. Invece di muovere il cranioforo, si può far ruotare il telaio portafili: e per tale evenienza è opportuno di avere inscritto precedentemente un maggior numero di rette sul piano base, perchè queste sono necessarie a controllare la esatta posizione dell'apparecchio rispetto alla sorgente luminosa, non essendo possi-

bile per l'interposizione del cranio di vedere dal di sopra di esso il centro della base, a meno che non si voglia determinarlo con il filo a piombo o meglio con le punte delle due asticelle del diagrafo.

Un rilievo è ancora necessario di fare. La superficie illuminata del cranio, su cui si proietta l'ombra del filo, non contiene sempre tutti i punti per i quali si vuole far passare un dato piano. Ma uno di questi si può trovare sul cono d'ombra del corpo medesimo. In tal caso si ricorre, per l'orientamento, ad una di quelle asticelle orizzontali che si usano comunemente in craniometria per la determinazione dei punti: allora è sufficiente che l'asti-

cella, che tocca con la sua estremità il punto nascosto, si trovi per intero nel piano dell'ombra proiettata dal filo, perchè il cranio sia orientato rispetto al punto indicato.

Per misurare direttamente sul cranio l'angolo compreso tra due piani, si può ricorrere ad un altro apparecchio. Si applichi sulla faccia superiore del cranioforo un doppio anello circolare metallico, costituito cioè, come nel teodolite, di un anello esterno che può anche essere fissato mediante apposite morse al cranioforo, e di un anello interno il quale si muove nell'interno del precedente senza cessare di toccarlo nel suo contorno. L'anello esterno è graduato; l'anello interno porta i due fili ad angolo retto. Dopo avere orientato l'apparecchio come nel caso precedente, in modo che uno dei due fili segni con la sua ombra la posizione sul cranio di un piano verticale

prescelto, si fissa l'anello esterno al cranioforo e si fa ruotare quello interno sino a che lo stesso filo segni con la sua ombra la proiezione di un altro piano verticale. Allora il filo ha descritto intorno all'anello esterno un arco che serve di misura all'angolo cercato e di cui si può calcolare il valore direttamente mediante la graduazione indicata.

Il metodo descritto è suscettibile di complesse amplificazioni, delle quali non mi occupo oggi.

Biologia vegetale. — *Della supposta partenocarpia del nocciuolo e dei suoi eventuali caratteri: osservazioni ed esperienze.* Nota I di A. Trotter, presentata dal Corrisp. P. A. Saccardo.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Patologia vegetale. — *Intorno al comportamento di alcune varietà di Frumento rispetto alla Carie.* Nota del prof. Vittorio Peglion, presentata dal Socio G. Ciamician.

La campagna frumentaria 1919 resterà memorabile negli annali della agricoltura emiliana soprattutto per due ragioni: la prima è che contrariamente alle previsioni pessimistiche suggerite dalle condizioni dei seminati sino a primavera avanzata, il prodotto fu abbondante: frequentissime furono le produzioni unitarie a tutta superficie superiori ai 30 quintali; la seconda nota saliente dell'annata è stata data da imponenti infezioni di carie che da ragguagli diretti, compiuti alla trebbiatura hanno abbassata la produzione per ettaro, negli appezzamenti colpiti, a 15-18 quintali di fronte ai 28-30 quintali ricavati negli appezzamenti immuni.

La indagini compiute su 34 campioni, raccolti in campagna o prelevati successivamente da partite di frumento riconosciuto *carbonato* dalla Commissione d'incetta dei cereali della provincia di Bologna, hanno rivelato che 14 di essi, provenienti da diverse località di quest'ultima provincia erano colpiti da *Tilletia caries* (D. C.) Tul.; 20 provenienti dal Basso Ferrarese e da località diverse delle provincie di Bologna, Modena, Ravenna erano colpiti da *T. laevis*, Kühn. Alcuni campioni presentavano entrambe le specie di parassiti. I campioni di frumento esaminati erano riferibili alle varietà Gentil Rosso, Inallettabile, Rieti, Cologna ed uno proveniva da un campo coltivato a Carlotta Strampelli.

I danni più gravi sono stati risentiti dai seminati di Gentil Rosso ed Inallettabile. Una spiccatissima resistenza che rasenta l'immunità pratica si è verificata invece nei seminati di Cologna, nei quali a parità di ogni circostanza era rarissima qualche spica cariata, mentre nello stesso fondo in appezzamenti contigui Gentil Rosso ed Inallettabile erano infettati al punto da diffondere l'ammorbante esalazione caratteristica nell'ambiente circostante ed il prodotto subiva una decurtazione che in taluni fondi fu di circa la metà.

Il diverso grado di resistenza delle specie e varietà di frumento rispetto alle carie è stato oggetto di ricerche fra le quali sono specialmente istruttive quelle del Tuboeuf [1], Kirchner [2] ed Hecke [3]. Queste ricerche dimostrano che il valore pratico di una varietà di frumento rispetto al comportamento verso la carie è il risultato di due fattori: la resistenza intrinseca ed il grado di energia germinativa. Varrebbero pertanto nel giudizio dei frumenti per quanto concerne la resistenza alla carie i medesimi criterî con cui si valuta il comportamento dei frumenti verso le ruggini. Come di fronte a *P. graminis* è stata sperimentalmente accertata la resistenza assoluta di talune stirpi di *Tr. durum*, così di fronte a *T. caries* resulterebbe dalle prove di Kirchner e dell' Hecke la resistenza abbastanza accentuata delle discendenze di *T. polonicum*. Codesta resistenza intrinseca, considerata cioè come un attributo specifico di difesa dell'organismo rispetto al parassita è un carattere mendeliano come hanno dimostrato Biffen e soprattutto Humphrey e collaboratori per quanto riflette la resistenza alle ruggini, come resulta dalle prove eseguite dall' Hecke con un ibrido (*Trit. polonicum* × *Tr. vulgare*) studiato dal punto di vista della resistenza alla carie in confronto ai progenitori.

La resistenza intrinseca è quindi indipendente dal grado di energia germinativa che influisce sul comportamento dei frumenti verso la carie pressochè alla stessa stregua della precocità del ciclo vegetativo rispetto alle ruggini.

I frumenti precoci, come il Cologna, sfuggono agli attacchi tanto che gli autori americani ed australiani li raggruppano sotto il nome di *Rust-escaping:* così le varietà di frumento dotate di notevole energia germinativa, come il frumento Ohio nelle ricerche di Tuboeuf ed Appel [4], appaiono suscet-

[1] Tuboeuf K., *Studien ueber Brandkrankh.*, Arb. Biol. Anst. 1902, II; *Die Brandkrankh. des Getr.*, Stuttgart 1910.

[2] Kirckner O., *Ueber Empfindl. versch. Weizensorten fur Steinbrand*, Fühlings Landwirt. Ztg. 55 Zahrg., 57 Jahrg.

[3] Hecke L., *Einfluss von Sorte und Temp. auf Steinbrand befall.-Zeitsch. Landw. Versuchs in Oesterr.*, 12 Jahr. 1909.

[4] Appel O., *Untersuch. ueber den Brand* ecc., Mitteil. Kais. Biolog. Anstalt in Jähre, 1906. Berlin 1907.

tibili di sfuggire alla carie. Tuttavia resulterebbe dalle esperienze del Kirchner confermate dall'Hecke, che questo apprezzamento non ha un valore assoluto e come non si deve arguire da una bassa energia germinativa la predisposizione di una varietà a contrarre la carie, neppure un'alta energia germinativa è indizio sicuro di resistenza all'infezione.

Ne viene che deprimendo l'energia germinativa che è alla stretta dipendenza delle condizioni di umidità e di temperatura a cui si compie la germinazione è relativamente agevole porre in evidenza il grado di resistenza posseduta dalle varietà di frumento.

Abbiamo applicato questo concetto allo studio di 13 famiglie di frumento, selezionate ed introdotte nella grande coltura dal collega prof. Todaro: i singoli campioni di seme sono stati uniformemente imbrattati colle spore provenienti dalla triturazione di 5 pseudo-semi colpiti da *Tilletia laevis*. Parte è stata seminata in grandi vasi il 21 novembre 1918; il resto è stato seminato in piena terra, in file il 23 novembre. La germinazione fu lentissima in quanto soltanto il 15 dicembre spuntarono le prime piumette. I resultati avuti nello scorso luglio resultano dalla seguente tabella:

Famiglie	N.°	Totale delle spighe ottenute	Spighe sane	Spighe infette	Percentuale spighe infette
Cologna	12	208	138	70	% 33,6
Zucchetto	238	332	210	122	» 36,7
Cologna	29	184	101	83	» 45,1
Zucchetto	235	181	91	90	» 49.7
Carosello	112	229	99	130	» 56,7
Turgido	255	207	80	127	» 61,3
Gentil rosso Seniaristato	48	200	76	124	» 62,0
Marzuolo	83	821	297	524	» 63,8
»	87	347	114	233	» 67,1
Romanello	211	169	50	119	» 70,4
Inalterabile	179	82	24	58	» 70,7
Rieti	39	198	56	142	» 71,7
Romanello	187	248	64	184	» 74,1

Gli estremi di questa scala (Cologna 12 = *33,6* % — Romanello 187 = *74,1* %) sono assai più distanti di quelli che corrono tra *Triticum polonicum*, *Tr. polonicum* × *T. vulgare* e *T. vulgare* nelle esperienze dell'Hecke, compresi tra 23,5 % e 40 %. Coordinando questo resultato colla osservazione precedentemente riportata della quasi assoluta immunità del Cologna coltivato negli stessi fondi ove gli altri frumenti sono stati decimati dall'infezione si può trarne la conclusione che questo frumento così come lo Zucchetto è dotato di una notevole resistenza agli attacchi della *T. laevis*, di cui si dovrebbe tener conto nelle imprese di perfezionamento delle varietà di frumento per selezione o per incrocio.

Patologia. — *Sull'infettività del sangue dei polli affetti da tumori sperimentali.* Nota di FRANCESCO PENTIMALLI, presentata dal Corr. GINO GALEOTTI [1].

Fu osservato da Rous [2], e confermato da Bürger [3], che il sangue di polli, affetti dal noto sarcoma trapiantabile e filtrabile, inoculato nel muscolo pettorale di animali sani, riproduce il tumore. Rous afferma che riesce infettivo anche il plasma di polli, che, oltre al tumore principale, presentano metastasi negli organi; ma questa affermazione non fu confermata da Bürger che ha mescolato il plasma proveniente da 7 polli moribondi per tumori, con metastasi, e l'ha inoculato, con esito negativo, nel muscolo pettorale di altri animali.

L'infettività del sangue può riferirsi tanto alla circolazione del *virus*, quanto a quella di cellule neoplastiche, ma non vi sono, fin'ora, eesperimenti che stabiliscano le condizioni di tale infettività. Per altri *virus* filtrabili è noto che agiscono anche a forti diluizioni: il *virus* del vaccino è attivo ad una diluizione di 1:1000 [4]; l'epitelioma contagioso degli uccelli è virulento ad una diluizione di 1:2000 [5]; il *virus* dell'afta epizootica è infettivo ad una diluizione di 1:5000 [6]. Maggiora e Valenti [7] trovarono che, con 4 ccm. di una diluizione 1:125,000,000 del *virus* della peste dei polli, si può ancora produrre l'infezione. Secondo Celli e De Blasi [8], nell'agalassia contagiosa delle pecore, in alcuni casi basta il semplice fregamento dei capezzoli della mammella con latte contenente il virus, per far sviluppare la malattia.

Le mie ricerche furono rivolte a delucidare varie questioni attinenti all'infettività del sangue dei polli affetti sperimentalmente dal sarcoma fusocellullare di Rous.

Infettività del sangue in toto. — Molti esperimenti furono compiuti inoculando nel muscolo pettorale di polli sani 5 ccm. di sangue proveniente

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di patologia generale della R. Università di Napoli.

[2] The journal of the american medical Association, vol. LVIII, 1912.

[3] Zeitschrift für Krebsforschung, Bd. XIV, 1914.

[4] Riferito da Lipschütz in Kolle u. Wassermann, Handbuch d. Bakter.

[5] Burnet, Ann. Inst. Pasteur, 1906.

[6] Löffler, Centralblatt f. Bakter, 1908.

[7] Zeitschrift f. Hyg. u. Infekt. Bd. 46 e 48.

[8] Centralblatt f. Bakter, 1906. Ann. d'igiene sperim. 1906.

da animali con grandi tumori nel punto di inoculazione del *virus*, ed estese metastasi negli organi interni. Questi esperimenti risultarono sempre positivi, ed anzi questa è una delle vie di inoculazione da me frequentemente usata per la conservazione del ceppo del tumore.

Esperimenti con samgue diluito. — Risultano dall'annessa tabella:

Numero degli esperimenti	Diluizione in liquido di Ringer del sangue infetto	Quantità (in cms.) di diluizione inoculata	Risultato
1	10 %	8	positivo
2	„	4	id.
3	„	2	id.
4	„	1	id.
5	1 %	8	id.
6	„	4	id.
7	„	2	id.
8	„	1	id.

Esperimenti con corpuscoli rossi. — Il sangue, prelevato dalla carotide, di un pollo che presentava grossi tumori nel punto d'inoculazione e metastasi nel fegato e nei polmoni, viene defibrinato, ed i corpuscoli rossi sono lavati con soluzione fisiologica e centrifugati, per 5 volte, in una centrifuga elettrica a 4000 giri al minuto. L'inoculazione di una porzione di questi corpuscoli nel muscolo pettorale di due animali sani, ha dato risultato positivo, per quanto fu osservato che i tumori si svilupparono con grande lentezza, in relazione ai controlli, costituiti da animali ai quali era stato inoculato il sangue *in toto*.

Esperimenti con siero di sangue. — Il siero di sangue dello stesso animale da cui provenivano i corpuscoli rossi usati nel precedente esperimento, separato mediante centrifugazione, è inoculato nel muscolo pettorale di due polli sani, con risultato pogitivo. È da notare, però, che il siero era riuscito leggermente colorato in rosso, per l'emoglobina proveniente dai corpuscoli rossi emolizzati.

Un secondo esperimento, nelle identiche condizioni di questo sopra riferito, ma con siero perfettamente giallo, ha dato risultato negativo.

Le ricerche sopra riferite confermano che il sangue in toto dei polli, affetti dal sarcoma fusocellulare di Rous, con estese metastasi negli organi interni, è infettivo, se inoculato in altri animali, e dimostrano che tale infettività sussiste anche per notevoli diluizioni del sangue stesso. Lasciano ancora indecisa la questione se la causa dell'infettività risieda nei corpu-

scoli rossi, o anche nella parte liquida del sangue; ovvero se non siano addirittura le cellule neoplastiche circolanti che, durante la centrifugazione, sedimentano insieme con i corpuscoli rossi. Per chiarire questa questione, come pure per definire una eventuale importanza dei leucociti, sono in corso altri esperimenti, non ancora ultimati.

Fisiologia. — *Sulla secrezione spermatica.* VIII: *Alcune osservazioni su cani castrati e su cani sottoposti a escissione parziale dei deferenti.* Nota di G. Amantea, presentata dal Corrispondente S. Baglioni.

È stato molto discusso, più che nel campo fisiologico in quello medico-legale, sulla possibilità che spermatozoi rimangano per un certo tempo nelle vie destinate alla loro normale eliminazione, dopo l'asportazione dei testicoli. Le numerose ricerche eseguite al riguardo permettono di trarre in generale conclusioni positive. Però tutti i ricercatori si sono finora limitati a stabilire, dopo un tempo più o meno lungo dalla castrazione, la presenza eventuale di spermatozoi nei deferenti o nelle vescichette seminali, sacrificando l'animale e ricercando quindi col sussidio del microscopio gli elementi sessuali maschili nel lume degli organi suddetti.

Si può logicamente porre la questione, se gli spermatozoi ivi rinvenuti non rimangano anche in condizioni da essere eliminati all'esterno, e, in caso positivo, con quali modificazioni della loro vitalità.

Si potrebbe infatti pensare a una possibile alterazione del processo fisiologico dell'ejaculazione conseguente all'ablazione dei testicoli; come pure si potrebbe dubitare, che gli spermatozoi rimasti nei deferenti non vi trovassero più dopo la castrazione tutte le condizioni necessarie al mantenimento della loro vitalità.

Ho voluto pertanto approfittare di alcuni cani da me per altro scopo sottoposti alla castrazione, con proposito di destare in essi l'eccitamento sessuale a varia distanza dall'atto operativo, e insieme di determinare anche, se possibile, il coito fittizio [1], raccogliendo ed esaminando poi il liquido, che si sarebbe potuto così ottenere.

Le esperienze presentavano molte difficoltà: era necessario utilizzare cani scelti tra i meglio adatti per indagini sulla secrezione spermatica; conveniva abituarli, senza esaurirli, e quindi lasciarli in riposo per un congruo periodo, prima di sottoporli all'operazione. Questa inoltre non poteva

[1] G. Amantea, Atti della R. Accad. dei Lincei, vol. XXIII, serie 5ª, 1° sem., fasc. 5°, an. 1914.

essere eseguita sotto narcosi, per non rischiare di deprimere troppo o troppo a lungo l'animale, specie quando fosse poi stato necessario tentare la raccolta dello sperma a breve distanza; e nemmeno poteva ricorrersi ad anestesia locale, pel pericolo di nuocere alla vitalità degli spermatozoi dei deferenti (pericolo del resto sospettabile nel caso stesso della narcosi). Per tali motivi ho operato cani (di accertata capacità sessuale ed eccitati prima in maniera opportuna) senza anestesia, ma rapidamente e in condizioni asettiche. In parecchi animali così castrati non mi fu mai possibile provocare, nè subito dopo l'operazione nè più tardi, l'ejaculazione; anzi in alcuni non sono riuscito a provocare mai nemmeno l'erezione. Ciò tuttavia costituì la regola nel solo caso di cani timidi, che dopo l'atto operativo rimasero quasi impauriti. Infatti su altri ho potuto esattamente ottenere quanto desideravo, riuscendo a provocare persino un vero coito fittizio con completa erezione e con ejaculazione anche a brevissima distanza dalla castrazione.

Delle esperienze di cui riporto i protocolli, le due ultime si riferiscono a un cane, in cui non fu praticata l'asportazione dei testicoli, ma solo il taglio bilaterale dei deferenti tra due legature, con escissione anche di un segmento (circa 2 cm.) dei deferenti stessi, poco avanti la loro penetrazione nell'anello inguinale esterno secondo il metodo da me proposto per la raccolta del secreto prostatico [1].

Risultati sperimentali.

Esperienza I. 15 maggio 1914, ore 18. Cane sano di kgr. 7,700, in riposo sessuale da più giorni. Durata dell'ejaculazione 15′. Sperma eliminato = cc. 13,1. Spermatozoi = 301.300.000. 18 maggio 1914, ore 15. Si sottopone l'animale alla castrazione. 19 maggio 1914, ore 11,30. Si riesce a ottenere un coito completo. Movimenti di coito scarsi, erezione completa. Durata del c. 10′. Liquido raccolto cc. 4,7. Osservato al microscopio il liquido non presenta spermatozoi; lo centrifugo, e nel sedimento riesco a vederne qualcuno ben conservato, ma *immobile.* 21 maggio 1914, ore 11. Ripeto la prova: erezione completa, ma alquanto ritardata. Durata dell'atto 9′. Liquido raccolto cc. 0,8. È torbido, e al microscopio si presenta ricco di cristalli e di cellule epiteliali di sfaldamento, con qualche leucócito. Nel sedimento, dopo centifrugazione, rinvengo qualcho raro spermatozoo *immobile.*

Esperienza II. 27 maggio 1914, ore 15. Cane adulto di kgr. 6,500, normale. Nei giorni precedenti è stato sottoposto a ripetute raccolte di sperma, eseguite a brevi intervalli in ciascuna giornata, allo scopo di esaurirlo. Provoco anche oggi un'ejaculazione: durata del coito fittizio 2′, sperma eliminato cc. 0,1, spermatozoi *assenti.* Subito dopo la raccolta si procede alla castrazione. 29 maggio 1914, ore 9,30. Riesco solo adesso a provocare un coito fittizio. Movimento di coito e amplesso vivacissimi, erezione completa. Durata del coito 4′, sperma cc. 0,1. spermatozoi *assenti.*

---

[1] G. Amantea, Atti della R. Accad. dei Lincei, vol. XXIII. serie 5ª, 2° sem., fasc. 12°, an. 1914.

Esperienza III. 5 giugno 1914, ore 11,30. Cane di kgr. 9, normale, piuttosto giovane. In riposo sessuale da 24 ore. Durata del coito fittizio 13′, sperma cc. 13,2, spermatozoi eliminati 208.000.000. Ore 14, si castra l'animale. 6 giugno 1914, ore 16. Provoco ejaculazione: amplesso e movimenti di c. deboli ma evidenti, durata del c. fittizio 12′, sperma cc. 2,2, spermatozoi eliminati 15.620.000. Sono *tutti immobili.* 7 giugno 1914, ore 13,25. Eccitamento maggiore di ieri, amplesso netto e movimenti di c. evidenti. Durata del c. fittizio 2′, sperma cc. 0,9, spermatozoi eliminati 5.472.000. *Tutti immobili.* 10 giugno 1914, ore 11. Riesco solo a provocare erezione di circa 3′ con movimenti di c. evidenti, ma senza ejaculazione. 13 giugno 1914, ore 14. Idem. 15 giugno 1914, ore 17. Movimenti di c. vivaci, durata del c. fittizio 15′, sperma cc. 0,4; è *privo di spermatozoi.*

Esperienza IV. 3 dicembre 1914, ore 13. Cane lupetto di kgr. 5, adulto e sano. Da più giorni in riposo sessuale. Provoco l'ejaculazione: movimenti di c. vivacissimi, durata del c. 15′, sperma cc. 3, spermatozoi eliminati 85.200.000. 2 gennaio 1915, ore 15,15. Si castra l'animale, recidendo i deferenti à 1 cm. circa dalla coda dell'epididimo. Ore 16,15 (un'ora dopo l'operazione). Tento di provocare l'ejaculazione, ottenendo movimenti di c. scarsi, e un c. fittizio della durata di 8′, sperma cc. 0,7, spermatozoi *scarsissimi e immobili.* 4 gennaio 1915, ore 15. Non riesco a provocare il c. fittizio. 16 gennaio 1915, ore 15. Movimenti di c. e amplesso vivaci. Durata del c. 7′. Si raccolgono cc. 0,2 di liquido privo di spermatozoi.

Esperienza V. 3 dicembre 1914, ore 14. Cane adulto e sano, di kgr. 7,600, in riposo sessuale da 5 giorni. Provoco l'ejaculazione, movimenti di c. e amplesso vivacissimi, durata c. fittizio 25′, sperma cc. 7,8, spermatozoi eliminati 536.640.000. 2 gennaio 1915, ore 14,30. Castrazione. I deferenti si recidono a circa 1 cm. di distanza dalla coda dell'epididimo. Ore 13,30 (dopo un'ora dall'operazione) si provoca il c. fittizio: movimenti di c. e amplesso vivaci, contrazione dei muscoli perineali evidenti, durata 10′, sperma cc. 1,4, spermatozoi 60.200.000, *tutti mobili,* sebbene non vivacemente. 4 gennaio 1915, ore 15,50. Provoco altro c. fittizio: amplesso e movimenti di c. vivaci, durata 9′, sperma cc. 1,1, *spermatozoi assenti.*

Esperienza VI. 25 gennaio 1915, ore 18. Cane lupetto, sano, adulto, di kgr. 8,800, in riposo sessuale da sei giorni. Provoco ejaculazione: amplesso e movimenti di c. vivaci, e contrazioni perineali nette, durata 16′, sperma cc. 3,5, spermatozoi eliminati 402.500.000. 31 gennaio 1915, ore 10,45. Castrazione con recisione dei deferenti in prossimità della coda dell'apididimo. Ore 11,45 (dopo un'ora dall'operazione), non mi riesce di provocare che una breve e incompleta erezione, senza vero eccitamento dell'animale, e senza ejaculazione. 2 febbraio 1915. Con varî tentativi durante la giornata lo stesso risultato. Nei giorni successivi pure eguale risultato.

Esperienza VII. 26 febbraio 1915, ore 13. Cane normale di kgr. 7,300. In riposo sessuale da tre giorni. Durata del c. fittizio, preceduto da movimenti di c. e amplesso vivaci, 17′, sperma cc. 6,9, spermatozoi eliminati 112.470.000. Ore 14,30. Castrazione con recisione dei deferenti all'origine dall'epididimo. Ore 20,30 (dopo 6 ore dall'operazione). Non si riesce a provocare che una debole e breve erezione. 27 febbraio 1915, ore 19. Riesco a ottenere il c. fittizio, ma con una erezione non del tutto completa, amplesso netto, ma movimenti di c. poco evidenti, contrazioni perineali nette, durata del c. fittizio 7′, sperma cc. 1,1, *spermatozoi assenti.*

Esperienza VIII. 23 febbraio 1915, ore 12,15. Cane adulto, normale, di kgr. 14,600. È in riposo sessuale da 6 giorni. Provoco il c. fittizio: movimenti di c. e amplesso vivacissimi, durata del c. fittizio 6′, sperma cc. 4,8 spermatozoi 935.040.000. 27 febbraio 1915, ore 15,30. Al cane si recidono i due deferenti fra due legature, prima del loro ingresso nell'anello inguinale. Dei due deferenti si escide pure un tratto di 1 cm. fra le legature.

28 febbraio 1915, ore 13,15. Provoco il c. fittizio: amplesso e movimenti di c. vivaci, durata del c. fittizio 6′, sperma cc. 4,3, spermatozoi 3.698.000 in grande maggioranza immobili, però *alcuni si muovono distintamente.* 12 marzo 1915, ore 12. Durata del c. fittizio 7′, sperma cc. 6,4, *spermatozoi assenti.*

Esperienza IX. 24 marzo 1915, ore 16,15. Cane di kg. 10,300, adulto e sano. È in riposo sessuale da due giorni. Provoco di nuovo il c. fittizio: amplesso e movimento di c. vivacissimi, e contrazioni perineali nette, durata 13′, sperma cc. 8,4, spermatozoi 310.200.000. 7 aprile 1915, ore 11. Recisione bilaterale dei deferenti come nell'esperimento precedente. 8 aprile 1915, ore 14,30. Provoco il c. fittizio: poca partecipazione pel dolore che necessariamente si è costretti a destare, amplesso e movimenti di c. deboli, ma contrazioni perineali nette, durata 10′, sperma cc. 2,5, spermatozoi scarsi, ma in gran parte *mobilissimi*, (se ne contano in tutto 500.000). Varie altre prove eseguite nei giorni successivi non hanno permesso di rilevare presenza di spermatozoi.

Seguendo successivamente tutti i cani castrati, in essi ho potuto inoltre sempre rilevare i seguenti fatti: diminuzione progressiva dei movimenti di c., delle contrazioni ritmiche dei muscoli perineali, della durata del c. fittizio e del volume di liquido eliminato; la sospensione della secrezione prostatica precede quella delle contrazioni perineali che l'accompagnano; scomparse anche queste, è ancora possibile provocare di solito una debole erezione; infine quando anche questa più non si ottiene, il cane può ancora eccitarsi, come prima soleva, alla vista dello sperimentatore (eccitamento psichico).

Conclusioni e considerazioni.

I. Poco dopo la castrazione, e per un certo numero di giorni successivi, è possibile nei cani provocare tanto l'erezione quanto l'ejaculazione, spesso del tutto simili nel decorso all'erezione e all'ejaculazione, che si potevano osservare negli stessi animali prima dell'atto operativo. Tuttavia la durata del coito fittizio diviene generalmente più breve.

II. L'amplesso, i movimenti di coito, e le contrazioni dei muscoli perineali possono presentarsi anche molto vivaci per un certo tempo dopo la castrazione.

III. Il volume dello sperma che si elimina dopo l'operazione è per solito sensibilmente ridotto.

IV. Gli spermatozoi, rimasti nei deferenti, possono essere eliminati coll'ejaculazione durante i primi giorni consecutivi all'atto operativo, e talora anche in condizioni di ben conservata vitalità. Questa tuttavia si è trovata meglio conservata per gli spermatozoi rimasti nel tratto periferico dei deferenti, quando si praticò l'escissione dei deferenti stessi fra due legature lasciando *in sito* i testicoli.

V. In un cane, in cui la castrazione seguì a un periodo di esaurimento sessuale, non si ottenne eliminazione di spermatozoi col coito fittizio provocato dopo l'operazione.

Il fatto bene accertato della durata sensibilmente più breve del coito fittizio dopo la castrazione è un fenomeno di deficienza, che mi sembra di-

mostrare quanto i centri nervosi risentano gli effetti dell'ablazione dei testicoli. E se è vero che talvolta la partecipazione dell'animale al coito fittizio è pressochè normale, e che talvolta l'erezione e l'ejaculazione possono ottenersi dopo l'operazione complete; è anche vero che ciò non costituisce la regola, e che la durata più che il grado e l'entità dell'erezione e dell'ejaculazione deve assumersi come indice dell'attività dei centri. Comunque all'ulteriore e più esatta conoscenza di tali importanti rapporti tra centri dell'erezione e testicoli sarà dedicata una speciale serie di ricerche.

La marcata riduzione del volume del liquido che si elimina dopo la operazione sta d'altra parte a provare l'influenza dell'asportazione dei testicoli sull'attività prostatica, conformemente ai criterî utilizzati nello studio della secrezione spermatica, ed altrove già esposti [1].

È probabile, che l'influenza della castrazione sulla secrezione prostatica non si esplichi solo sulla quantità del secreto, ma anche sulla qualità, e si potrebbe con ciò spiegare la debole vitalità o la mancanza assoluta di movimenti degli spermatozoi eliminati dopo l'operazione.

Le osservazioni sui cani sottoposti a escissione parziale dei deferenti confermano, in linea generale, quanto sopra si è detto.

Esse inoltre permettono ancora un'altra considerazione d'indole fisiologica, relativa all'innervazione dei deferenti: infatti, nonostante l'escissione di un tratto di essi quasi a metà del loro decorso, si è rivelata possibile la contrazione del loro tratto periferico. Ciò ricorda l'osservazione del Mosso [2] sull'esofago, che cioè la sua onda peristaltica nella deglutizione non si arresta per effetto della legatura o sezione di esso, nè per l'estirpazione di un tratto di esso, ma continua a propagarsi dal segmento superiore all'inferiore; e fa supporre che l'innervazione dei deferenti deve essere sul tipo di quella trovata dal Kronecker e Luescher [3] appunto per l'esofago.

Come si vede le presenti osservazioni aprono la via a una serie di nuovi problemi circa i rapporti dei testicoli coi centri dell'erezione e dell'ejaculazione, circa l'influenza loro sulla secrezione prostatica e circa l'innervazione dei deferenti. Tali problemi saranno in seguito meglio svolti sulla base di nuove indagini.

[1] G. Amantea, Atti della R. Accad. dei Lincei, vol. XXVIII, serie 5ª, 2° sem., fasc. 3°, 1919.

[2] A. Mosso, Moleschott's Untersuchungen zur Naturlehre, vol. XI, fasc. 4°, 1873.

[3] H. Kronecker u. F. Lüscher, Atti della R. Accad. dei Lincei, 1896; Arch. ital. de biol., tom. XXVI, pag. 308, an. 1896.

R. P.

(*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Seduta del 30 novembre 1919.

(*Segue in terza pagina*)

E. Mancini *Segretario d'ufficio responsabile.*

(*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Pubblicazione bimensile. N. 11.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 7 dicembre **1919.**

Volume XXVIII.° — Fascicolo 11°

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Renpiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili del l'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 9 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a pagine 4 ½.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 30 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta a stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta, pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 50 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 30 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 7 dicembre 1919.

A. Ròiti, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Geologia. — *Titonico e Cretacico nell' isola di Capri: revisione dei fossili dei calcari coralligeni.* Nota del Socio C. F. Parona.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Storia della matematica. — *Evangelista Torricelli nella storia della geometria.* Nota del Corrisp. Gino Loria.

Evangelista Torricelli ha conseguito un posto elevato e sicuro nella storia della fisica, quantunque le relative notizie debbano venire faticosamente raccolte sfogliandone il carteggio scientifico o ricorrendo a dichiarazioni di contemporanei: i procedimenti da lui adottati nella fabbricazione delle lenti per cannocchiali, la sua partecipazione all' invenzione dei primi termometri a liquido, i lavori che lo fanno considerare come fondatore dell' idrodinamica [1] e specialmente la scoperta da lui fatta della pressione atmosferica e dell'apparato per misurarla, hanno reso popolare il suo nome, non soltanto fra tutti i cultori delle scienze d'osservazione, ma persino fra le persone di mediocre coltura.

[1] E. Mach, *Die Mechanick in ihrer Entwickelung historisch und kritisch dargestellt,* II Aufl. (Leipzig. 1889), pag. 377.

Altrettanto non può certamente ripetersi riguardo all'opera del sommo discepolo di Galileo per quanto concerne la geometria, chè l'unico volume da lui dato alle stampe ([1]) è consultato e citato esclusivamente da coloro che s'interessano della teoria dei moti e delle forze ([2]); eppure il solo fatto che quetso abbia offerto elementi sufficienti per rivendicare a lui il « metodo delle tangenti » di consueto attribuito a Roberval ([3]) è sufficiente a rivelare quali e quanti tesori geometrici esso racchiuda. Qualche — e non certo invidiabile — notorietà provenne al Torricelli come geometra dal fatto che un pensatore, di fama mondiale, ma non sempre scrupoloso nel rispettare gli altrui diritti di proprietà ([4]), si compiacque di dipingerlo ([5]) sotto il ripugnante aspetto di un famigliare privo di coscenza, il quale, non appena spirato il suo principale, fruga fra le sue carte più gelose per rintracciarvi qualche gustosa informazione o qualche segreto a lui giovevole, riesce in tal modo ad avere contezza di alcune lettere di eccezionale importanza e, appropriandosene il contenuto, conquista una posizione eminente fra i matematici del suo tempo. Ora questa fantastica quanto iniqua costruzione è da tempo crollata al suolo ([6]), essendosi definitivamente stabilito che, mentre manca di qualsiasi consistenza logica, è priva di ogni documentazione in appoggio ed è smentita da testimonianze a cui devesi accordare assoluta fiducia; perciò, sino dall'epoca di Wallis, si ritiene che il Torricelli sia stato uomo di specchiata onestà, il quale, difendendosi contro gli attacchi di Roberval, non si spogliò del carattere di scrupoloso ricercatore del vero sotto cui ci si presenta nell'atto di investigare i fenomeni naturali.

* * *

Molti lavori geometrici scritti dal Torricelli rimasero ignoti alla generalità degli studiosi perchè tuttora inediti nel momento in cui la gelida

([1]) *Opera geometrica* (Flor. 1644). Un altro volume dal titolo: *Exercitationes geometriae ab Ev. Torricellius opus postumum* (Flor. 1647) citato dal Montucla, dal Marie e nel tom. I delle *Oeuvres complètes* di Huygens non ha mai esistito.

([2]) Un'onorevole e doverosa eccezione va fatta a favore di R. Baltzer, che cita e dimostra (*Stereometria*, trad. Cremona, Genova, 1877, pag. 172), attribuendolo al Torricelli, un teorema sui solidi sferali.

([3]) F. Jacoli, *Evangelista Torricelli ed il metodo delle tangenti dette di Roberval* (Bull. di bibl. e storia delle scienz mat. e fis., tom. VIII, 1875).

([4]) Si allude qui ai non ammirandi sforzi fatti da Pascal per appropriarsi la scoperta della pressione esercitata dall'atmosfera; riguardo a tale interessante questione storica si veggano i documentatissimi articoli di F. Mathieu sopra *Pascal et l'expérience de Puy-de-Dôme* inseriti nella Revue de Paris, 1906.

([5]) Si vegga B. Pascal, *Histoire de la trochoïde ou roulette appellée autrement trochoïde ou cycloïde* (in data 10 ottobre 1658).

([6]) Il merito principale di tale risultato risale a Carlo Dati per la sua *Lettera a Filaleti di Timauro Antiate* (Firenze, 1663); sopra questa spinosa questione di priorità si consultino le storie del Tiraboschi, del Montucla, del Cantor, del Marie, ecc.

ala della morte sfiorò inopinatamente il sommo faentino. Quali fossero, quale sorte sia ad essi toccata, quanti tentativi infruttuosi siano stati fatti per diffonderli a mezzo della stampa, reputo superfluo di esporre oggi, essendo sufficiente che io rimandi a quanto sta scritto in una comunicazione presentata a questo grande sodalizio per mio desiderio da Luigi Cremona [1]. Ripetere ciò sarebbe tanto meno opportuno oggi che, con la pubblicazione delle opere edite ed inedite di Evangelista Torricelli [2] — che ho l'onore di presentare in omaggio a questa illustre Accademia, per mandato avuto dal Mucicipio di Faenza, promotore della meritoria impresa — sono finalmente posti a disposizione degli studiosi tutti gli elementi per pronunziare un giudizio intorno al valore dei contributi dati alla geometria dall'uomo illustre che confortò Galileo Galilei sul suo letto di morte.

Gli scritti di Ev. Torricelli che finalmente affrontano la prova della pubblicità, mentre completano e precisano i suoi lineamenti scientifici, mentre ne rendono la figura più ammiranda ed imponente, non costringono ad una revisione del giudizio che da tempo gli storici pronunciarono su di lui come matematico: profondo conoscitore ed assiduo promotore dei metodi geometrici e meccanici recanti le firme di Euclide, di Archimede e di Cavalieri, egli ci si presenta come ultimo rampollo di quella gloriosa dinastia che Pitagora ha fondata e che venne abbattuta con l'avvento al potere della geometria analitica e dell'analisi infinitesimale: gli è quanto, se non c'inganniamo, emerge dalle poche notizie e dalle brevi osservazioni che seguono.

* * *

Un ragguardevole numero delle pagine da lui vergate contengono teoremi e costruzioni concernenti le figure di cui si occupa la geometria elementare; con i relativi enunciati piacque al Torricelli di comporre una variopinta miscellanea a cui impose il curioso titolo di *Campo di tartufi*.

[1] *Evangelista Torricelli e la prima rettificazione di una curva* (questi Rendiconti, seduta del 5 dicembre 1897).

[2] *Opere di Evangelista Torricelli edite in occasione del III centenario della nascita col concorso del comune di Faenza, da Gino Loria e Giuseppe Vassura* (quattro volumi in-8°, con numerose figure; Faenza, Istituti educativi riuniti, 1919). Nel § XI dell'Introduzione sono dichiarati i criterî adottati nel pubblicare la parte sinora inedita. Riguardo al carteggio reputiamo utile far noto nella presente occasione come, della lettera del Torricelli al Mersenne pubblicata a pp. 326-8 del vol. III delle *Opere*, esista a Vienna, nella Biblioteca già di corte, un esemplare più completo di quello che trovasi a Firenze (è forse l'originale?); il sig. C. de Waand, che fu in condizione di esaminarla, notò che si chiude col seguente passo, il quale vede ora per la prima volta la luce:

« In concavis verò hoc opus, hic labor est. Annum iam absumpsi frustra, quod si quando mihi liceat et concava ad libitum conformare, tunc fortasse manifestius apparet inventi uni fructus ».

Allo stesso ramo di scienza appartiene l'opuscoco *De Tactionibus*, il quale tratta [al pari dell'omonimo frammento composto nel 1646 dall'Huygens diciassettenne] (1) della costruzione di un cerchio soggetto a condizioni analoghe, ma differenti, da quelle contemplate da Apollonio Pergeo in un notissimo lavoro oggi scomparso. Altrettanto si può ripetere riguardo al *De proportionibus liber*, il quale, sbocciato durante la convivenza di Torricelli con Galileo, corona nel modo più felice la collezione di lavori dedicati al V libro di Euclide nella scuola avente a duce questo sommo scienziato.

Questa monografia merita la massima considerazione anche perchè l'interessante esordio di essa contiene il piano di una completa trattazione sistematica (naturalmente indipendente dall'uso di coordinate) di tutte le linee piane di cui, appunto in quel tempo, ed in parte per opera del Torricelli, si era arricchita la geometria, cioè: parabole e iperboli di grado superiore, curva legaritmica (o « hemyperbola logarithmica » per usare la nomenclatura torricelliana), spirali algebriche, spirale legaritmica e cicloidi (non solo l'ordinaria, ma anche le allungate ed accorciate, di cui il Torricelli aveva rilevata l'esistenza sino dal 1644). Benchè la morte inattesa abbia vietato che l'opera *De lineis novis* venisse composta, pure un grande numero di pagine (fra cui non vanno dimenticate alcune del carteggio scientifico), non solo pongono in grado di redigere un bilancio esatto dei risultati che vi avrebbero trovata degna sede, ma permettono anche di farsi un concetto esatto delle vie che l'autore percorse per stabilirle.

Con questo gruppo di ricerche il Torricelli proseguiva brillantemente nelle direzioni segnate da Archimede nei suoi famosi studî sulla quadratura della parabola e sulle spirali che portano il suo nome. Molte altre invece ce lo mostrano nell'atto di perfezionare l'antica stereometria quale si delinea negli scritti che il Siracusano dedicò a la sfera, il cilindro, le conoidi e le sferoidi, oppure di proseguire le investigazioni baricentriche da lui iniziate; i materiali da lui adunati furono religiosamente raccolti e sapientemente ordinati dai due più fedeli interpreti del pensiero torricelliano, L. Serenai e V. Viviani, i quali ne trassero un'estesa compilazione che intitolarono *Nova per armillas stereometria* (2). Poichè i limiti imposti alla presente comunicazione ci vietano di entrare in minuti particolari sul contenuto di questo scritto, ci restringeremo ad osservare come l'atteggiamento assunto in tale occasione dal nostro sommo connazionale manifesti un'impressionante rassomiglianza con quello sotto cui ci si presentano alcuni geniali investigatori arabi i quali, dopo essersi pienamente assimilate le dottrine costi-

(1) *Oeuvres complètes de C. Huygens*, tom. XI (La Haye, 1908), pp. 60-63.

(2) È in questa collezione che T. Perelli rinvenne un importante teorema concernente la misura dei conoidi e degli sferoidi che egli stampò in appendice alle *Istituzioni delle sezioni coniche del padre D. Guido Grandi* (Firenze MDCCXLIV) e corredò di convincente dimostrazione.

tuenti la geometria superiore dei Greci, vollero e seppero farvi qualche rilevante aggiunta [1].

Con l'importante opuscolo *De maximis et minimis* il Torricelli partecipò da par suo agli studî promossi da Fermat in tutta l'Europa matematica, proponendo alcune difficili ed interessanti questioni aventi per iscopo la ricerca dei valori estremi di certe funzioni. Fra esse emerge, per singolare eleganza, la ricerca di un punto nel piano d'un triangolo tale che risulti minima la somma delle sue distanze dai vertici del triangolo; è noto che Torricelli scoperse che, supposti tutti gli angoli del triangolo inferiori a 120°, il punto richiesto si trova all'incrocio dei tre archi di circolo, ognuno dei quali è il luogo geometrico dei punti da cui i lati del dato triangolo sono visti appunto sotto l'angolo di 120°. L'importanza di questo risultato, di cui il Torricelli si affrettò di dar notizia ai suoi corrispondenti, venne subito riconosciuta e ricevette una constatazione solenne quando quei cerchi vennero chiamati « cerchi di Torricelli » [2] e « punto di Torricelli » [3] quello che risolve il surriferito problema: è forza riconoscere che ben poche denominazioni del genere sono altrettanto giustificate!

*
* *

Alcune poche pagine lasciate dal sommo faentino ci si presentano in forma pronta per la stampa (citiamo ad esempio la memoria *De centro gravitatis sectoris circuli*, ove la relativa ricerca è condotta prima col metodo degli antichi e poi applicando la geometria degli indivisibili); ma moltissime altre hanno tutto l'aspetto di una prima stesura, chè fra gli squarci redatti in latino, sono intercalati pagine in italiano e talora persino frasi ironiche ed osservazioni giocose. Nella generalità hanno carattere prettamente dottrinale, ma altre appartengono alla metodologia delle matematiche: fra queste vanno particolarmente ricordati i brani *Contro gl'infiniti*, indiscutibili testimonianze dei dubbii e delle incertezze che angosciarono i primi pensatori che si servirono del concetto d'infinito per scoprire le più riposte proprietà delle figure geometriche.

*
* *

Mentre con la pubblicazione degli scritti inediti e del carteggio del Torricelli ci si trova in possesso di quanto è necessario per chiarire la maggior parte dei punti oscuri esistenti nella sua produzione scientifica, per

(1) H. Suter, *Die Abhandlung über die Ausmessung des Paraboloids von el-Hasan b. el-Hasan b. el-Haitham* (Bibliotheca mathematica, II ser., tom. XII, 1911-12, pp. 289-232), e *Die Abhandlungen Thabit b. Kurras und Abu Sahl al Kuhis über die Ausmessung der Paraboloide* (Sitzungber, d. phyr. med. Sozietät in Erlangen, tom. XLVIII, 1916).

(2) E. Lucas, *Sur les coordonnées tripolaires* (Mathésis, tom. IX, 1889).

(3) M. Filip, *Sur le point de Torricelli* (Gazeta matematica, tom. XIII, Bucarest, 1904).

altri (è forza, con dolore, convenirne) l'attesa luce non si è fatta; ci sia lecito di segnalarne alcuni che ci sembrano più importanti.

I. Scrive il Montucla [1]:

« Après les problèmes sur l'aire et les tangentes de la cycloïde, ceux qui se présentent les premiers regardent les solides formés par sa rotation autour de sa base et de son axe. Roberval paroit avoir eu le merite de les trouver l'un et l'autre le premier. Le P. Mersenne mandait en 1614, à Torricelli, la raison du premier de ces corps avec le cylindre de même base et de même hauteur trouvé, par Roberval, savoir de 5 à 8, à quoi Torricelli repondait aussitôt qu'il avait trouvé la même chose quelques mois auparavant. A l'égard du dernier, qui est incomparablement plus difficile, le géomètre italien y échoua, et Roberval reste seul en possession d'avoir découverte sa mésure. Torricelli avait annoncé qu'il était à son cylindre circonscrit comme 11 a 18. Il est vrai que ce rapport approche assez du véritable; mais Roberval la (*sic*) donne... qui est le vraie... Or en prénant pour rapport du diamètre à la circonférence celui d'Archimède de 7 à 22, on trouve en nombres le rapport assigné par Roberval, être celui de 11 à 17 $\frac{791}{893}$, ce qui se rapproche, il est vrai de 11 à 18; mais enfin ne l'est pas, et en diffère d'environ $\frac{1}{9}$ ».

Orbene, mentre oggi si è in possesso dei ragionamenti usati dal Torricelli per determinare la posizione del baricentro della cicloide e per calcolare il volume che essa genera rotando attorno alla propria base, nessuna traccia fu possibile trovare, fra le sue carte, delle indagini da lui compiute per risolvere il secondo dei problemi riferiti dal Mersenne: perciò la questione storica sollevata dal Montucla è oggi nello stesso stato in cui si trovava quando egli scriveva; tuttavia la prossimità del rapporto $\frac{11}{18}$ a quello trovato da Roberval ed il fatto che in molte occasioni Torricelli fece uso del valore $\pi = \frac{22}{7}$, ci sembrano consigliare la massima cautela prima di condividere il parere dello storico francese, che, di fronte a quel problema, il faentino abbia « échoué ».

II. Le dispute di priorità che il Torricelli ebbe più volte a sostenere con geometri ultramontani lo indussero — quasi egli fosse presago di una prossima fine — a raccogliere gli enunciati delle proposizioni da lui comunicate ai colleghi francesi a partire dal 1643. Così ebbe origine l'interessante *Racconto d'alcuni problemi* che, per merito del Fabroni, si trova da più di un secolo a disposizione di tutti gli studiosi. In questo florilegio di verità, la cui dimostrazione si legge in gran parte nelle carte da lui re-

[1] *Histoire des mathématiques*, tom. II. nouv. éd. (Paris, an. VII), pag. 60.

litte, meritano una speciale attenzione due paragrafi di natura esclusivamente aritmetica.

Nel XXIV è affermato essere primi tutti i numeri della forma $2^{2^n} + 1$. Tale asserzione è notoriamente errata, dal momento che, come osservò Eulero, $2^{32} + 1$ è un numero composto; ma essa viene di solito attribuita a Fermat, perchè la si legge, sia pure sotto forma dubitativa, in una lettera da lui diretta a Frénicle nel corso dell'anno 1640 (¹). Ora siccome su tale argomento non si trova neppure una sillaba nei mss. torricelliani, così si rimane titubanti nel decidere se si sia in presenza di una coincidenza fortuita, oppure di una nuova prova di comunicazioni scientifiche fra l'Italia e la Francia.

Aggiungiamo che il § precedente, il XXIV, del succitato *racconto* contiene invece l'enunciato di una difficile questione sulla costruzione di triangoli in numeri, di cui il Torricelli non parla altrove e che soltanto ai giorni nostri ha ricevuto una soluzione esauriente (²).

*
* *

Gettando uno sguardo d'insieme alla produzione geometrica torricelliana, si deve ammirare la profonda conoscenza che egli aveva dei metodi escogitati dagli antichi matematici e da quelli che prelusero alla comparsa del calcolo infinitesimale, nonchè la disinvoltura, oggi sorprendente, con cui egli sapeva servirsi degli uni e degli altri per investigare figure già note o suggeritegli dalla sua fervida fantasia. Certamente troppo sovente ci si trova di fronte a semplici abbozzi, cosicchè nulla autorizza a sentenziare che cosa egli avrebbe affidato alla stampa, che cosa invece egli giudicasse (come sta scritto in un punto dei suoi mss.) « fatica buttata via », e tanto meno quale sarebbe stata l'architettura degli edificî che egli avrebbe eretti con i materiali assiduamente raccolti. Nè è possibile decidere se, ove egli fosse vissuto, nelle fasi ulteriori della propria esistenza, avrebbe tenuto fede alle direttive scientifiche alle quali sempre si attenne o se, per converso, i nuovi metodi, che appunto allora stavano maturando, con la loro travolgente potenza, non avrebbero impressa una novella orientazione a tutta la sua mentalità: gravi e ponderosi problemi che lasciano titubanti e pensosi, rinnovando oggi il lancilante cordoglio da cui furono colpiti coloro che assistettero alla inaspettata fine del geniale investigatore, i quali, ancor meglio di noi, erano in grado di misurare, quante speranze, una morte improvvisa, aveva per sempre infrante. Allo stato delle cose, egli ci si presenta come ultimo rappresentante di un indirizzo scientifico tramontato forse per sempre, come autore di Memorie di squisita fattura che saranno sempre cagione del più elevato godimento per tutti coloro che sono in grado di comprendere e gustare la bellezza di cui è ricco qualunque lavoro di puro ragionamento.

(¹) *Oeuvres di Fermat*, éd. Tannery et Henry, tom. II (Paris, 1894), pag. 206.

(²) M. Cipolla, *I triangoli di Fermat ed un problema di Torricelli* (Atti dell'Accademia Gioenia, ser. V, tom. XI, 1918).

Fisica. — *Sulla gravitazione*. Nota IV del Corrisp. QUIRINO MAJORANA.

Secondo metodo di calcolo. — Il metodo che ora esporrò è notevolmente più laborioso del precedente, ma consente di ottenere risultati più precisi. Una grandezza *sui generis* può essere definita e chiamata *flusso di azione gravitazionale* o soltanto *flusso gravitazionale* o *d'attrazione*. Essa risponde, come si è visto, forse necessariamente, al concetto della emissione di energia da parte della materia, ma per ora, non occorre pensare a tale necessità. Se si ha una particella materiale isolata dm, tanto piccola da poter ritenere che l'assorbimento gravitazionale nel suo interno sia nullo, possiamo supporre, secondo le fatte ipotesi, che essa emetta continuamente un certo flusso complessivo di azione, proporzionale a dm, cioè kdm, uniformemente irradiato in tutte le direzioni. Dal fatto che questo flusso colpisce altra materia, scaturirebbe la formazione della forza di gravitazione. Se la particella dm trovasi nel vuoto, un angolo solido che sottenda alla distanza 1, la superficie elementare $d\sigma$, avente il vertice in dm, sarebbe traversato dal flusso:

$$\varphi = k \frac{dm\, d\sigma}{4\pi}. \tag{8}$$

Supponiamo ora che il mezzo traversato dal flusso abbia una densità diversa da zero; si verificherà allora e sempre secondo le fatte ipotesi, il fenomeno dell'assorbimento. Di questo, si può così concretare la natura: la fig. 2 indica l'angolo solido predetto; considero uno strato di spessore dx,

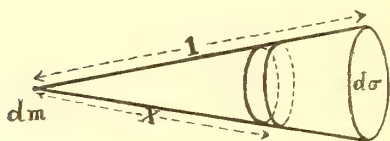
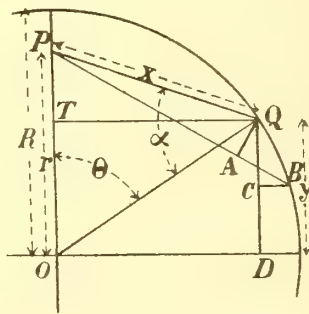



FIG. 2. FIG. 3.

normale all'asse del cono così determinato, distante da dm per x. Il flusso, che nel caso di densità del mezzo nullo era costante, è ora variabile da sezione a sezione, e, nello strato dx, subisce una variazione negativa, in conseguenza dell'assorbimento. Si può come in altri fenomeni fisici, supporre

che tale assorbimento sia *proporzionale allo spessore* dx *dello strato, alla densità del mezzo assorbente* ϑ_v *ed al valore totale del flusso nel punto* x. Si ha dunque:

$$d\varphi = -h\varphi\,\vartheta_v\,dx\,,$$

dove h è una costante di proporzionalità. Essa rappresenta il *fattore di smorzamento gravitazionale, per unità di densità e di lunghezza*. Separando le variabili nella precedente equazione differenziale, si ha

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = -h\,\vartheta_v\,dx$$

che integrata dà:

$$\log\varphi = -h\,\vartheta_v\,x + \mathrm{A}\,,\quad \text{od anche}\quad \varphi = \mathrm{B}\,e^{-h\vartheta_v x}\,,$$

essendo A e B delle costanti, la cui relazione è evidente.

Ora, per $x = 0$, deve essere verificata la (8), e quindi, dicendo $h\vartheta_v = \mathrm{H}$,

$$\mathrm{B} = \frac{k\,dm\,d\sigma}{4\pi}\,,\quad \text{per cui}\quad \varphi = \frac{k\,dm\,d\sigma}{4\pi}\,e^{-\mathrm{H}x}\,. \tag{9}$$

Ciò posto, riprendiamo in esame il caso della sfera piena, di raggio R e di densità ϑ_v. Sia O il centro di tale sfera (fig. 3); di essa si consideri un punto interno P, nel quale sia concentrata la massa dm. Conduco il raggio PO della sfera, passante per P, ed un angolo infinitesimo QPB col vertice in P; conduco QA perpendicolare a PQ. Dico $\mathrm{OP} = r$, $\mathrm{PQ} = x$, $\mathrm{QD} = y$. Facciamo ruotare il triangolo QPA, intorno all'asse PO; il segmento AQ descriverà l'area $2\pi\,.\,\mathrm{TQ}\,.\,\mathrm{QA}$. Possiamo sostituire nella (9), al posto di $d\sigma$, questa superficie, riportata all'unità di distanza da P, e cioè divisa per x^2. Si ha

$$\varphi = \frac{k\,dm\,.\,\mathrm{TQ}\,.\,\mathrm{QA}}{2x^2}\,e^{-\mathrm{H}x}\,.$$

Conducasi QD parallela ad OP; projetto B, normalmente a QD, in C; sarà $\mathrm{QC} = dy$. Dicasi $\mathrm{PQO} = \alpha$, $\mathrm{POQ} = \theta$. Si vede dalla figura che $dy = \mathrm{QB}\,\mathrm{sen}\,\theta$; $\mathrm{QA} = \mathrm{QB}\cos\alpha$; per cui:

$$\mathrm{QA} = \frac{dy}{\mathrm{sen}\,\theta}\cos\alpha\,.$$

Inoltre,

$$\mathrm{TQ} = \mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\theta\ ;\quad x = \sqrt{\mathrm{R}^2 + r^2 - 2ry}\,;$$

differenziando quest'ultima espressione:

$$dy = -\frac{x\,dx}{r}\,;$$

dal triangolo OPQ si ha

$$r^2 = x^2 + R^2 - 2xR\cos\alpha\,,$$

da cui

$$\cos\alpha = \frac{x^2 + R^2 - r^2}{2xR}\,;$$

e quindi

$$\varphi = -\frac{k\,dm}{4r}\left(1 + \frac{R^2 - r^2}{x^2}\right)e^{-Hx}\,dx\,.$$

Chiamando dF il flusso di azione che emette la particella dm in totale e che riesce ad uscir fuori dalla sfera, esso sarà dato dall' integrale di questa espressione, esteso tra i limiti $R + r$ ed $R - r$. Si ha quindi

$$dF = -\frac{k\,dm}{4r}\int_{R+r}^{R-r}\left(1 + \frac{R^2 - r^2}{x^2}\right)e^{-Hx}\,dx\,.$$

Ed eseguendo l' integrazione:

$$dF = \frac{k\,dm}{4r}\left[\frac{e^{-Hx}}{H} + (R^2 - r^2)\frac{e^{-Hx}}{x} + H(R^2 - r^2)\int\frac{e^{-Hx}}{x}\,dx\right]_{R+r}^{R-r}\,.$$

Estendendo ai limiti ove è possibile:

$$(10)\qquad dF = \frac{k\,dm}{4r}\left[e^{-H(R-r)}\left(\frac{1}{H} + R + r\right)\right.$$
$$\left. - e^{-H(R+r)}\left(\frac{1}{H} + R - r\right) - H(R^2 - r^2)\int_{R-r}^{R+r}\frac{e^{-Hx}}{x}\,dx\right]\,.$$

L' integrale rimasto, di cui sono stati scambiati i limiti di integrazione e mutato il segno, è trascendente e non può ottenersi che sviluppandolo in serie. Il calcolo si complica così, grandemente, ed io non lo riporto, quantunque, dopo averlo completato, me ne sia servito per le mie esperienze. Si può però evitare tale sviluppo mediante un elegante artifizio di calcolo, come mi ha suggerito gentilmente, il collega prof. Fubini.

Chiamo intanto dm, non la sola massa contenuta nel punto P (fig. 3), ma quella di uno strato sferico di raggio r e di spessore dr, giacchè gli elementi di questo strato sono tutti nelle stesse condizioni della massa in P. Per cui diremo

$$dm = 4\pi r^2\,\vartheta_r\,dr\,,$$

e si avrà

$$dF = k\pi\,\vartheta_r\,r\,dr\ [\,\ldots\ \text{come nella (10)}\ \ldots\,]\,.$$

Per ottenere il valore del flusso totate emergente da tutti i punti della sfera, occorre integrare questa espressione da O ad R; e si ha

$$F = k\pi\,\vartheta_v \int_0^R r\,dr\ [\ldots.\ \text{come nella (10)} \ldots.];$$

e quindi

$$(11)\qquad F = k\pi\,\vartheta_v \Big[\int_0^R r\left(\frac{1}{H} + R + r\right) e^{-H(R-r)}\,dr$$

$$-\int_0^R r\left(\frac{1}{H} + R - r\right) e^{-H(R+r)}\,dr - H\int_0^R r(R^2 - r^2)\,dr \int_{R-r}^{R+r} \frac{e^{-Hx}}{x}\,dx\Big].$$

I primi due integrali di questa espressione si eseguono facilmente; si può infatti scrivere:

$$\int_0^R r\left(\frac{1}{H} + R + r\right) e^{-H(R-r)}\,dr - \int_0^R r\left(\frac{1}{H} + R - r\right) e^{-H(R+r)}\,dr =$$

$$= \left(\frac{1}{H} + R\right)\left[\int_0^R r\,e^{-H(R-r)}\,dr - \int_0^R r\,e^{-H(R+r)}\,dr\right] +$$

$$+ \int_0^R r^2\,e^{-H(R-r)}\,dr + \int_0^R r^2\,e^{-H(R+r)}\,dr.$$

Integrando, estendendo ai limiti e riducendo, si ha:

$$(12)\qquad = \frac{2R^2}{H} - \frac{2R}{H^2} + \frac{1}{H^3} - \frac{e^{-2HR}}{H^3}.$$

Rimane da calcolare il termine della (11) costituito da due fattori integrali. Si ha, a parte il fattore — H:

$$\int_0^R r(R^2 - r^2)\,dr \int_{R-r}^{R+r} \frac{e^{-Hx}}{x}\,dx =$$

$$= \int_0^R r(R^2 - r^2)\,dr \int_R^{R+r} \frac{e^{-Hx}}{x}\,dx + \int_0^R r(R^2 - r^2)\,dr \int_{R-r}^R \frac{e^{-Hx}}{x}\,dx.$$

Invertiamo ora l'ordine di integrazione in ciascuno di questi termini, integrando cioè prima rispetto ad r e poi rispetto ad x. Si dovranno cambiare però i limiti di integrazione, e si ha

$$= \int_R^{2R} \frac{e^{-Hx}}{x}\,dx \int_{x-R}^R r(R^2 - r^2)\,dr + \int_0^R \frac{e^{-Hx}}{x}\,dx \int_{R-x}^R r(R^2 - r^2)\,dr;$$

ed eseguendo le integrazioni rispetto ad r, e poi rispetto ad x:

$$(13)\qquad = \int_R^{2R} \frac{e^{-Hx}}{x}\left\{\frac{R^2 - r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right\}_{x-R}^R dx + \int_0^{2R} \frac{e^{-Hx}}{x}\left\{\frac{R^2 - r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right\}_{R-x}^R dx$$

$$= \int_0^{2R} e^{-Hx}\left(R^2x - Rx^2 + \frac{x^3}{4}\right) dx = \frac{R^2}{H^2} - \frac{2R}{H^3} + \frac{3}{2H^4} - e^{-2HR}\left(\frac{R}{H^3} + \frac{3}{2H^4}\right).$$

Ritornando alla espressione (11), si avrà sostituendovi le quantità (12) e (13),

$$F = k\pi\,\vartheta_v \left\{ \frac{2R^2}{H} - \frac{2R}{H^2} + \frac{1}{H^3} - \frac{e^{-2HR}}{H^3} - \frac{R^2}{H} + \frac{2R}{H^2} - \frac{3}{2H^3} + e^{-2HR}\left(\frac{R}{H^2} + \frac{3}{2H^3}\right) \right\}$$

Riducendo e ponendo $RH = p$, si ha finalmente:

$$(14) \qquad F = k\pi\,\vartheta_v\,R^3 \left\{ \frac{1}{p} - \frac{1}{2p^3} + e^{-2p}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{2p^3}\right) \right\}.$$

A questa grandezza sarebbe dunque dovuta l'azione gravitazionale all'esterno della sfera. La massa apparente di questa si ottiene sopprimendo il coefficiente k (la costante universale di attrazione) e cioè

$$(15) \qquad M_a = \pi\,\vartheta_v\,R^3 \left\{ \ldots\ldots \text{ come nella (14) } \ldots\ldots \right\}.$$

Dicendo ora

$$(16) \qquad \Psi = \frac{3}{4} \left\{ \ldots\ldots \text{ come nella (14) } \ldots\ldots \right\},$$

si ha

$$(17) \qquad M_a = \frac{4}{3}\pi\,\vartheta_v\,R^3\,\Psi = M_v\,\Psi.$$

E poichè

$$(18) \qquad M_a = \frac{4}{3}\pi\,\vartheta_a\,R^3,$$

si ha

$$(19) \qquad \vartheta_v = \frac{\vartheta_a}{\Psi} \quad ; \quad \vartheta_a = \vartheta_v\,\Psi \quad ; \quad \Psi = \frac{\vartheta_a}{\vartheta_v};$$

le quali espressioni sono analoghe, rispettivamente, alle altre già scritte per il caso della funzione Φ.

La massa vera della sfera è sempre espressa dalla (1); ed anche per il caso della funzione Ψ, si può verificare che:

$$\lim_{p=0} \Psi = 1,$$

cioè che la massa vera coincide con la apparente, se $p = 0$, ossia se R è piccolissimo, od h nullo.

Nella stessa figura 1, si è tracciata la curva Ψ, che, analogamente alla Φ, è stata ottenuta, riportando come ordinate i valori di quella funzione, corrispondenti ai singoli valori di p. La curva Ψ, come la Φ, parte

dall'ordinata 1, e, cadendo più rapidamente di quella, diventa assintotica all'asse della p.

Analogamente a quanto si è fatto per la funzione Φ, si può anche per la Ψ costruire la seguente tabella; a tal fine si fanno varie ipotesi sulla densità vera del sole, supponendo che questa possa assumere valori compresi tra la densità apparente (1,41), e, p. e., 20. Rimangono così determinati i valori della funzione Ψ, in base alle relazioni (19); in corrispondenza, e per successive approssimazioni, si trovano i valori di p, risolvendo la (16); finalmente si trovano i valori della costante di smorzamento unitaria h, dividendo p per $R\vartheta_v$:

ϑ_v	$=$ 1,41	2	5	10	15	20
$\Psi = \frac{\vartheta_a}{\vartheta_v}$	$=$ 1	0,705	0,281	0,141	0,094	0,070
p	$=$ 0	0;53	2,46	5,2	7.95	10,40
$h = \frac{p}{R\vartheta_v}$	$=$ 0	$3{,}81.10^{-12}$	$7{,}08.10^{-12}$	$7{,}49.10^{-12}$	$7{,}63.10^{-12}$	$7{,}64.10^{-12}$

Anche qui, come nella tabella della funzione Φ, si vede che il fattore h cresce rapidamente per variazioni della densità vera, tra 1,41 e circa 2; per valori di quella, comunque superiori, l'ordine di grandezza di h resta fissato in 10^{-12}.

Tutte le considerazioni analitiche svolte portano dunque alla seguente conclusione: Supposta per semplicità uniforme, la densità vera del sole, se essa è alquanto superiore alla apparente (p. e. 2 invece di 1,41), oppure comunque notevolmente superiore (l'analisi dice anche *infinita*), l'ordine di grandezza del fattore di smorzamento h resta fissato fra 10^{-11} e 10^{-12}. A questo risultato sono pervenuto con la considerazione di entrambe le due funzioni Φ e Ψ; e ritengo che l'aver supposto costante la densità del sole (mentre questa è certamente, ed in guisa difficilmente precisabile, non uniforme) non possa avere indotto errore notevole.

Meccanica. — *Sul moto dei giroscopi asimmetrici pesanti nel caso in cui l'invariante principale S è costantemente nullo.* Nota I di ORAZIO LAZZARINO, presentata dal Corrisp. R. MARCOLONGO [1].

In alcune Note precedenti [2], alle quali mi riferisco per la parte bibliografica, mi sono occupato della teoria generale dei giroscopi asimmetrici pesanti e dei due casi singolari $U=\text{cost.}$, $S=\text{cost.}$; in questa Nota studio dettagliatamente, e sempre per via intrinseca, il caso $S=0$, particolarmente interessante perchè permette di esaminare da un nuovo ed unico punto di vista i moti di Hess, di Staude, di Mlodzjejowski e conduce ad una esauriente discussione dei *moti pendolari* considerati anche da Klein e Sommerfeld.

Essendo questi moti del tipo di quelli di Mlodzjejowski, li dirò « *moti alla Mlodzjejowski* » e dimostrerò, come conclusione generale del presente lavoro, che « *i moti che i giroscopi pesanti, simmetrici o asimmetrici,* « *possono compiere nel caso* $S=0$, *sono moti di Hess, o moti di Staude* « *o moti alla Mlodzjejowski* ».

Sia α l'omografia d'inerzia del sistema rotante rispetto al punto fisso O; Ω il vettore della velocità istantanea di rotazione attorno ad O; $\mathrm{g}=G-O$ il vettore del baricentro G del giroscopio; gl'invarianti di Hess sono definiti dalle relazioni [loc. cit. (a)]

$$(1)\qquad \mathrm{S}=\mathrm{g}\times\alpha\Omega\ ,\quad 2\mathrm{T}=\Omega\times\alpha\Omega\ ,\quad 2\mathrm{U}=\alpha\Omega\times\alpha\Omega\ ,$$

dove il vettore $\alpha\Omega$ rappresenta il momento, rispetto ad O, dell'impulso del sistema. La condizione $S=0$ esprime evidentemente che « *durante il moto,* « *il momento, rispetto al punto fisso, dell'impulso, si mantiene normale* « *al vettore del baricentro* ».

Un giroscopio sarà detto « *planare* » quando il suo baricentro si mantiene, durante il moto, in uno dei piani principali d'inerzia relativi al punto fisso; se, oltre a ciò, soddisfa alla nota relazione di Hess fra i parametri di massa, sarà chiamato « *giroscopio di Hess* »; se, infine, non soddisfa ad alcuna delle dette condizioni, sarà detto « *giroscopio generale* ». Nel *giroscopio planare*, il cono degli assi permanenti di rotazione (*cono di Staude*) degenera in due piani che saranno chiamati « *piani di Staude* » e sarà

[1] Pervenuta all'Accademia il 26 ottobre 1919.

[2] O. Lazzarino: a) Questi Rendiconti [1° sem. 1919, pp. 325 e 341]; b) id. 2° sem. 1919.

detto « *primo piano* » quello che contiene il baricentro del giroscopio. Saranno indicate con apici le derivate rispetto al tempo e s'intenderà sempre esclusa l'ipotesi $g = 0$ che corrisponde al noto caso di Euler-Poinsot.

1. Moti dei giroscopi pesanti nel caso $S = 0$. — Quando S è costantemente nullo, sussistono le due equazioni [v. loc. cit. (²) *b*)]

$$(2)\quad S = g \times \alpha\Omega = 0 \quad , \quad (3)\quad S' = g \times \alpha\Omega \wedge \Omega = 0$$

le quali rappresentano rispettivamente un *piano* per O e il *cono di Staude*. Può accadere che le dette equazioni siano, oppur no, tra loro indipendenti.

Nella prima ipotesi, il detto piano o tocca il cono in un sol punto (il vertice) o lo taglia secondo due generatrici o gli è tangente. Nel primo caso si ha il riposo; nel secondo, il giroscopio è *planare*; nel terzo, l'asse di rotazione, dato dalla generatrice di contatto del piano col cono, è *fisso nel corpo* e si hanno moti diversi secondo che la velocità angolare del giroscopio è costante o funzione del tempo.

Nella seconda ipotesi, il piano $S = 0$ è un elemento costitutivo del *cono di Staude*, che perciò degenera in due piani; allora il baricentro del giroscopio [v. loc. cit. (²) *b*)] si mantiene, durante il moto, sopra uno dei piani principali di inerzia relativi al punto fisso (primo piano di Staude) e sussiste fra i parametri di massa la relazione di Hess. Si può quindi concludere che « *quando le equazioni* (2) « *e* (3) *non sono fra loro indipendenti, il giroscopio compie i moti* « *di Hess* ».

2. Proprietà cinematiche del giroscopio di Hess. — A completamento di quanto fu detto nella Nota *b*), dimostro alcune notevoli proprietà del giroscopio di Hess.

Indicando con $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ tre vettori unitari, rispettivamente paralleli agli assi principali d'inerzia relativi al punto fisso O, e supponendo che il baricentro $G = O + g$ del giroscopio si mantenga, durante il moto, nel piano principale $O\mathbf{ij}$, dalla (2) è chiaro che il vettore $\alpha\Omega$, dovendo mantenersi normale ad ogni posizione di g, si conserva perpendicolare al piano $O\mathbf{ij}$ e quindi parallelo al vettore $\mathbf{k}$; perciò si può dire che « *nel giroscopio di* « *Hess, il momento, rispetto al punto fisso, dell'impulso si mantiene, du-* « *rante il moto, perpendicolare al 1° piano di Staude e quindi parallelo* « *a quell'asse principale d'inerzia che è normale al detto piano* ». Da ciò segue che « *il piano* $S = 0$, *definito dalla* (2), *coincide col 2° piano di* « *Staude* ». Le intersezioni di questi due piani sono gli assi permanenti di rotazione; e quindi si può dire che « *nel giroscopio di Hess gli assi per-* « *manenti di rotazione formano un fascio di rette col centro nel punto* « *fisso* ».

Posto $P = O + \alpha\Omega$, il punto P si muove nel piano, per O, normale alla retta Og e, poichè questa è fissa nel corpo, sarà fisso anche il piano

e si ha che « *la prima curva d'impulso giace in un piano per* O, *fisso* « *nel corpo e normale al vettore del baricentro* ».

Osservando, infine, che $\mathrm{mod}\,\mathbf{g} = \mathrm{mod}\,(G - 0) = \mathrm{cost.}$, si ha pure che « *il baricentro del giroscopio descrive nel 1º piano di Staude una circonferenza col centro nel punto fisso* ».

3. Moti giroscopici nel caso in cui il piano $S = 0$ è tangente al cono di Staude. — In questo caso l'asse di rotazione ha direzione fissa nel corpo e quindi anche nello spazio ([3]). Caratterizzando questa direzione con un vettore unitario $\mathbf{u}$, si ha

$$\Omega = \omega \mathbf{u} \tag{4}$$

dove la velocità angolare ω è, in generale, funzione del tempo. Allora, tenendo conto della (4), le equazioni di Euler-Poisson assumono la forma

$$(5)\quad \omega' . \alpha\mathbf{u} + \omega^2 . \mathbf{u} \wedge \alpha\mathbf{u} = \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{g} \quad ; \quad (6)\quad \mathbf{k}_1' = 0\,,$$

dove $\mathbf{k}_1$ è un vettore unitario, fisso nello spazio, verticale e rivolto verso l'alto.

Ora, moltiplicando la (5) scalarmente per $\mathbf{k}_1$ e per $\mathbf{g}$, si hanno le relazioni

$$\omega' . \mathbf{k}_1 \times \alpha\mathbf{u} + \omega^2 . \mathbf{u} \wedge \alpha\mathbf{u} \times \mathbf{k}_1 = 0 \tag{7}$$

$$\omega' . \mathbf{g} \times \alpha\mathbf{u} + \omega^2 . \mathbf{u} \wedge \alpha\mathbf{u} \times \mathbf{g} = 0 \tag{8}$$

dalle quali, eliminando ω', si ha $\mathbf{k}_1 \times \mathbf{u}_1 = 0$, dove si è posto

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u} \wedge \alpha\mathbf{u} \times \mathbf{g} . \alpha\mathbf{u} - \mathbf{g} \times \alpha\mathbf{u} . \mathbf{u} \wedge \alpha\mathbf{u}\,. \tag{9}$$

Il vettore $\mathbf{u}_1$ così definito, e supposto non nullo, è *fisso nel corpo*.

D'altra parte, moltiplicando la (6) scalarmente per $\mathbf{u}$ e integrando, si ha $\mathbf{k}_1 \times \mathbf{u} = c$, dove c è una costante d'integrazione.

Allora, considerando il sistema delle due equazioni così trovate, cioè

$$(10)\qquad \mathbf{k}_1 \times \mathbf{u} = c \quad , \quad \mathbf{k}_1 \times \mathbf{u}_1 = 0\,,$$

lo studio della questione è ridotto all'esame delle (10) poichè, come si vedrà, si hanno moti giroscopici completamente diversi secondo che le (10) sono, oppur no, fra loro indipendenti.

([3]) Cfr. R. Marcolongo, *Meccanica razionale* [2ª ediz. Hoepli, vol. I, pag. 180; vol. II, pag. 280].

4. Caso in cui le (10) sono indipendenti fra loro. — Poichè i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{u}_1$ (supposti non nulli) sono *fissi nel corpo*, è chiaro che, per l'indipendenza delle (10), anche $\mathbf{k}_1$ sarà fisso nel corpo. Allora, scrivendo la (6) sotto una nota forma [loc. cit. (²) *a*)]

$$\mathbf{k}_1' = (\mathbf{k}_1') + \omega . \mathbf{u} \wedge \mathbf{k}_1 = 0 \tag{6'}$$

e osservando che, essendo $\mathbf{k}_1$ fisso nel corpo, risulta $(\mathbf{k}_1') = 0$, si ottiene

$$\mathbf{u} = \mathbf{k}_1 ; \tag{11}$$

cioè « *l'asse di rotazione del giroscopio risulta verticale* ». Allora la (7) porge

$$\omega' . \mathbf{u} \times \alpha \mathbf{u} = 0 \tag{7'}$$

e da qui, poichè per $\omega \neq 0$ è $\mathbf{u} \times \alpha\mathbf{u} \neq 0$, risulta $\omega = \text{cost.}$; perciò si conclude che « *quando le* (10) *sono fra loro indipendenti, il giroscopio* « *compie le rotazioni permanenti di Staude* » [Journ. für Mathem., *113*, pag. 318 (1894)].

5. Condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di moti giroscopici quando le (10) non sono indipendenti fra loro. — Poichè la costante c è arbitraria, la prima delle equazioni (10) non può essere un'*identità*; la seconda delle (10) può essere una *conseguenza* della prima o una *identità*. Nella prima ipotesi, se m è numero reale non nullo, si può scrivere, tenendo conto della (9),

$$m\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 = \mathbf{u} \wedge \alpha\mathbf{u} \times \mathbf{g} . \alpha\mathbf{u} - \mathbf{g} \times \alpha\mathbf{u} . \mathbf{u} \wedge \alpha\mathbf{u} \tag{12}$$

e da qui, moltiplicando scalarmente per $\mathbf{u} \wedge \alpha\mathbf{u}$, si ha la relazione

$$\mathbf{g} \times \alpha\mathbf{u} . (\mathbf{u} \wedge \alpha\mathbf{u})^2 = 0 \tag{13}$$

la quale importa che deve sussistere almeno una delle due condizioni

$$\mathbf{u} \wedge \alpha\mathbf{u} = 0 \quad , \quad \mathbf{g} \times \alpha\mathbf{u} = 0 . \tag{14}$$

Ora si dimostra che, in entrambi i casi, risulta $m = 0$ e perciò si conclude che « *la seconda delle* (10), *non potendo essere conseguenza della* « *prima, è identità* ».

Supposto, infatti, $\mathbf{u} \wedge \alpha\mathbf{u} = 0$, il secondo membro della (12) si annulla identicamente e quindi, poichè è $\mathbf{u} \neq 0$, risulta $m = 0$; supposto, invece, $\mathbf{g} \times \alpha\mathbf{u} = 0$, la (8) porge, per $\omega \neq 0$, $\mathbf{u} \wedge \alpha\mathbf{u} \times \mathbf{g} = 0$ e quindi dalla (12) si deduce ancora $m = 0$, c. d. d.

Ora, dal fatto che la seconda delle (10) è una *identità*, segue che il vettore $\mathbf{u}_1$ è necessariamente nullo e quindi, per la (9), sussiste identica-

mente la relazione

$$(15) \qquad \mathbf{u} \wedge \alpha\mathbf{u} \times \mathbf{g} \,.\, \alpha\mathbf{u} = \mathbf{g} \times \alpha\mathbf{u} \,.\, \mathbf{u} \wedge \alpha\mathbf{u}$$

che può considerarsi come l'*equazione caratteristica dei moti possibili.*

Dopo ciò, osservando che per $\mathbf{u} \neq 0$ non può, in generale, $\alpha\mathbf{u}$ essere parallelo al vettore $\mathbf{u} \wedge \alpha\mathbf{u}$, risulta chiaro che, per soddisfare alla (15), è necessario e basta che coesistano le due condizioni

$$(16) \qquad \mathbf{u} \wedge \alpha\mathbf{u} \times \mathbf{g} = 0 \quad , \quad \mathbf{g} \times \alpha\mathbf{u} = 0$$

il cui significato geometrico è già noto. Perciò si conclude che « *le equazioni* (16) *sono le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di moti giroscopici, nel caso in cui le equazioni* (10) *non sono fra loro indipendenti* ».

Matematica. — *Nuove regole per la riduzione degli integrali multipli generalizzati di Riemann.* Nota III di Mauro Picone, presentata dal Socio L. Bianchi [1].

5. È interessante considerare qualche caso particolare notevole del teorema IV.

Cominciamo dall'osservare che nel teorema IV l'insieme dei punti singolari in Δ per l'integrabilità (R) della funzione $f(x, y)$ può essere, in particolare, nullo. Si ha dunque che:

Se, nelle ipotesi I_x *e* II_x, *la funzione* $f(x, y)$ *è* (*limitata e*) *integrabile* (R) *in* Δ, *vale la* (10).

Supponiamo, d'ora in avanti, che:

La funzione $f(x, y)$ *sia continua in* Δ, *eccettuati i punti di un insieme* F *di misura* (J) *nulla. Se si esclude un insieme* X *di valori* ξ *in* (a_1, a_2) *e un insieme* Y *di valori di* η *in* (b_1, b_2), *entrambi di misura* (*lineare* J) *nulla, la sezione dell'insieme* F *con ogni retta* $x = \xi$, *o* $y = \eta$, *sia un insieme di misura* (*lineare* J) *nulla.*

Osserviamo che, in queste ipotesi, i punti singolari in Δ, in (b_1, b_2) e in (a_1, a_2), per l'integrabilità (R) delle funzioni $f(x, y)$, $f(\xi, y)$, $f(x, \eta)$, sono, rispettivamente, contenuti in F, nella sezione di F colla retta $x = \xi$, e in quella colla retta $y = \eta$. Si ha perciò il teorema:

Corollario I. — *Se la funzione* $f(x, y)$ *ammette un integrale generalizzato* (R) *esteso al rettangolo* Δ *e l'insieme dei punti singolari in*

[1] Pervenuta all'Accademia il 25 settembre 1919.

(a_1, a_2) *per l'integrabilità* (R) *della funzione*

$$\varphi(x) = (\mathrm{R}) \int_{b_1}^{b_2} f(x, y)\, dy$$

è di misura (*lineare* J) *nulla, sussiste la* (10).

È importante anche osservare che:

Se la funzione $f(x, y)$ possiede un integrale generalizzato (R) *esteso al rettangolo Δ, la funzione $f(\xi, y)$ ammette sempre un integrale generalizzato* (R) *esteso a (b_1, b_2), escluso al più un insieme di valori di ξ di misura* (*lineare*) *nulla.*

Tale osservazione è utilissima in pratica. Poichè, una volta assicurata la integrabilità (R) in modo generalizzato della funzione f in Δ, quando la natura dell'insieme F dei punti di discontinuità della funzione e delle discontinuità stesse è tale da presentare un certo carattere di uniformità, si potrà ben presumere che i punti ξ di (a_1, a_2), di eccezione per l'esistenza dell'integrale generalizzato (R) della funzione $f(\xi, y)$ in (b_1, b_2), siano solo da ricercare nelle ascisse dei punti di F che presentano qualche singolarità, vuoi per la discontinuità di f, vuoi per le proprietà geometriche di F (cfr. Esempio II, al n. 6).

Supponiamo, ancora più in particolare, che l'insieme F dei punti di discontinuità della funzione $f(x, y)$ abbia i suoi punti distribuiti sopra un sistema di rette $x = \xi$, costituendo i valori di ξ un insieme in (a_1, a_2) di misura (lineare J) nulla, si ha il teorema:

Corollario II. — *Se l'insieme* F *dei punti di discontinuità in Δ della funzione $f(x, y)$ si proietta sull'asse delle x secondo un insieme di misura lineare* (J) *nulla, e la funzione ammette un integrale generalizzato* (R) *esteso a Δ, sussiste la* (10).

Ne segue:

Corollario III. — *Se l'insieme* F *dei punti di discontinuità in Δ della funzione $f(x, y)$ si proietta sull'asse delle x e sull'asse delle y secondo due insiemi entrambi di misura* (*lineare* J) *nulla, e la funzione ammette un integrale generalizzato* (R) *esteso a Δ, sussistono le eguaglianze*

$$\iint_\Delta f(x, y)\, dx\, dy = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} f(x, y)\, dy = \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{a_1}^{a_2} f(x, y)\, dx .$$

Analogamente, si ha nello spazio:

Se l'insieme F *dei punti di discontinuità nel parallelepipedo*

$$\Delta\ (x = a_1, x = a_2\ ;\ y = b_1, y = b_2\ ;\ z = c_1, z = c_2)$$

della funzione $f(x, y, z)$ si proietta sopra ciascuno dei tre assi x, y, z

secondo un insieme di misura (lineare J) *nulla, e la funzione ammette un integrale generalizzato* (R) *esteso a* Δ, *sussistono le eguaglianze*

$$\iiint_\Delta f(x, y, z)\, dx\, dy\, dy =$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{c_1}^{c_2} f(x, y, z)\, dz = \cdots = \int_{c_1}^{c_2} dz \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} f(x, y, z)\, dy .$$

6. Applichiamo in qualche semplice esempio la teoria svolta.

Esempio I. — Sia E un dominio del piano, le cui sezioni rettilinee $\lambda(\xi)$, $\mu(\eta)$, con ogni retta $x = \xi$, $y = \eta$ siano sempre misurabili ( ); siano a_1, a_2 e b_1, b_2 i limiti inferiore e superiore delle x e delle y per i punti di E. Siano poi $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, ..., $P_n(x_n, y_n)$, n punti di E, $g(x, y)$ una funzione continua in E, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, n costanti minori dell'unità e $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, n costanti positive. Si considerino le funzioni

$$f_1(x \cdot y) = \frac{g(x, y)}{\prod_1^n [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{\alpha_i}},$$

$$f_2(x, y) = g(x, y) \prod_1^n \left| \log \left\{ (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right\} \right|^{\beta_i};$$

queste funzioni sono continue in tutto E, se si eccettuano i punti P_i. Si vede però subito che esse ammettono un integrale generalizzato (R) esteso a E, e ciò applicando il criterio dato al n. 3 al dominio variabile Δ_ν ottenuto togliendo, da E, n cerchi aventi i centri nei punti P_i ed il medesimo raggio tendente a zero.

In virtù del corollario III, *la riduzione dell'integrale esteso a* E *di queste funzioni* f_1, f_2, *si può effettuare come per una funzione continua in tutto* E; *si ha cioè*

$$\iint_E f(x, y)\, dx\, dy = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{\lambda(x)} f(x, y)\, dy = \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{\mu(y)} f(x, y)\, dx .$$

Osservazione. Ad un'identica conclusione si perviene, nello spazio, per le funzioni

$$f_1(x, y, z) = \frac{g(x, y, z)}{\prod_1^n [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{\alpha_i}}, \quad \alpha_i < \frac{3}{2},$$

$$f_2(x, y, z) = g(x, y, z) \prod_1^n \left| \log \left\{ (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 \right\} \right|^{\beta_i}, \quad \beta_i \geq 0.$$

Matematica. — *Risoluzione dell'equazione di Fredholm con serie assolutamente sommabili del Borel.* Nota di GUSTAVO SANNIA. presentata dal Socio ENRICO D'OVIDIO.

1. Consideriamo l'*equazione di Fredholm*

$$(1)\qquad \varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,y)\,\varphi(y)\,dy$$

e la sua formula risolutiva

$$(2)\qquad \varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b H(x,y,\lambda)\,f(y)\,dy$$

per un valore di λ che non sia *caratteristico* per il *nucleo*

$$K(x,y)\equiv K^{(1)}(x,y)\ \text{(}^1\text{)}.$$

All'espressione generale, ma complicata, del *nucleo risolvente* $H(x,y,\lambda)$, data dal Fredholm, si preferisce nelle applicazioni il suo sviluppo in serie di potenze di λ

$$(3)\qquad H(x,y,\lambda)=K^{(1)}(x,y)+\lambda K^{(2)}(x,y)+\lambda^2 K^{(3)}(x,y)+\cdots$$

che, sostituito in (2), dà la soluzione $\varphi(x)$ espressa dalla serie

$$(4)\qquad \varphi(x)=\varphi_1(x)+\lambda\varphi_2(x)+\lambda^2\varphi_3(x)+\cdots$$

ove

$$\varphi_1(x)=f(x)\ ,\ \varphi_n(x)=\lambda\int_a^b K^{(n-1)}(x,y)\,f(y)\,dy\qquad (n=2,3,\ldots).$$

Però le formole (3) e (4) sono applicabili solo nei punti λ del piano complesso che sono interni al cerchio C di centro $O(\lambda=0)$ e di raggio uguale al minimo fra i moduli dei valori caratteristici.

(1) Che supporremo funzione limitata e *generalmente* continua nel quadrato R limitato dalle rette $x=a$, $x=b$, $y=a$, $y=b$ (ossia tranne forse in punti distribuiti sopra un numero finito di linee, ciascuna delle quali sia tagliata in un numero finito di punti da ogni retta parallela ad un asse). Si sa che allora i *nuclei iterati* $K^{(2)}(x,y)$, $K^{(3)}(x,y)$, ... sono funzioni continue in R e che ivi è

$$|K^{(n)}(x,y)|<M^n(b-a)^{n-1},\quad \text{se}\quad |K(x,y)|<M.$$

Supporremo inoltre che $f(x)$ sia continua in (a,b).

Scopo di questa Nota è di mostrare che il loro campo di applicabilità si può estendere interpretandole col *metodo di sommazione esponenziale* del Borel.

2. Ad ogni semiretta s uscente da O si conduca la perpendicolare p da quello fra i punti (valori) caratteristici giacenti su s (se ve ne sono), che è più vicino ad O: quei punti λ che giacciono dalla parte di O rispetto a tutte le rette p costituiscono una regione P d'un sol pezzo, finita o non, che contiene il cerchio C fin qui considerato e che può dirsi un *poligono* (in senso lato).

Risulta dalla costruzione stessa di P che il cerchio che ha per diametro il segmento che unisce il punto O ad un punto qualunque λ_0 interno a P è tutto interno a P; anzi si può descrivere un cerchio concentrico e di raggio maggiore $\frac{1}{2}|\lambda_0| + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, anch'esso interno a P, la cui circonferenza indicheremo con Γ.

Teorema. — *In ogni punto fissato λ_0 interno al poligono* P:

1°) *la serie* (3) *è assolutamente ed uniformemente sommabile quando (x, y) varia nel quadrato* R *ed ha per somma* $\mathrm{H}(x, y, \lambda_0)$, *ossia le serie*

$$(5) \qquad u^{(r)}(\alpha, x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_0^{n+r}\, \mathrm{K}^{(n+r+1)}(x, y) \frac{\alpha^n}{n!} \qquad (r = 0, 1, 2 \ldots)$$

sono convergenti uniformemente in R *per ogni fissato* $\alpha \geq 0$, *gli integrali*

$$(6) \qquad \int_0^{\infty} e^{-\alpha} u^{(r)}(\alpha, x, y)\, d\alpha \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots)$$

sono convergenti assolutamente ed uniformemente in R *ed il primo vale* $\mathrm{H}(x, y, \lambda_0)$ [1];

2°) *la serie* (4) *è assolutamente ed uniformemente sommabile nell'intervallo* (a, b) *ed ha per somma la soluzione* $\varphi(x)$ *dell'equazione di Fredholm* (1) *per* $\lambda = \lambda_0$, *ossia le serie*

$$(7) \qquad v^{(r)}(\alpha, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_0^{n+r}\, \varphi_{n+r+1}(x) \frac{\alpha^n}{n!} \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots)$$

sono convergenti uniformemente in R *per ogni fissato* $\alpha \geq 0$, *gli integrali*

$$(8) \qquad \int_0^{\infty} e^{-\alpha}\, v^{(r)}(\alpha, x)\, d\alpha \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots)$$

sono convergenti assolutamente ed uniformemente in R *e il primo vale* $\varphi(x)$, *soluzione di* (1) *per* $\lambda = \lambda_0$.

[1] Osserviamo per il seguito che proprietà analoghe valgono evidentemente per la serie che si deduce da (3) (con $\lambda = \lambda_0$) moltiplicandone tutti i termini per $\lambda_0 f(y)$, ossia che questa serie è assolutamente ed uniformemente sommabile in R ed ha per somma $\lambda_0 f(y)\, \mathrm{H}(x, y, \lambda_0)$.

L'ampliamento del campo di validità delle (3) e (4), che ci assicura il teorema, è spesso considerevole. Così *nel caso importante che i valori caratteristici siano tutti reali (immaginarî puri)* [1], *il nuovo campo* P *è la striscia limitata dalle rette parallele all'asse immaginario (reale) condotte dai due punti caratteristici che sono più vicini ad* O *e da bande opposte rispetto a quell'asse.*

3. Per dimostrare il teorema osserviamo che la (3), *in un punto fissato* (x, y) *di* R, è una serie di potenze di λ a coefficienti numerici, il cui raggio di convergenza non è nullo: quindi [2] ammette un *poligono di sommabilità* $P(x, y)$ in ogni punto λ_0 interno al quale (mai esterno, forse del contorno) è assolutamente sommabile [3] e ha per somma il valore per $\lambda = \lambda_0$ della funzione analitica che ha per elemento la (3), ossia $H(x, y, \lambda_0)$. Per costruirlo, si conduce la perpendicolare p ad ogni semiretta s uscente da O, da quello fra i punti singolari giacenti su s della funzione analitica $H(x, y, \lambda)$ definita dalla (3) che è il più vicino ad O: $P(x, y)$ è allora costituito dai punti λ che giacciono dalla parte di O rispetto a tutte le rette p.

Variando il punto (x, y) di R, varia anche il poligono $P(x, y)$ in generale; dunque, solo per ogni punto λ_0 *interno alla regione comune a tutti i poligoni* $P(x, y)$ si può asserire che la serie (3) sarà sommabile assolutamente con somma $H(x, y, \lambda_0)$ *qualunque sia* (x, y) *in* R. Ora questa regione è appunto il poligono P dianzi definito: ciò risulta dalla costruzione stessa dei poligoni P e $P(x, y)$ e dal fatto (noto) che ogni valore caratteristico di $K(x, y)$ è punto singolare della funzione $H(x, y, \lambda)$ di λ per almeno un punto (x, y) di R, e viceversa.

Per completare la dimostrazione della prima parte del teorema, resta da dimostrare che la convergenza delle (5) per ogni fissato $\alpha \geq 0$ e degli integrali (6) è uniforme in R.

Per una (5), ciò segue subito dal fatto che i moduli dei suoi termini sono [4] minori dei termini (costanti) corrispondenti della serie convergente

$$\lambda_0^r M^{r+1}(b-a)^r e^{\lambda_0 M(b-a)\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_0^{n+r} M^{n+r+1}(b-a)^{n+r} \frac{\alpha^n}{n!}.$$

Passando ad un integrale (6), prendiamo a considerare la circonferenza Γ introdotta al n. 2. Nei punti λ di Γ e del suo interno $H(x, y, \lambda)$ è funzione olomorfa di λ, qualunque sia (x, y) in R; quindi i coefficienti del suo sviluppo (3) in serie di Mac-Laurin sono esprimibili, per ogni punto fissato

[1] Come accade per es. se $K(x, y)$ è simmetrico (gobbo-simmetrico).

[2] E. Borel, *Leçons sur les séries divergentes,* chap. IV.

[3] Ciò vuol dire che nel punto fissato (x, y) di R le serie (5) sono convergenti assolutamente e gli integrali (6) sono convergenti assolutamente (per definizione di Borel).

[4] Per le formole in fine di [1].

(x, y) di R, con la formola di Cauchy

$$(9) \qquad K^{(n)}(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{H(x, y, \lambda)}{\lambda^n} d\lambda ;$$

sicchè la (5) può scriversi

$$(10) \qquad u^{(r)}(\alpha, x, y) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_0^{n+r} \frac{\alpha^n}{n!} \int_\Gamma \frac{H(x, y, \lambda)}{\lambda^{n+r+1}} d\lambda .$$

Quando λ varia su Γ (ove non si annulla), la serie di potenze di λ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_0^{n+r}}{\lambda^n} \cdot \frac{\alpha^n}{n!} = e^{\frac{\lambda_0}{\lambda}\alpha} \lambda_0^r$$

è convergente uniformemente; quindi, variando (x, y) in R e λ su Γ, è pure convergente uniformemente la serie

$$(11) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_0^{n+r} \frac{H(x, y, \lambda)}{\lambda^{n+r+1}} \cdot \frac{\alpha^n}{n!} = \frac{\lambda_0^n}{\lambda^{r+1}} H(x, y, \lambda) e^{\frac{\lambda_0}{\lambda}\alpha} ,$$

perchè si ottiene dalla precedente moltiplicandone tutti i termini per la funzione $H(x, y, \lambda) : \lambda^{r+1}$ che è limitata per (x, y) su R e λ su Γ, ossia è tale che esiste una costante $L > 0$ per cui risulti

$$(12) \qquad | H(x, y, \lambda) : \lambda^{r+1} | < L ,$$

qualunque sia (x, y) in R e λ su Γ [1]. Dunque la (11) è integrabile termine a termine rispetto a λ lungo Γ, e perciò la (10) può scriversi

$$u^{(r)}(\alpha, x, y) = \frac{\lambda_0^r}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{H(x, y, \lambda)}{\lambda^{r+1}} e^{\frac{\lambda_0}{\lambda}\alpha} d\lambda .$$

Se ne deduce, per la (12), che, qualunque sia (x, y) in R, è

$$| e^{-\alpha} u^{(r)}(\alpha, x, y) | < \frac{L | \lambda_0^r |}{2\pi} \int_\Gamma \left| e^{-\left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right)\alpha} \right| | d\lambda | ;$$

[1] Si ricordi infatti che $H(x, y, \lambda)$ è esprimibile (Fredholm) come quoziente di due trascendenti intere $D(x, y, \lambda)$ e $D(\lambda)$, sicchè $H(x, y, \lambda) : \lambda^{r+1} = D(x, y, \lambda) : [D(\lambda) \lambda^{r+1}]$. La seconda, come λ^{r+1}, non si annulla su Γ; quindi esiste una costante $l > 0$ tale che risulti $| D(\lambda) \lambda^{r+1} | > l$ lungo Γ. Poi lo sviluppo della prima in serie di potenze di λ ha (come è noto) i moduli dei termini minori dei termini della serie convergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ M^{n+1} (b - a)^n (n + 1)^{\frac{n+1}{2}} | \lambda | : (n + 1)! \right\}$$

indipendente da (x, y); sicchè se N è un numero maggiore della somma di questa serie su Γ, sarà *a fortiori* $| D(x, y, \lambda) | < N$, qualunque sia (x, y) in R. Da tutto ciò segue la (12) per $L = N : l$.

poi, ricordando (n. 2) che $\frac{1}{2}|\lambda_0|+\varepsilon$ è il raggio di Γ e chiamando h una costante positiva minore della parte reale di $1-\frac{\lambda_0}{\lambda}$ lungo Γ, sicchè il modulo di $e^{-\left(1-\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)\alpha}$ risulti minore di $e^{-\alpha h}$ [1], si ha

$$|e^{-\alpha}u^{(r)}(\alpha, x, y)| < \frac{L|\lambda_0^r|\, e^{-h\alpha}}{2\pi}\int_\Gamma |d\lambda| = L\,|\lambda_0|^r \left\{\tfrac{1}{2}|\lambda_0|+\varepsilon\right\} e^{-h\alpha}.$$

Ora, poichè l'integrale di $e^{-h\alpha}$ (e quindi del terzo membro) rispetto ad α tra i limiti 0 e $+\infty$ esiste *e non dipende da* (x, y), esisterà *a fortiori* l'analogo integrale del primo membro, ossia l'integrale (6) convergerà assolutamente (come già sapevamo), ed uniformemente quando (x, y) varia in **R**. Con ciò la prima parte del teorema è dimostrata.

Ora, posto $\lambda=\lambda_0$ nella (3), moltiplichiamone tutti i termini per $\lambda_0 f(y)$: otterremo una serie di funzioni di x, y, continue in R a partire dalla seconda [2], che sarà sommabile assolutamente ed uniformemente ed avrà per somma $\lambda_0 H(x, y, \lambda_0) f(y)$ [3]; quindi [4] sarà integrabile termine a termine rispetto a y in (a, b), dando origine ad una serie di funzioni di x che sarà sommabile assolutamente ed uniformemente in (a, b), ed avrà per somma l'analogo integrale di $\lambda_0 H(x, y, \lambda_0) f(y)$.

E con ciò anche la seconda parte del teorema è dimostrata, perchè già sappiamo (n. 1) che, così operando, si giunge alla serie (4).

[1] h *esiste.* Infatti, posto $\lambda=|\lambda|\, e^{i\theta}$, $\lambda_0=|\lambda_0|\, e^{i\theta_0}$, si vuole che sia

$$h < [\,|\lambda| - |\lambda_0|\cos(\theta-\theta_0)] : |\lambda|$$

lungo Γ. Ora $|\lambda| - |\lambda_0|\cos(\theta-\theta_0)$ misura la distanza (sempre positiva) di λ_0 dalla perpendicolare in λ alla retta che congiunge λ al punto $O(\lambda=0)$: quindi ha per minimo valore ε (quando λ è quell'estremo del diametro di Γ che passa per λ_0 che è dalla parte di λ_0). Poi $|\lambda|$ ha per massimo valore $|\lambda_0|+\varepsilon$ (nello stesso punto); dunque basta prendere $h=\varepsilon:(|\lambda_0|+\varepsilon)$.

[2] Cfr. [1].

[3] Cfr. [2].

[4] Per un teorema generale che ho dimostrato nella recente Nota (n.i 6 e 7): *Sviluppo di una funzione analitica in serie sommabili col metodo di Borel* (presentata alla R. Acc. delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli).

Fisica. — *Sull'attrito interno del cobalto in campo magnetico variabile.* Nota II del prof. Ernesto Drago, presentata dal Corrispondente M. Cantone.

II. Per studiare l'influenza esercitata dalla ricottura sull'attrito interno del cobalto in campo magnetico variabile, si fecero dapprima molte prove sopra alcuni fili di cobalto da me preparati per vedere quale fosse il mezzo più conveniente per ben ricuocere i fili stessi senza che si determinasse una rottura dei medesimi quando venivano sospesi nel solenoide e sottoposti ad esperimento. Ripetuti tentativi per ricuocere i fili portandoli ad alta temperatura per mezzo di una fiamma a gas fornita da un becco Bunsen, come faceva Brown per i fili di ferro e di nichel, non diedero alcun risultato soddisfacente, perchè forse a causa del rapido raffreddamento la rigidità dei fili di cobalto non si mostrò sensibilmente alterata. Pensai quindi di ricuocere il filo crudo, già precedentemente cimentato per mezzo della corrente elettrica sottoponendolo nel contempo ad una tensione conveniente e dopo numerose prove ottenni l'effetto voluto tendendo il detto filo con un peso di gr. 40 mentre era attraversato da una corrente di 4 ampères che riducevo a 0 in 22 minuti includendo lentamente e con uniformità una resistenza nel circuito. Non credetti prudente di elevare ancora l'intensità della corrente o rendere più lungo il periodo di raffreddamento del filo perchè in precedenti esperienze di prova fatte in tal modo mi si erano fusi o rotti parecchi fili di cobalto, ciò che mi aveva costretto a nuovo e lungo lavoro per prepararmi altri fili crudi con cui ripetere le esperienze. Così intanto fu possibile di ridurre la rigidità del filo di cobalto a 945×10^9 [C. G. S.] e si poterono eseguire delle serie di misure analoghe a quelle già eseguite con il filo crudo.

Il filo fu ricotto il 23 aprile 1918 e si credette raggiunto quasi lo stato normale il 30 dello stesso mese. I risultati di alcune serie di osservazioni sono consegnati nella seguente

TABELLA II.

Filo ricotto di cobalto. Rigidità = 945 × 10⁹ [C. G. S.].

NUMERO delle oscillazioni semplici	AMPIEZZA DELLE OSCILLAZIONI in divisioni della scala corrispondenti ai campi magnetici:			
	terrestre	oscillatorio continuo	costante invertito 173 gauss	oscillatorio intermittente
0	400	400	400	400
5	386	377	370	368
10	372	356	342	337
15	358	336	315	305
20	345	317	289	279
25	333	300	267	251
30	321	285	246	231

che è stata compilata come la tabella I.

Se al solito si rappresentano sull'asse delle ascisse i numeri delle oscillazioni semplici e sull'asse delle ordinate le ampiezze espresse in divi-

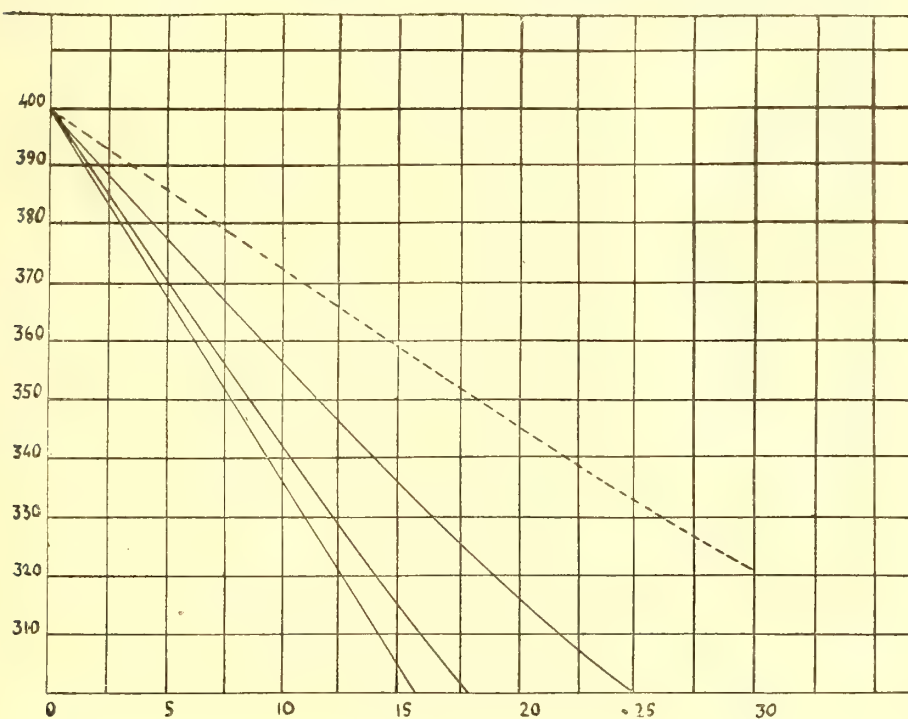



FIG 2.

sioni della scala si ottengono con le cifre della tabella II i diagrammi della figura 2, ove la curva normale è segnata a tratti.

III. Dall'esame delle cifre riportate nelle tabelle precedenti si deduce che l'attrito interno del filo crudo di cobalto cresce sotto l'azione dei campi magnetici variabili e che il più grande aumento si ottiene inviando nella spirale magnetizzante treni di scariche oscillatorie al principio ed alla fine di ogni oscillazione semplice di torsione del filo. Ciò era da aspettarsi in virtù della maggiore dissipazione d'energia che avviene quando magnetizzazione intermittente e rapidamente variabile agisce nel filo stesso.

Ricuocendo il filo predetto in maniera da ridurre la sua rigidità del 4,5 % circa si ottiene come mostra la tabella II, un aumento *più grande* di attrito interno di quello che si era ottenuto con il filo crudo, e la variazione così prodotta raggiunge il massimo quando si crea nella spirale magnetizzante il campo costante di 173 [1] gauss invertito nel solito modo. Se infatti si formano ordinatamente le differenze tra le ampiezze finali delle corrispondenti colonne per il filo crudo e ricotto nelle tabelle I e II si può compilare il seguente quadro:

Differenza tra le ampiezze finali corrispondenti ai campi magnetici:			
terrestre	oscillatorio continuo	costante invertito 173 gauss	oscillatorio intermittente
360	334	319	297
321	285	246	231
39	49	73	66

da cui si vede che mentre l'ampiezza della 30ª oscillazione semplice del filo di cobalto con la ricottura diminuisce del 10,8 % nel campo magnetico terrestre, diminuisce invece del 14,7 % nel campo magnetico prodotto dai treni di scariche oscillatorie, del 22,2 % nel campo analogo destato ed invertito nel modo già esposto.

Appare intanto necessario di studiare con ulteriori ricerche se eventualmente possa ottenersi una maggiore dissipazione d'energia rispetto a quella che si ottiene con i treni di scariche oscillatorie, facendo agire sul filo un campo costante invertito nel modo predetto ma con intensità superiore a 173 gauss, e nel contempo cercare la maniera più conveniente di annullarsi del campo perchè possa prodursi la dissipazione d'energia più grande.

Si presenta intanto a me il dubbio che i risultati esposti nella presente Nota non siano confrontabili con quelli trovati nelle analoghe ricerche con i fili di ferro e di nichel di rigidità 815×10^9 [C. G. S.] perchè, come già

(1) La disposizione sperimentale usata non permetteva di creare un campo magnetico d'intensità più grande senza che non intervenissero cause d'errore.

feci osservare, non mi fu possibile ridurre la rigidità del filo di cobalto ad un valore inferiore a 945×10^9 [C. G. S.] senza pericolo della rottura del filo sotto l'azione del peso tensore.

Ripetute ricerche fatte accuratamente per mettere in evidenza una *diminuzione* di attrito interno, come già si era trovato per i fili di ferro e di nichel, diedero risultati negativi.

Io credo che l'aumento di attrito interno trovato per i fili di cobalto debba dipendere dalle variazioni di elasticità che tale metallo subisce nel campo magnetico. In condizioni sperimentali identiche a quelle descritte nel presente lavoro già trovai ([1]) che nei fili di ferro sotto l'azione dei campi magnetici oscillatorî l'attrito interno diminuisce *al contrario* di quanto si verifica per i fili di cobalto. Feci allora rilevare che mentre erano osservate le oscillazioni del filo di ferro si notava una torsione dell'estremità libera del medesimo sotto l'azione delle scariche oscillatorie corrispondente in media ad 1,3 divisioni della scala. Osservai nel contempo che generalmente la detta estremità (vista dal di sopra) si torceva nel *senso inverso* delle lancette di un orologio, e ciò avveniva temporaneamente finchè agivano le scariche. Ora in queste ricerche eseguite con il filo di cobalto tanto crudo, quanto ricotto osservai analoga torsione dell'estremità predetta del filo; ma questa (vista sempre dal di sopra) si torceva nello stesso senso delle lancette di un orologio, cioè in senso contrario a quello già osservato con i fili di ferro.

Sembra adunque probabile che vi sia qualche legame fra l'anzidetto mutamento di senso della deformazione di torsione nel campo magnetico oscillatorio ed il senso di variazione dell'attrito interno dei fili di ferro e di cobalto nel campo stesso.

Honda, Shimizu, Kusakabe, Terada ([2]) hanno fatto importanti ricerche sul cambiamento delle costanti elastiche dei corpi ferromagnetici per mezzo della magnetizzazione costante. Credo che sarebbe forse interessante di cercare come tali costanti mutino con magnetizzazione variabile ed in modo particolare studiare il cambiamento del modulo di rigidità, ciò che procurerò di fare in ulteriori ricerche.

Intanto se si ripetono esperienze analoghe a quelle esposte nella presente Nota con campi magnetici costanti e d'intensità crescenti fino a 390 gauss si osserva un piccolo aumento di attrito interno che si rende più grande in campi magnetici alternati a 50 periodi e della stessa intensità efficace; i risultati di ricerche fatte in proposito saranno esposti in altra Nota.

IV. Da quanto precede si possono trarre le seguenti conclusioni:

([1]) Rend. Acc Lincei, vol. XX, serie 5ª, 2° sem. 1911, pag. 104.

([2]) Phylos. Magaz., vol. IV, 1902, pp. 459 e 537; vol. XIII, 1907, pag. 62. Physik. Zeitschr, 1905, pag. 622.

1. L'attrito interno dei fili di cobalto *aumenta sempre* in campo magnetico variabile al *contrario* di quanto avviene per i fili di ferro e di nichel.

2. Nelle condizioni sperimentali esposte pare che il più grande aumento si ottenga con la magnetizzazione intermittente prodotta dai treni di scariche oscillatorie inviati al principio ed alla fine di ogni oscillazione semplice del filo.

3. La ricottura del filo rende più grande tale aumento di attrito interno e la sua influenza si fa maggiormente sentire con la magnetizzazione intermittente prodotta da un campo continuo di 173 gauss convenientemente destato ed invertito al principio di ogni oscillazione semplice del filo stesso.

4. Corrispondentemente a tale aumento di attrito interno si produce deformazione temporanea di torsione del filo di cobalto sotto l'azione delle scariche oscillatorie, però di senso contrario a quella analoga che fu già osservata con i fili di ferro.

Mando un riverente saluto alla memoria del mio Maestro prof. Grimaldi che vide iniziate queste ricerche e ringrazio gli studenti in fisica Galvano ed Arcidiacono che spesso mi aiutarono nelle esperienze.

Geologia. — *Il problema dell'evoluzione dell'idrografia carsica sotterranea.* Nota II di P. Savini, presentata dal Socio E. Millosevich.

Davanti ai risultati dei nuovi studî, che, come si disse nella I Nota, meglio si conciliavano colla rappresentazione dell'idrografia carsica sotterranea, secondo il quadro degli speleologi, il Cvijić, armato di nuove osservazioni, ritorna in campo, e sulla base dell'ipotesi formata dai « pratici » fonda il concetto per la sua nuova teoria. Nella costruzione di questa, egli si appoggiò, come già si è osservato, molto — forse troppo — anche a induzioni puramente logiche e a generalizzazioni egualmente troppo sempliciste, prestando così il fianco agli assalti che certo gli muoveranno gli avversarî. Perchè se la logica che non poggia sulle osservazioni, non può costruire delle realtà, nemmeno le osservazioni che non si appoggino a uno scheletro logico possono riunirsi e reggersi in un corpo vivo di fatti.

L'Autore, pur condividendo il principio formulato dal Martel, nell'affrettata svalutazione della teoria del Grund, non si cura di porre in evidenza quanto a tale teoria si contraddice dall'esplorazione stessa delle caverne. Per cui, come lamenta il Martel, se la teoria del Grund, fece sciupare molti denari in tentativi vani, non si potrà non ricordare al Cvijić che il programma dell'ex-governo austriaco per il miglioramento della poglia della Lubiana, fon-

dato sulla teoria delle comunicazioni dirette e indipendenti fra inghiottitoi e rigurgitatoi, naugragò completamente; e ciò naturalmente non in seguito alla fallacia di quella teoria, ma perchè troppo semplicista ed imperfetta.

Per tali ragioni, doveva quindi apparire necessario al Cvijić, prima di escogitare delle ipotesi nuove, che meglio gli si conveniva per il suo lavoro, di conoscere dapprima le particolari ragioni per cui la teoria del Grund non si conciliava colla rappresentazione idrografica carsica sotterranea, secondo il quadro ch'erasi proposto di fornirci. Basandosi su l'ipotesi del Cvijić, non si potrà perciò ancora risolvere il problema della circolazione delle acque sotterranee carsiche, particolarmente di quelle della Venezia Giulia. Le seguenti considerazioni parmi valgano a confermare quest'asserzione:

A pag. 385 l'Autore asserisce che « *la partie supérieure* (della cosiddetta zona secca), *imbibée d'eau, se comporte presque comme une nappe.* L'eau des fleuves qui se développent à la surface ne s'engouffre que très peu dans les fissures et, par suite, les cours d'eau peuvent approfondir leur lits et former des vallées normales ». Un concetto analogo si fa il Cvijić pure per quel-l'acqua che va a raccogliersi sopra un terreno impermeabile intercalato. « *Il se forme* (scrive alla pag. 399) *sur cette couche une nappe d'eau d'importance locale, ou même régionale*: telles sont les nappes d'eau qu'on rencontre dans le karst dinarique et qui sont liées soit au grès de Wengen et aux mélaphyres stratifiés et intercalés dans les couches du calcaire triasique, soit aux couches de dolomie et de calcaires bitumineux qui sont plus ou moins imperméables ».

Ciò è contraddetto non solo dall'esplorazione stessa delle caverne, ma anche dalle teorie che vigono per spiegare la circolazione dell'acqua su terreni impermeabili. Costituisce, questo, uno di quei casi per cui l'ipotesi escogitata dal Grund non può reggere alle seguenti obiezioni:

Se i massicci di calcare fessurato sovrastanti ai terreni impermeabili fossero imbevuti fino a una certa altezza da un'unica massa d'acqua da riempirne tutte le fessure e le cavità intercomunicanti (come in principio lo sosteneva il Grund ed ora anche il Cvijić, il quale ammette al di sopra degli strati impermeabili intercalati nei sedimenti calcarei delle regioni carsiche l'esistenza di una falda acquea locale o regionale), allora:

1°) al di sopra delle caverne ora percorse dalle acque, non si troverebbero altri piani di caverne rimaste asciutte, che vengono generalmente riconosciute come antiche vie d'acqua, abbandonate per quel processo di progressivo sprofondamento delle acque carsiche;

2°) non si spiegherebbe il prosciugamento delle numerose risorgenti, tanto intermittenti che perenni, che rappresentavano lo scarico esterno delle acque carsiche sotterranee;

3°) non esisterebbero risorgenti perenni più alte di risorgenti intermittenti dipendenti dal medesimo bacino idrografico;

4°) non si spiegherebbe la presenza di vere risorgenti (e non di acque stagnanti) anche a livelli elevati, intercomunicanti con le acque circolanti sotterranee;

5°) non sarebbero ammissibili delle oscillazioni di livello anche di 80, 100 e più metri, cui, già in conseguenza a pochi centimetri di pioggia, le acque carsiche sotterranee vanno soggette, e quindi l'inondazione di cavità superficiali, come le poglie [1], il cui fondo si trovi entro questo campo di oscillazione; e il ravvivarsi di risorgenti che erano asciutte quando le acque circolanti sotterranee erano più basse delle loro bocche;

6°) apparirebbe inesplicabile il comportamento di alcune poglie, che continuano a funzionare da inghiottitoi anche quando, essendo inondate, parrebbe che le acque carsiche sotterranee le avessero già riempite; fenomeno questo che, bene inteso, si verifica fino a quando la pressione esercitata dalle acque superficiali si mantiene maggiore di quella delle acque circolanti sotterranee;

7°) ovunque noi troviamo un fiume che attraversa, senza essere assorbito, una regione di calcari fessurati, esso dovrebbe scorrere sulla pretesa « acqua di fondo », mentre in realtà i sottostanti massicci calcarei non vengono a costituire che una zona d'infiltrazione inferiore, attraverso la quale gli spandimenti del corso d'acqua soprascorrente si raccolgono nella sottostante zona freatica, costituita da terreni impermeabili;

8°) nelle regioni carsiche si potrebbe attingere acqua dal sottosuolo, scavando dei pozzi fino a raggiungere la cosiddetta acqua di fondo, mentre all'incontro i pozzi escavati nelle regioni carsiche, invece di dare acqua, riuscirono assorbenti.

Per le rilevate circostanze, le condizioni idrologiche nelle regioni carsiche non si potranno perciò spiegare nè con l'ipotesi escogitata dal Grund e nemmeno con quella formulata dal Cvijić. Questa rappresentazione potrà invece apparire chiara e precisa quando essa potrà sostenere validamente le obiezioni che più sopra sono state enunciate, che sono quelle principali. Certamente per riuscir ad ottenere una siffatta teoria, che reggesse egualmente bene a tutte le possibili contraddizioni, abbisognava che essa venisse studiata su di un territorio che presentasse, riuniti a breve distanza fra loro, i principali fenomeni carsici attualmente conosciuti. Questa regione non avrebbe potuto essere che il paese classico delle vallecole, degli abissi e delle acque sotterranee, vale a dire la Carsia Giulia, che, col bacino idrografico del vir-

[1] Il nome « *poglia* », non inteso però nel significato odierno, ma semplicemente per indicare le campagne e le vallecole coltivate dell'Istria e della Carsia Giulia, lo troviamo già nel 1616. Bernardo Tiepolo, narrando della guerra scoppiata nel 1615 fra la Repubblica di San Marco e l'Austria, asserisce che per essa « è restata l'Istria sommamente afflitta, e particolarmente gli abitanti delle *Poglie* e dei Carsi in somma calamità et miseria » (cfr. la *Relazione di Bernardo Tiepolo al Veneto Senato*, Archivio Veneto).

giliano Timavo, ci presenta il miglior campo di osservazione e di studio desiderabile, vero paradiso degli speleologi. Qui soltanto — tra i più bizzarri aggruppamenti di rocce corrose dalle acque, che prendono la forma di archi diroccati, di statue mutilate o di sculture strane e mostruose — s' incontrano le più imponenti cavità sotterranee, i più vasti ipogei decorati fantasticamente dal secolare stillicidio; qui s' incontrano i fiumi che spariscono sotterra e vi circolano misteriosamente, compiendovi un'opera lenta ma continua di terebrazione; e qui infine, su questa terra seppellitrice, si scorgono le tracce d'uno splendore e d'una distruzione, che superano entrambi il nostro intendimento.

È su questo territorio che si esercitarono i primi speleologi e per conseguenza si formarono le prime teorie sulla circolazione sotterranea delle sue acque. Non dovrà perciò riuscir di meraviglia se uno studioso di queste terre si sentirà invogliato di recare il contributo dei proprî studî e delle proprie ricerche, e se le conoscenze acquisite in lunghi anni di studio e nelle peregrinazioni attraverso il paese natale lo indussero ad avanzare delle proprie ipotesi che gli sembrano più atte a risolvere, in modo definitivo, questo arduo problema.

Osserverò perciò, innanzi tutto, che, per spiegare il problema della circolazione delle acque nelle regioni carsiche e quello del cosiddetto ciclo di erosione carsico, stimai opportuno di riconoscere in questi processi, a sviluppo completo, l'esistenza di quattro successive zone idrografiche, cioè:

1°) La *zona delle acque filtranti*, o *zona idrodietica* (da ὕδωρ = acqua, e **διετέω** = filtrare) *superiore*, la quale è costituita dalla parte più superficiale del massiccio calcareo. Non è mai perfettamente secca, perchè attraverso le sue fessurazioni interne le acque delle precipitazioni atmosferiche filtrano verso la profondità, e perchè essa va soggetta all' influenza di corsi d'acqua ascendenti, provenienti dalle zone soggiacenti. Queste acque ascendenti alimentano soltanto sorgenti temporanee, le quali inondano temporaneamente le depressioni carsiche anche le più elevate.

2°) La *zona delle acque scorrenti*, o *zona idroreatica* (da ὕδωρ = acqua, e ῥέω = scorrere), la quale è egualmente costituita da un massiccio calcareo, soggiacente alla zona precedente. In essa le acque delle precipitazioni atmosferiche, dopo aver erosa e abrasa l'argilla interstiziale, abbandonano il movimento verticale per iniziare quello orizzontale.

3°) La *zona idrodietica inferiore*. In essa le acque esercitano una funzione analoga a quella della zona superficiale. Attraverso le fessurazioni dei sedimenti calcarei, parte delle sovrastanti acque scorrenti si smarriscono, esercitando un forte drenaggio sui calcari attraversati dalle acque incanalate.

4°) La *zona freatica* (da φρέαρ = pozzo), cioè zona delle acque freatiche *semplicemente scorrenti*, racchiuse tra strati superiori permeabili e inferiormente da impermeabili, a differenza di quelle *salienti*, che, racchiuse tra strati

impermeabili, alimentano i pozzi artesiani. Questa zona accoglie, attraverso le fessure dei massicci calcarei sovrastanti, gli spandimenti delle zone superiori. Per la speciale costituzione geologica delle rocce che la compongono, che sono impermeabili, le acque sono obbligate ad abbandonare il loro movimento verticale per riprendere quello orizzontale, cercando il loro deflusso verso il mare. Come nella soprastante zona idroreatica, anche in questa le acque scorrenti sono spesso arrestate e costrette a rimontare, onde si sviluppano corsi d'acqua ascendenti, i quali, sotto la pressione idrostatica, penetrano in tutte le fessure e rimontano nelle zone idrodietiche, tanto da uscire talvolta alla superficie. È anche l'acqua di questa zona, la quale *non forma una falda acquea locale e tanto meno regionale, ma un puro e semplice corso fluviale, del tutto simile a quelli superficiali, e il quale mantiene la sua individualità indipendente,* che sgorga nelle risorgenti sottomarine della costa adriatica.

Le quattro zone idrografiche non sono immutabili, ma tendono anzi a svilupparsi verso la profondità; mentre, per opera della degradazione atmosferica e dei fenomeni endogeni diversi, procede anche la distruzione della massa calcarea fino al livello impermeabile. Le quattro zone non sono neppur sempre presenti, e, ove il manto calcareo è poco rilevante, potranno riscontrarsi soltanto due di tali zone, cioè la prima e la quarta. In tali casi la prima è bensì seguìta dalla seconda, che però si fonde con quella quarta.

Da questa esposizione emerge chiaramente che la circolazione delle acque nelle regioni carsiche si svolge in tre fasi successive.

La prima è caratterizzata da una zona di acque incanalate scorrenti alla superficie del calcare, e da una sottostante zona d'infiltrazione, attraverso cui gli spandimenti del corso d'acqua sovrascorrente, dopo aver eroso e abraso l'argilla interstiziale, si approfondiscono sempre più, fino a raggiungere la sottostante zona freatica, costituita da terreni non assorbenti.

La seconda fase si differenzia dalla precedente per una zona percorsa da acque incanalate scorrenti attraverso i massicci calcarei, la quale soggiace immediatamente alla zona d'infiltrazione superiore, ed è sottoposta all'influenza di corsi d'acqua ascendenti provenienti dalla zona soggiacente.

Nella terza fase, la zona delle acque incanalate e scorrenti orizzontalmente, per quel processo di progressivo abbassamento delle acque carsiche, si fonde con la sottostante zona freatica, che alfine viene a trovarsi ricoperta da un'unica zona d'infiltrazione.

In quelle regioni ove lo spessore dei sedimenti calcarei è meno rilevante di quanto lo è nei paesi carsici delle Giulie, le acque sotterranee raggiungono più rapidamente i terreni impermeabili, sottostanti ai massicci calcarei, e con ciò è spiegato il perchè in tali regioni la seconda fase dell'evoluzione dell'idrografia carsica non riesce ad aver luogo.

Per concludere, dirò ancora che, a processo compiuto, l'andamento delle acque sotterrane e carsiche diviene del tutto analogo a quello dei corsi d'acqua

superficiali sopra terreni impermeabili, essendo difatti in tale fase che la zona delle acque incanalate si fonde con quella freatica sottostante. In altri termini, i fiumi superficiali, che arrivano al calcare, come corpi d'acqua già formati entro bacini idrografici di rocce non assorbenti, continuano anche sotto terra a mantenere, salvo perdite e diramazioni, la loro individualità indipendente. Così pure le acque filtranti dalla superficie, attraverso gli inghiottitoi e le fessure dei massicci calcarei, vengono a raccogliersi, entro i condotti più ampî, in vene sotterranee, a conduttura ora libera ora forzata, secondo quel cammino che, per le accidentalità puramente fortuite della fessurazione, esse trovano più facile sino a uno sbocco esterno. Questo sbocco può aprirsi in qualunque punto, a qualsiasi altezza, della superficie esteriore, o anche al di sotto del livello marino; basta che esso sia più basso delle bocche assorbenti, in modo da avere una pressione idrostatica sufficiente a mantenere il movimento di deflusso. Le maggiori cavità sotterranee comunicanti con l'esterno devono venir considerate come altrettanti sfiatatoi delle acque sotterrane scorrenti, le quali si raccolgono entro le vaste cavità interne, che per tal modo vengono a funzionare come bacini regolatori e di raccolta. Chè se, entro gli inghiottitoi e le cavità immagazzinanti, l'acqua, in un periodo di siccità, si abbassa fino al livello della risorgente, questa si arresterà, spiegandosi così il regime intermittente di molte risorgenti. Il deflusso perenne o intermittente delle risorgenti dipende quindi non dalla loro posizione, ma dall'abbondanza delle acque assorbite, dalla capacità dei bacini di raccolta e dal decorso dei condotti interni; e con ciò si spiega la presenza, sul medesimo versante di valle, di risorgenti perenni più alte delle risorgenti intermittenti.

Fisiologia. — *Ricerche sulla natura del veleno dell'anguilla. V: Azione tossica della bile di anguilla* [1]. Nota del dott. G. Buglia, presentata dal Corrisp. V. Aducco [2].

Le presenti ricerche hanno lo scopo principale di stabilire un confronto fra l'azione tossica della bile di anguilla e quella del siero di sangue di anguilla.

Speciali ricerche sull'azione tossica della bile di anguilla non mi risulta siano state fatte. Il Wehrmann [3] trovò che la bile di anguilla neutralizza *in vitro* la tossicità del siero di questo animale. Camus e Gley [4] consta-

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di fisiologia della R. Università di Pisa, diretto dal prof. V. Aducco.

[2] Pervenuta all'Accademia il 12 settembre 1919.

[3] C. Wehrmann, *Recherches sur les propriétés toxiques et antitoxiques du sang et de la bile des anguilles et des vipères*. Ann. de l'Inst. Pasteur, XI, 1897, pag. 810.

[4] L. Camus et E. Gley, *Recherches sur l'action physiologique du sérum d'anguille*: *contribution* ecc. Arch. internat. de pharmacologie, V, 1898, pag. 247.

tarono che codesto liquido, anche in quantità relativamente elevata, ha una lieve azione globulicida: in alcuni casi, però, neutralizzando la bile (trovata leggermente acida alle cartine di tornasole), questi Autori osservarono che acquistava la proprietà di produrre una notevole diffusione dell'emoglobina.

La quantità di bile, che ho potuto raccogliere dalla cistitellea delle anguille, è piccola: da anguille di circa 500 gr. ne ottenni $^1/_2$ cc., ma non sempre.

Il colore per lo più è verde-cupo; spesso però si trova anche un colore bruno giallastro con qualche riflesso verde, più o meno marcato. Notai molte volte una certa corrispondenza fra il colore della bile e quello del sangue, nel senso che i riflessi verdastri di questo erano tanto più accentuati quanto più intensa era la colorazione verde del bile.

La reazione, saggiata con le cartine di tornasole, mi risultò quasi sempre neutra, vale a dire che non arrossava le cartine azzurre, nè rendeva azzurre le cartine rosse.

Ottenni costantemente positiva la reazione di Pettenkofer.

a) Azione tossica sugli animali. — Dagli esperimenti sulle rane (del peso medio di 20 gr.) è risultato che la bile di anguilla, iniettata nell'addome in quantità di cc. 0.2-03, produce la morte entro un periodo di tempo variabile da ore 1 a 6 circa; in quantità inferiore, dà un intossicamento lento, e la morte avviene dopo molte ore od anche dopo alcuni giorni.

Nell'avvelenamento rapidamente letale, i fenomeni tossici più salienti sono questi: appena fatta l'iniezione, si osservano movimenti vermiformi delle pareti addominali: dopo circa 15', l'animale cade facilmente in istato catalettico, per cui, capovolto, rimane a lungo nella posizione in cui viene messo, se però viene stimolato, si risveglia e si raddrizza spontaneamente, dimostrando la vivacità normale; dopo 30' circa, od anche meno, presenta fenomeni di paresi e paralisi, e gli arti posteriori assumono una posizione di semi-flessione; in questo periodo il ventre e il lato interno delle coscie sono arrossati; se si affatica l'animale, capovolgendolo più volte, durante gli sforzi che compie per raddrizzarsi, ha tremori e contratture; tremori e contratture agli arti posteriori si osservano anche in seguito a stimolazioni meccaniche, e, più di rado, spontaneamente; col progredire dell'intossicamento, la paralisi si accentua e l'animale, messo in posizione supina, non è più capace di raddrizzarsi; il suo corpo è flaccido; le stimolazioni meccaniche provocano soltanto qualche atto di doglutizione; la sensibilità corneale persiste sino alla morte; dopo morte, il cuore trovasi per lo più arrestato in sistole e l'arrossamento al ventre ed alle coscie è scomparso. Nelle forme di avvelenamento lento i fenomeni suddetti si manifestano molto più tardivamente e sono meno accentuati. La pelle dell'animale, negli ultimi periodi, diventa asciutta, e il corpo appare insecchito.

Dal complesso dei risultati sperimentali si può dunque concludere che la bile di anguilla esercita, sugli animali eterotermi (rane), un'azione elettiva sul sistema nervoso, producendo fenomeni tossici a carattere prevalentemente ipnotico e paralizzante.

Fenomeni molto somiglianti si osservano anche nell'avvelenamento da siero di anguilla, così che si può stabilire, fra l'azione tossica dei due liquidi, una certa analogia, come risulta dalla seguente tabella in cui sono riuniti alcuni esperimenti, fatti contemporaneamente, con siero e bile di anguilla, su rane di peso pressochè eguale (20 gr.):

Siero di sangue di anguilla (ottenuto dal sangue di varie anguille)			
	Siero cc.	Soluz. fisiol. cc.	Osservazioni
1° esp	0.1	0.9	Ore 16.35′ si fa l'iniezione » 20 l'animale è vivace; nella notte muore
2° »	0 2	0.8	» 9.40′ si fa l'iniezione » 15.50′ incapace di raddrizzarsi » 17.5′ completa paralisi (il cuore compie 52 pulsaz. al 1′)
3° »	0.3	0.7	» 9.45′ si fa l'iniezione » 14 inizio paralisi arti posteriori » 15 tremori contratture in seguito a stimolazione meccanica » 16 completa paralisi (il cuore compie 66 pulsaz. al 1′)
4° »	0.4	0.6	» 9.30′ si fa l'iniezione » 14 inizio paralisi arti posteriori » 15 incapace di raddrizzarsi; tremori, contratture in seguito a stimolazione meccanica » 15.20′ completa paralisi (il cuore compie 60 deboli pulsaz. al 1′)
5° »	0.6	0.4	» 9.35′ si fa l'iniezione » 10.30′ paralisi arti posteriori » 10.40′ tremori, contratture » 10.50′ paralisi completa (il cuore compie 23 pulsaz. al 1′)
6° »	0.8	0.2	» 9.38′ si fa l'iniezione » 11.25′ paralisi arti posteriori » 11.35′ tremori, contratture » 11.45′ paralisi completa (il cuore compie 18 pulsaz. al 1′)

Bile di anguilla (ottenuta da varie anguille)			
	Bile cc.	Soluz. fisiol. cc.	Osservazioni
1° esp.	0.1	0.9	Ore 9.50′ si fa l'iniezione » 20 vivace; muore dopo 48 ore
2° »	0.2	0.8	» 9.52′ si fa l'iniezione » 11.30′ inizio paralisi « 15 tremori, contratture in seguito a stimolazione » 19 paralisi completa
3° »	0.3	0.7	» 9.55′ si fa l'iniezione » 10.30′ inizio paralisi » 10.37′ paralisi completa (cuore arrestato in sistole)
4° »	0.4	0.6	» 9.53′ si fa l'iniezIone » 10,20′ incapace di raddrizzarsi; tremori, contratture » 10.30′ paralisi completa (cuore arrestato in sistole)
5° »	0.6	0.4	» 9.58′ si fa l'iniezione » 10.30′ incapace di raddrizzarsi; tremori, contratture » 10.35′ paralisi completa (cuore arrestato in sistole)

Un'altra evidente analogia fra bile e siero di anguilla sta nel carattere di termostabilità che presentano gli elementi tossici dell'una e dell'altro. Il calore non distrugge nè altera le sostanze tossiche della bile e del siero, ma, in presenza di sostanze albuminose, esse vengono per così dire immobilizzate, e la loro azione tossica, in certo qual modo, è sospesa (1). Infatti, anche la bile che, sottoposta all'azione del calore, conserva inalterata la sua tossicità, diventa innocua se si riscalda dopo l'aggiunta di sostanze albuminose. E come i processi disgregativi fanno riacquistare al siero la tossicità perduta per effetto del riscaldamento (2), così anche accade per la bile, quando viene riscaldata in presenza di sostanze albuminose:

(*29-V-919*). 1 cc. di bile, ottenuto da una grossa anguilla di gr. 1350, si diluisce con 6 cc. di soluzione fisiologica.

Il liquido è di un bel colore verde; ha reazione neutra.

Ore 9.30′: 2 cc. della bile diluiti si iniettano nell'addome di una rana (di gr. 21).
» 9.35. L'animale, capovolto, è incapace di raddrizzarsi; ha contratture agli arti posteriori; il ventre è arrossato.
» 11. Si trova morto l'animale.

3 cc. della bile diluiti si riscaldano a bagnomaria (70° C) per 30′. Il liquido diventa più trasparente e assume una colorazione verde-smeraldo; la reazione rimane neutra.

Ore 10.30′: 2 cc. della bile così riscaldata si iniettano nell'addome di una rana (di gr. 23).
» 10.55. L'animale presenta gli stessi fenomeni di intossicamento dell'animale precedente: paresi, paralisi, contratture e arrossamento addome.
» 12. Muore.

(*12-VI-919*). 1 cc. di bile, ottenuta da tre anguille, si diluisce con 3 cc. di soluz. fisiologica. Il liquido ha reazione neutra.

Ore 17: 3 cc. della bile diluita si riscaldano a bagnomaria (100° C) per 30′.
» 17.45′: 2 cc. della bile così riscaldata si iniettano nell'addome di una rana (di gr. 20).
» 18.15′: paresi e paralisi agli arti posteriori; contratture in seguito a stimolazione meccanica; arrossamento ventre e coscie.
» 18.25′: tremori, contratture, morte.

A 1 cc. della bile diluita si aggiunge 1 cc. di siero di anguilla e si riscalda la mescolanza a 70° C per 30′. Il liquido rimane limpido.

Ore 19: 2 cc. di questo liquido si iniettano nell'addome di una rana (di gr. 22).
» 20: l'animale non presenta fenomeni tossici; è vivacissimo.

13-VI, ore 8, id.
15 » » » id.
16 » » 15. muore.

(1) Secondo Bayer (ved. *Fisiologia* di Beaunis e Aducco, cap. *Fisiologia della nutrizione*, pag. 375), le sostanze albuminose del siero sanguigno impedirebbero l'azione tossica dei sali biliari in genere, perchè tra essi e le sostanze proteiche del siero si formerebbe una combinazione *sui generis*, essenzialmente consistente in un fenomeno di adsorbimento.

(2) G. Buglia, *Ricerche sulla natura del veleno dell'anguilla*. Note I e III. Atti della R. Acc. dei Lincei 1919.

(*16-6-919*). A 1 cc. di bile diluita, con soluz. fisiol., al decimo, si aggiunge 1 cc. di soluz. fisiol.

Ore 10.5′: si inietta la mescolanza nell'addome di una rana (di gr. 27)
» 11.15′: inizio paresi e paralisi.
» 11.45′: l'animale, capovolto, è incapace di raddrizzarsi.
» 11.50′: tremori spontanei agli arti posteriori e contratture in seguito a stimolazione.
« 12.15′: muore.

A 1 cc. della stessa bile, diluita al decimo, si aggiunge 1 cc. di estratto di *cieche* (gr. 5 di *cieche* + cc. 10 di soluz. fisiol.). Si riscalda la mescolanza a bagnomaria (75° C) per 15′. Si forma un abbondante precipitato fioccoso.

Ore 10.30′: si inietta la mescolanza nell'addome di una rana (di gr. 24).
» 12: nessun fenomeno tossico; l'animale è vivace.
» 20, id.

17-VI, ore 20, idem.
19 » » » »
20 « » » movimenti torpidi.
21 » » 8, si trova morto l'animale.

(*9-VII-919*). 2 cc. di bile, ottenuti da cinque anguille del peso medio di 300 gr., si diluiscono con 10 cc. di soluz. fisiol. Il liquido è di colore giallo-verdastro; ha reazione neutra.

A 1 cc. della bile così diluita si aggiungono 2 cc. di soluz. fisiol. Si riscalda il liquido a 100° per 5′.

Ore 16.15′: 2 cc. si iniettano in una rana (di gr. 25).
» 20: inizio paresi e paralisi arti posteriori.

10-VII, ore 8, si trova morto l'animale.

A 2 cc. della bile diluita si aggiungono 4 cc. di estratto di muscoli di rana (muscoli gr. 5 + cc. 15 di soluz. fisiol.). Si riscalda la mescolanza a 100° C per 15. Si forma un precipitato fioccoso che si allontana con la centrifugazione.

Ore 16.30′: 2 cc. del liquido centrifugato si iniettano in una rana (di gr. 28).

10-VII, ore 8. L'animale non presenta fenomeni tossici; è vivace.
11 » » » idem.
12 » » » movimenti torpidi.
13 » » » si trova morto.

4 cc. della suddetta mescolanza (bile + estratto muscolare) si riscaldano a 100° C per 5′. Si macina il liquido in mortaio, con cristalli di quarzo.

Ore 16.40′: 2 cc. di liquido macinato si iniettano in una rana (di gr. 24).
» 20 inizio paresi e paralisi degli arti posteriori.
» 22 L'animale è incapace di raddrizzarsi spontaneamente.

10-VII, ore 8, si trova morto.

Ma, nonostante le sopraddette proprietà comuni alla bile e al siero, esiste, fra l'azione tossica di questi due liquidi, una divergenza sostanziale, consistente nel fatto che la bile non produce, negli animali a sangue caldo, quelle alterazioni del ritmo respiratorio e della funzione cardio-vascolare, che contribuiscono a dare uno speciale carattere all'avvelenamento da siero di anguilla. Difatti, in un esperimento che feci sul cane, sebbene iniettassi, in una delle giugulari, una quantità di bile corrispondente alla dose di siero rapidamente letale (cc. 0.3 per kg. d'animale), non ottenni notevoli

modificazioni nè del ritmo respiratorio nè della pressione arteriosa. L'animale, irrequieto, dopo l'iniezione diventò calmo e rimase per lungo tempo in uno stato di evidente torpore e sonnolenza [1].

b) *Azione emolitica.* — Più sopra ho ricordato le prove del Camus e del Gley sull'azione emolitica della bile di anguilla.

In un caso soltanto (usando sangue defibrinato di bue), trovai che la bile di anguilla non esercitò azione emolitica *in vitro*. In molti altri casi invece (usando sangue defibrinato di cane) constatai che la bile ha un'azione emolitica abbastanza intensa e che non viene distrutta o alterata dal calore.

L'aggiunta di alcali aumenta considerevolmente il potere emolitico della bile; ma è da ritenere che ciò sia dovuto all'azione emolitica propria dell'alcali, azione che si aggiunge a quella della bile.

Una differenza fra l'azione emolitica *in vitro* della bile e quella del siero di anguilla, consisterebbe nel fatto che l'azione della bile si manifesta più rapidamente.

Conclusioni.

La bile di anguilla produce negli animali eterotermi (rane) un' azione tossica prevalentemente ipnotica e paralizzante; negli omotermi (per via endovenosa) non dà notevoli alterazioni, nè del ritmo respiratorio, nè della pressione arteriosa. Nel primo caso esiste un'evidente analogia fra l'azione tossica della bile e quella del siero di anguilla; nel secondo caso, invece, v'è una sostanziale differenza fra l'azione tossica dei due liquidi.

Il calore non distrugge nè altera l'azione tossica della bile: ma, se alla bile si aggiungono sostanze albuminose, il riscaldamento ha per effetto di renderla innocua, perchè le sostanze tossiche in essa contenute vengono immobilizzate (non distrutte nè alterate) dalla sostanza albuminosa.

Il carattere di termostabilità della bile di anguilla e il suo comportamento in presenza di sostanza albuminosa trovano perfetta corrispondenza nel siero del sangue di questo stesso animale.

La bile, come il siero del sangue di anguilla, ha un'evidente azione emolitica sul sangue defibrinato di cane.

[1] Accenno di sfuggita che, sotto questo aspetto, l'azione tossica della bile di anguilla, invece che col siero normale, presenta affinità con l'azione tossica del liquido proveniente dalla dialisi del siero, che in antecedenza viene sottoposto ad un'azione disgregativa (v. G. Buglia, *Ricerche sulla natura del veleno d'anguilla.* Nota IV. Atti della R. Acc. dei Lincei, 1919).

Anatomia. — *Sopra lo sviluppo della porzione metencefalica del nucleo vescicolare.* Nota del dott. PRIMO DORELLO, presentata dal Corrisp. RICCARDO VERSARI.

In un lavoro, pubblicato nel vol. XIX delle « Ricerche fatte nel laboratorio di anatomia normale di Roma », ho descritto lo sviluppo della porzione mesencefalica del nucleo vescicolare.

In questa Nota riporto alcuni fatti importanti, che riguardano lo sviluppo della porzione metencefalica. Questa risulta di due parti: una rostrale, che sta in stretto rapporto col peduncolo cerebellare superiore e che perciò chiamo peduncolare; l'altra più caudale, affondata nello spessore del ponte e che chiamo pontale.

Queste due parti differiscono alquanto per il complesso dei loro caratteri; però il passaggio dell'una nell'altra avviene gradualmente, in modo che la parte pontale si presenta come risultante da un notevole sviluppo del segmento ventrale della peduncolare.

La porzione peduncolare, come ho detto, presenta stretti rapporti col peduncolo cerebellare superiore, poichè nella sua parte rostrale sta immediatamente sotto il margine mediale del peduncolo, mentre che più indietro si pone al di sotto della parte media di esso.

Negli embrioni di maiale di mm. 65 questa parte si presenta come una benderella longitudinale, che innanzi si continua con la porzione mesencefalica del nucleo. Essa decorre lungo la metà rostrale del margine laterale del 4° ventricolo, e nella sezione trasversale si presenta di forma semilunare ed abbracciante con la sua concavità detto margine. Il corno ventrale della semiluna è più sviluppato del dorsale.

La parte peduncolare del nucleo vescicolare è povera di cellule, specialmente nelle sezioni più rostrali; e le fibre, anche esse poco numerose, occupano di preferenza la parte ventrale del nucleo. Queste fibre in parte derivano dalle cellule della porzione mesencefalica e pel resto dalle cellule della parte peduncolare.

Le sue cellule sono simili a quelle della porzione mesencefalica ed il loro prolungamento principale, appena originatosi, si ripiega caudalmente con decorso longitudinale, che mantiene finchè entra in rapporto con la parte pontale del nucleo.

Un grande numero delle cellule mostra questo solo prolungamento; nelle altre si scorgono tozzi e brevi prolungamenti afferenti, che in alcuni casi raggiungono il numero di 3 o 4. Nelle sezioni più caudali della parte peduncolare il corno dorsale a poco a poco scompare, mentre quello ventrale

aumenta di volume e si sposta ventralmente e lateralmente, trasformandosi così nella parte pontale del nucleo vescicolare.

È precisamente questa parte pontale che presenta interessanti comportamenti. Essa si distingue dalle altre perchè ha i suoi elementi molto più numerosi e raggruppati, dando luogo ad un bel cumulo posto dapprima poco sotto l'ependima, che riveste il margine laterale del quarto ventricolo, e poi più caudalmente in una posizione più ventrale e laterale.

Le sue cellule sono più numerose nella parte mediale, mentre che nella laterale sono più scarse ed anche meno evolute. Presentano di preferenza la forma di pera con la parte rigonfia rivolta dorsalmente, mentre che la parte ristretta si continua in un robusto prolungamento conico diretto ventralmente e che ha dapprima gli stessi caratteri del corpo protoplasmatico: esso si porta ventralmente e si va a poco a poco assottigliando, finchè, preso un calibro uniforme ed un colorito nero intenso, assume i caratteri di un cilindrasse. Il tratto conico ha una lunghezza variabile, che per solito è maggiore della lunghezza del corpo cellulare, e nel punto in cui si continua col cilindrasse non mostra alcuno strozzamento; presenta però costantemente una inflessione ad angolo per lo più ottuso, talvolta acuto.

Sopra 94 cellule, i cui contorni esaminai accuratamente, solo in 13 vidi, oltre al prolungamento principale, prolungamenti accessorii, che erano in numero da 1 a 4 e si presentavano pallidi, corti, tozzi, a decorso tortuoso e per lo più terminanti bruscamente.

Dalla confluenza di tutti i prolungamenti principali risulta un bel fascio, il quale si dirige ventralmente ed un po' caudalmente e che può essere osservato dalla sua origine sino alla sua terminazione in sezioni che abbiano una corrispondente direzione. Si vede così che le fibre che lo compongono non presentano apprezzabili cambiamenti di calibro durante il loro percorso. Il fascio, procedendo ventralmente, si appiattisce nel senso trasversale e decorre alquanto all'esterno del nucleo masticatorio e della radice motrice del V, ma non uniformemente lontano da queste formazioni, alle quali è assai vicino nella parte più rostrale, per allontanarsene sempre più verso la caudale.

Giunte a livello della metà ventrale del nucleo masticatorio, le fibre emanate dal nucleo vescicolare *nella loro totalità* si piegano con stretta curva medialmente e passano in mezzo ai fascetti radicolari che emanano dal nucleo masticatorio ed i quali, siccome si originano prevalentemente dalla porzione dorso-mediale del corrispondente nucleo, hanno un decorso che ricorda quello del facciale.

Le fibre vescicolari, dopo aver incrociato ad angolo retto le fibre masticatorie, in parte con decorso trasversale, in parte con decorso leggermente ricorrente, raggiungono la faccia esterna del nucleo masticatorio e terminano nella metà laterale di esso, formando un intreccio che rende questa parte

del nucleo più oscura della rimanente: parecchie cellule vescicolari accompagnano il fascio sino a che esso si ripiega medialmente.

Per quanto riguarda il modo di terminare di queste fibre, si vede che alcune di esse finiscono assottigliandosi rapidamente, altre invece dividendosi a pennello in parecchi sottili rametti. Nessuna fibra emanata dal nucleo vescicolare si vede in questo stato di sviluppo emettere collaterali nel suo tragitto o raggiungere la superficie esterna del ponte.

Negli embrioni di cm. 10 la parte peduncolare, salvo il progresso nell'istogenesi dei suoi elementi, non mostra evidenti modificazioni.

Invece nella parte pontale si osserva l'ulteriore evoluzione del prolungamento principale. Le cellule di questa parte, in grande maggioranza, sono piriformi e fornite di un solo e grosso prolungamento, il quale si dirige ventralmente ed un po' caudalmente e lateralmente. Questi prolungamenti però ora non si conservano semplici durante tutto il loro tragitto; ma in rari casi nel punto in cui termina la parte conica, altre volte più ventralmente, nella maggior parte dei casi nel momento in cui si ripiegano medialmente per penetrare in mezzo ai fascetti della radice masticatoria, si dividono in due rami: uno di questi, che per solito ha un calibro leggermente più grande, come negli embrioni più giovani, si va a ramificare in mezzo alle cellule del nucleo masticatorio; l'altro invece si mescola con le fibre emanate dal nucleo masticatorio, ed insieme con esse emerge dalla superficie del ponte.

Negli embrioni più avanzati, cioè di 11 a 17 cm., si vede che il ramo di divisione, il quale si accolla alle fibre masticatorie, ha aumentato il suo calibro. Ma non tutti questi rami si mescolano con le fibre della radice masticatoria, poichè alcuni si accollano semplicemente alla sua faccia laterale; altri invece decorrono separati o riuniti in scarso numero alquanto più all'esterno della radice stessa ed escono separatamente dal ponte; altri finalmente si accollano alla faccia antero-mediale della grossa radice del V.

I fatti osservati ci inducono a ritenere che i rami inviati dalla radice mesencefalica al nucleo masticatorio p. d. non possono considerarsi quali collaterali, ma rappresentano il vero prolungamento efferente delle cellule vescicolari della porzione metencefalica. Gli altri rami, che si formano più tardi e si mettono in rapporto in gran parte con la piccola ed in piccola parte con la grande radice del V, debbono considerarsi come rami afferenti delle cellule vescicolari.

Ho dimostrato in una precedente ricerca che rami afferenti ed efferenti delle cellule vescicolari mesencefaliche durante il loro sviluppo si uniscono in un tronco comune per una parte del loro tragitto. Gli stessi fatti potrebbero ammettersi anche per le cellule della porzione metencefalica: tanto più che le due specie di prolungamenti, per raggiungere un differente destino, hanno per un lungo tratto un percorso comune.

Il complesso dei fatti da me osservati parla contro la funzione motrice delle cellule vescicolari.

Fisiologia. — *Ricerche sulla secrezione spermatica*. IX: *Il rendimento del testicolo e della prostata nei rapporti con la massa dell'organo*. Nota di G. Amantea, presentata dal Corrisp. S. Baglioni.

Profittando dei cani, sui quali ho potuto studiare la secrezione spermatica col metodo della vagina artificiale (o del coito fittizio) (¹), mi sono proposto di stabilire sperimentalmente quale fosse il rendimento del testicolo e della prostata nei rapporti con la massa degli organi stessi.

Il concetto fondamentale direttivo in queste ricerche è stato quello, su cui ho altrove (²) insistito: che cioè, pel cane, la quantità di liquido eliminato può, entro certi limiti, essere assunta come indice dell'attività della prostata (mancando il cane di vescichette seminali, e di glandole del Cowper), e il numero complessivo di spermatozoi come indice dell'attività testicolare (ed epididimale).

Per n. 57 cani ho raccolto i dati seguenti: peso dell'animale, peso del testicolo destro (più l'epididimo), peso del testicolo sinistro (più l'epididimo), peso della prostata, quantità massima di sperma eliminato, numero massimo di spermatozoi eliminati.

Nell'elaborazione di tali dati ho seguìto il metodo del Gini sulla misura delle relazioni tra le graduatorie di due caratteri.

Il Gini ha infatti ideato un indice che chiama *indice di cograduazione* = I, il quale permette di misurare la relazione che lega la graduatoria di due caratteri (³). L'indice può assumere valori compresi tra — 1 e + 1. Se le graduatorie dei due caratteri variano nello stesso senso (ossia, crescendo o diminuendo l'uno, cresce o diminuisce anche l'altro, senza alcuna eccezione), l'indice è uguale a + 1. Se invece vi sono eccezioni, l'indice, pur rimanendo positivo, è inferiore all'unità; ed è tanto più piccolo, quanto più tali

(¹) G. Amantea, *Ricerche sulla secrezione spermatica*: Nota I, *La raccolta dello sperma nel cane*. Rend. della R. Accad. dei Lincei, vol. XXIII, 1° sem., 1914.

(²) G. Amantea, *Ricerche sulla secrezione spermatica*: Nota VII, *Considerazioni generali sulla secrezione spermatica normale del cane e dell'uomo*. Rend. della R. Accad. dei Lincei, vol. XXVIII, 2° sem., 1919.

(³) Vedasi Appendice alla monografia del Municipio di Roma, *Le elezioni generali politiche del 1913 nel Comune di Roma*, Roma, Cecchini 1914; C. Gini, *Sulla misura delle relazioni tra le graduatorie di due caratteri*.

eccezioni sono numerose. Se il numero delle volte, in cui si ha corrispondenza, è uguale al numero delle volte in cui tale corrispondenza manca, l'indice diventa 0, e in tal caso si dice che fra le graduatorie dei due caratteri c'è indifferenza.

Se il numero delle volte, in cui, crescendo o diminuendo un carattere, l'altro diminuisce o cresce, è maggiore del numero delle volte in cui si verifica il caso opposto, l'indice diventa *negativo* e raggiunge il valore di —1 nel caso in cui ciò si verifichi senza alcuna eccezione.

Ho calcolato l'indice di cograduazione servendomi dei dati della tabella annessa; ed ho ottenuto i seguenti valori, di cui cinque sono positivi ed uno negativo:

Indice di cograduazione fra il peso del cane e il peso dei due testicoli . . . . I = + 0,6086
Indice di cograduazione fra il numero degli spermatozoi e il peso del testicolo destro . . . . I = + 0,3532
Indice di cograduazione fra il numero degli spermatozoi e il peso del testicolo sinistro . . . . I = + 0,3532
Indice di cograduazione fra il numero degli spermatozoi e il peso dei due testicoli . . . . I = + 0,3625
Indice di cograduazione fra il peso della prostata e il volume dello sperma . . . . I = + 0,5948
Indice di cograduazione tra il volume dello sperma e il numero degli spermatozoi . . . . I = — 0,2076

Il valore positivo più elevato si osserva per la cograduazione fra il peso del cane e il peso complessivo dei due testicoli, e prova che, ordinariamente, *cani più pesanti hanno testicoli più pesanti.*

Un valore anche elevato si osserva per la cograduazione fra il peso della prostata e il volume massimo di sperma ottenuto, il che prova che sovente *prostate più pesanti eliminano maggiori quantità di liquido.*

Valori invece minori sono tutti gli altri.

Per testicoli più pesanti si ha l'eliminazione di un maggior numero di spermatozoi; ma la corrispondenza è meno regolare di quella tra il peso del cane e il peso dei testicoli, ciò che permette anche di affermare che *talvolta, ma non regolarmente, cani più grossi eliminano un maggior numero di spermatozoi.*

Fra la quantità di liquido emesso e il numero degli spermatozoi contenuti in un cc. c'è invece una relazione *negativa*, sebbene non elevata. Sembrerebbe di doverne concludere che *a maggiori quantità di sperma corrisponde un numero di spermatozoi per cc. meno elevato*, più sovente di quanto non si verifichi il fatto contrario. *Lo sperma, tanto meno sarebbe denso* (*di spermatozoi*), *quanto più voluminoso*; *e viceversa.*

Numero d'ordine	Peso dell'animale in Kg.	Peso del testicolo d. più l'epididimo in gr.	Peso del testicolo s. più l'epididimo in gr.	Peso della prostata in gr.	Quantità massima di sperma ottenuta per una ejaculazione in cmc.	Numero massimo di spermatozoi eliminati con una ejaculazione
I adulto	7,800	6,10	6,40	2,90	4,3	450.210.000
II giovanissimo	8,200	1,38	1,40	0,48	—	—
III vecchio	9,700	8,20	8,20	9,10	—	—
IV adulto	11,200	5,90	7,30	8,80	16,5	199.650.000
V adulto	7,800	2,85	2,90	1,55	6,3	211.680.000
VI giovane	2,700	1,60	1,70	0,52	1,5	1.200.000
VII vecchio	20,100	13,90	14,15	5,55	19,1	678.960.000
VIII giovanissimo	5,000	0,65	0,63	0,32	—	—
IX giovanissimo	9,400	0,75	0,78	0,65	—	—
X adulto	5,600	4,80	5,20	1,95	1,7	109.480.000
XI adulto	6,700	6,75	6,10	1,20	2,7	130.680.000
XII giovane	11,100	6,00	5,20	2,00	5,7	548.340.000
XIII adulto	9,300	9,30	9,90	6,90	16,7	443.580.000
XIV giovanissimo	4,200	0,80	0,80	0,25	—	—
XV giovanissimo	5,300	0,50	0,50	0,35	—	—
XVI adulto	5,700	5,45	4,80	5,20	7,6	262.160.000
XVII adulto	7,700	9,20	8,90	2,20	13,1	301.300.000
XVIII adulto	5,300	5,50	5,90	3,60	10	260.000.000
XIX adulto	6,500	8,70	8,90	—	—	199.200.000
XX adulto	8,200	6,55	6,70	1,95	3,5	95.480.000
XXI adulto	5,500	5,15	5,45	3,10	1,4	422.240.000
XXII giovane	9,000	7,50	7,20	1,20	6,4	286.240.000
XXIII giovanissimo	4,500	0,65	0,65	0,35	—	—
XXIV adulto	9,600	8,55	8,70	1,90	1,5	408.000.000
XXV adulto	6,200	5,20	5,00	2,85	2,3	8.280.000
XXVI vecchio	21,100	19,15	19,35	28,60	1,1	167 200.000
XXVII adulto	8,000	9,70	10,40	5,15	7,7	49.280.000
XXVIII adulto	4,000	4,75	4,60	3,65	2,8	34.160.000

Numero d'ordine	Peso dell'animale in Kg.	Peso del testicolo d. più l'epididimo in gr.	Peso del testicolo s. più l'epididimo in gr.	Peso della prostata in gr.	Quantità massima di sperma ottenuta per una ejaculazione in cmc.	Numero massimo di spermatozoi eliminati con una ejaculazione
XXIX adulto	23,000	22,10	19,95	4,10	4,1	214.020.000
XXX adulto	22,200	23,10	21,70	6,25	4,8	975.360.000
XXXI adulto	5,000	5,90	6,35	1,00	3,0	85.200.000
XXXII adulto	7,600	5,70	5,70			536.640.000
XXXIII adulto	8,800	4,55	4,90	1,40	4,9	597.120 000
XXXIV adulto	8.600	4,20	4,55	2,30	4,8	356.320.000
XXXV adulto	6,800	4,90	5,40	1,40	2,3	402.960.000
XXXV adulto	5,800	6,10	5,95			179.080.000
XXXVII adulto	14,400	8,45	7,60	3,20	10,3	393.120.000
XXXVIII vecchio	18,600	12,80	11,80	11,75	21,2	96 096.000
XXXIX vecchio	28,700	28,00	5,05 (atrofico)	28,85	14,4	421.920.000
XL vecchio	18,200	9,35	23,00	18,20	17,5	—
XLI adulto	19,300	18.35	19,00	8,20	10,8	238.680.000
XLII giovane	6,700	5,85	7,50	2,15	4,3	328.560.000
XLIII adulto	11,400	7,45	7,45	2,75	6,0	1.085.280.000
XLIV giovane	7,300	7,65	8,45	1,40	7,0	112.470.000
XLV adulto	17.400	11,15	11,30	6,70	4,2	31.920.000
XLVI adulto	14,600	15,40	13,90	7,05	8,6	1.076.400.000
XLVII adulto	20,200	8,50	8,60	4,80	6,8	731.680.000
XLVIII adulto	10,300	6,90	7,50	4,40	10,4	319.200 000
XLIX giovane	6,500	3,40	3,56	0,87	1,9	—
L giovane	7,400	5,40	5,45	0,70	—	—
LI adulto	6,400	6,85	3,02	6,70	5,7	175.180.000
LII adulto	14,400	8,65	8,70	3,77	20,7	836.912.000
LIII adulto	14,700	10,64	14,45	6,73	6,4	401.912.000
LIV adulto	5,400	5,17	5,20	2,64	6,4	474.800.000
LV giovanissimo	12,200	2,56	2,50	0,66	—	—
LVI giovanissimo	6,200	0,61	0,63	0,20	—	—
LVII adulto	14,300	11,90	11,52	6,65	14,5	801.360.000

Fisiologia. — *Contributo alla conoscenza degli enzimi. II: La proteasi e la lipasi dell'orzo germogliato* (1). Nota di D. Maestrini, presentata dal Corrisp. S. Baglioni.

Proteasi. — Il potere proteolitico dell'orzo germogliato fu dimostrato da v. Gorup-Besanez (2), ed in seguito confermato da W. Windisch und B. Schellhor (3), da M. Fernbach e L. Hubert (4), e più recentemente da Francesco Weis (5) e da altri.

Le nostre ricerche furono continuate nel modo seguente: l'estratto acidulo di farina di orzo germogliato, ottenuto nel modo detto nella Nota precedente (6), si passava per un setaccio metallico con maglie di 1 mmq. e, avendo nel liquido lattiginoso, così ottenuto, riconosciuto un rilevante potere proteolitico, coi motodi qualitativi *fibrinolitico e gelatinolitico* furono fatte varie ricerche, determinando alla fine di ogni digestione la quantità degli aminoacidi formatisi, seguendo, in parte, una recente modificazione del metodo di S. P. L. Sörensen (7):

« La miscela digerita si versa in un palloncino da 250 cm.^{3}: si aggiunge un eccesso di soluzione satura di acetato di piombo, per precipitare carbonati e fosfati; dopo alcune ore, si precipita l'eccesso di sale di piombo, mediante soluzione satura di solfato sodico purissimo, indi si porta a volume. Si filtra, si prende una parte aliquota, e si titola al formolo, con la scorta di un controllo, sino al rosso vivo, come consiglia Sörensen » (8).

Mediante apparecchi Sukoff, già nella precedente Nota ricordati (9), si stabilì pure la temperatura ottima di azione e quella di distruzione.

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di fisiologia della R. Università di Roma, diretto dal prof. S. Baglioni.

(2) Von Gorup Besanez, Ber. d. deutsch. chem. Gesell. 1875, S. 1510.

(3) W. Windisch u. B. Schellhor, Wochenschr. f. Brauerei, pp. 17, 334-336, 437-439, 449-452, 1900.

(4) M. Fernbach et L. Hubert, I. Maly Th. 30, *929*; Compt. Rend. Acc. sc., 130, 1783-1795, 1900.

(5) Fr. Weis, Zeitschr. f. physiol. Chem. 1900-1901, 31, 78-79.

(6) D. Maestrini, Rend. Acc. dei Lincei, ser. 5a, sem. 2°, pag. 393.

(7) L. Settimy. Arch. farm. sper., 1917, vol. XXIV, pag. 345,.

(8) S. P. L. Sörensen, Biochem. Zeitschr. 1908, 7, 45-101.

(9) Sukoff, Chem. Zeitschr. 1901, n. 99, S. 1111.

Dal complesso delle esperienze risulta:

1) la *proteasi* dell'*orzo germogliato* non è (a differenza dell'analisi), estraibile con acqua: non si trova nel filtrato, ma nell'emulsione;

2) la sua *azione* non si manifesta, se l'emulsione fu eseguita con semplice acqua distillata; è invece rilevante con emulsione acidula con acido acetico, alla concentrazione di gr. mole 0,03 $^0/_{00}$;

3) per avere un fermento molto attivo, è necessario che il contatto della farina con l'acqua acidula si prolunghi *almeno per 6 ore*, ad una temperatura tra 20° e 30° C;

4) neutralizzando l'acidità dell'emulsione con KOH, al tornasole, ed acidificando con HCL sino al titolo di gr. mole 0,03 $^0/_{00}$, il fermento mostrasi meno attivo;

5) alcalinizzando, dopo aver neutralizzato come sopra al tornasole, con KOH sino al titolo di gr. mole 0,03 $^0/_{00}$, l'azione del fermento è anche maggiormente attenuata;

6) la temperatura ottima di azione oscilla fra *45°* e *50° C*; quella di distruzione fra *52°-55° C*.

* * *

Lipasi. — Le lipasi vegetali furono principalmente studiate nelle piante inferiori; nelle piante superiori furono sinora ricercate soltanto nei semi oleiferi (¹).

Per rintracciare questo fermento nell'*orzo germogliato*, abbiamo preparato un'*emulsione acidula*, come per la *proteasi*; indi, per calcolare la quantità di grasso scisso, ci siamo valsi di due diversi metodi, che si completano, cioè: del *numero di acidità* e del *numero degli eteri*. Col primo si è potuta calcolare la quantità degli acidi grassi liberi, contenuta negli olii di mandorle dolci, prima e dopo le singole digestioni, e per differenza il *grasso digerito*; col secondo la quantità degli *eteri* contenuti nello stesso grasso prima e dopo la digestione, e quindi il grasso indigerito.

Numero di acidità. — In varî palloncini tarati si pesano esattamente 1-2 gr. di olio di mandorle dolci; si versa in ciascun palloncino una determinata quantità di emulsione attiva, ovvero inattivata mediante ebollizione; in altri palloncini si versa soltanto uguale quantità di emulsione cruda o bollita, indi si portano tutti in termostato alla temperatura di 35°-40° C. In altri palloncini, che servono di controllo, ugualmente preparati, si determina sul momento il numero di acidità. Si versano cioè in ogni palloncino da 50 a 60 cm³ di alcool a 95°, neutralizzato alla fenolftaleina; si riscalda ogni palloncino a bagno maria sino ad ebollizione incipiente, si raffredda rapidamente, si aggiungono 7-8 gocce di soluzione alcoolica di fenolftaleina (1 °/₀), indi si titola con una soluzione normale decima di idrato potassico. Dal numero dei cm.³ di soluzione potassica impiegata, si calcola l'*indice di acidità*. Lo stesso metodo si segue dopo la digestione, e dalla differenza dei risultati tra il primo ed il secondo esame, si deduce la quantità degli acidi liberi,

(¹) Cfr. Ch. Richet, *Dic. de Physiol.*, 1919, tom. X, fasc. I, pp. 158-160.

formatisi durante il processo digestivo, che si esprime in *acido oleico*, in *acido solforico* o semplicemente in mmgr. di potassa [1].

Per ottenere il numero degli *eteri*, poichè nel caso nostro si trattava di grassi, già contenenti acidi liberi, si è proceduto prima alla determinazione del *numero di saponificazione*, indi si è fatta la differenza tra questo e il *numero di acidità*.

Numero di saponificazione. — In un palloncino tarato si pesano esattamente da 1 a 2 gr. di olio di mandorle dolci, indi si versa *emulsione attiva* di orzo germogliato; in un altro si versa *sola emulsione*, ed in un terzo *solo olio di mandorle*. Alla fine della digestione si aggiungono a ciascun palloncino 25 cm³ di soluzione alcoolica di KOH circa seminormale, si provvede ognuna di un tappo ad un foro, attraversato da un tubo di vetro lungo oltre un metro (refrigerante a riflusso), e si porta a bagno maria in ebollizione, ove si lascia, agitando di tanto in tanto, per mezz'ora o poco più. Tolto il palloncino dal bagno maria, vi si aggiungono 8-10 gocce di soluzione alcoolica di fenolftaleina (1 °/₀) e si titola a caldo l'eccesso di potassa rimasto libero, mediante acido cloridrico esattamente seminormale.

Si esegue pure una prova testimone: cioè si versano 25 cm³ della soluzione alcoolica di potassa circa seminormale in un altro palloncino e si seguita ad operare perfettamente come per le precedenti.

Dalla differenza fra la quantità di acido cloridrico seminormale adoperata nella prova testimone, e quella adoperata nella prova con la materia grassa o con la emulsione, si calcola la quantità di idrato potassico occorsa, nei singoli casi, per la saponificazione completa delle sostanze grasse; calcolando poi tale quantità di potassa in mmgr. per un grammo di sostanza grassa, si ha il numero di saponificazione [2].

Sottraendo il numero di *saponificazione* da quello dell'*acidità*, contemporaneamente in altre prove identiche determinato, si ottiene *il numero degli eteri*, espressione della quantità di grasso rimasta indigerita. I risultati delle nostre ricerche sono:

I. Nell'orzo germogliato esiste un *fermento lipolitico*;

II. Questo fermento è soltanto dimostrabile nelle emulsioni; come la *proteasi*, anch'esso manca nel liquido filtrato;

III. In emulsione, eseguita con semplice acqua distillata, mostrasi molto debole; trovasi invece molto attivo nell'emulsione acidulata con acido acetico alla concentrazione di gr. mole 0,03 °/₀₀;

IV. Sotto la sua azione l'olio di mandorle dolci (dopo 48 ore ed alla temperatura di 31°-40° C) presenta un numero di acidità, espresso di mmgr. di KOH, talvolta superiore *al 3 °/₀*, ed un *numero di eteri* che discende sino a 150;

V. L'acido cloridrico, alla concentrazione di gr. mole 0,03 °/₀₀, attenua l'azione della lipasi dell'orzo germogliato;

VI. La temperatura ottima di azione è a *circa 45° C*, mentre quella di distruzione è a *circa 55° C.*

[1] V. Villavecchia, *Trattato di chimica analitica applicata*, vol. I, pag. 495, 1916.

[2] Id. ibid., pp. 500-502, 1916.

Patologia. — *Osservazioni istopatologiche sulla roseola del tifo esantematico* [1]. Nota del dott. Gaetano Bompiani, presentata dal Socio Ett. Marchiafava.

Nell'occasione dell'ultima epidemia di tifo esantematico, avutasi nella scorsa estate nei prigionieri di guerra e nella popolazione civile, ho studiato, per consiglio del prof. Marchiafava, le alterazioni istologiche delle roseole sulla traccia delle ultime ricerche di Fraenkel e degli autori che, dopo di lui, si occuparono dell'argomento.

Il Fraenkel pubblicò, nel gennaio 1914, le seguenti osservazioni: Ebbe a riscontrare costantemente nella roseola del tifo esantematico una alterazione saltuaria dei piccoli vasi cutanei consistente in rigonfiamenti o noduli, e alterazioni vasali diverse. Ritenne caratteristiche del processo morboso in parola le suddette lesioni, non avendole mai riscontrate, in ricerche perseguite per oltre un decennio, nello studio della cute di altre malattie infettive

I rigonfiamenti nodulari — secondo Fraenkel — ora occupano tutta la circonferenza del vaso, e appaiono come sferici, ora sono limitati ad una metà della circonferenza e formano rigonfiamenti semisferici. Corrispondono, come si rileva a forte ingrandimento, ad una infiltrazione della parete vasale con cellule tutte mononucleate, alcune del tipo dei piccoli linfociti, altre un po' più grandi, con corpo cellulare largo, rosso-chiaro, e nucleo più grande, alquanto « strutturato »; infine, cellule con nucleo picnotico e protoplasma abbondante, rosso-eosina.

A carico del vaso che attraversa il nodulo si nota, nei tratti ove la parete si rende visibile attraverso l'infiltrato un po' più rado, l'endotelio rigonfio, in qualche punto mancante, la muscolatura intatta, e, nel lume, un materiale amorfo finemente granuloso; in altri punti si trovano globuli rossi distinti.

I reperti degli autori che, specialmente in Germania, si occuparono dell'argomento, aggiungono alcuni dettagli riferentisi alla composizione cellulare dei noduli o alle alterazioni dei vasi; ma resta fondamentale il reperto di Fraenkel.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di anatomia patologica della R. Università di Roma (diretto dal prof. Ett. Marchiafava).

* * *

Prelevai il materiale che ho potuto utilizzare da dieci malati, osservati in vario periodo della malattia (8ª, 10ª, 15ª, 22ª e 27ª giornata), ai quali furono asportati frammenti di cute di varie parti del corpo (arti superiori, inferiori e parete addominale), o in vita, o subito dopo la morte. Ebbi cura di asportare, insieme col derma, sempre una zolla abbastanza profonda di sottocutaneo, perchè il vaso colpito dalla alterazione caratteristica può essere situato — come fa noto Fraenkel — anche profondamente nel sottocutaneo.

I pezzi furono fissati in varii liquidi fissatori e sottoposti in parte a tagli a congelazione, in parte inclusi e utilizzati per svariati metodi di esame.

Per un esame rapido le sezioni ottenute al congelatore, previa fissazione in formalina al 10 % per 24-48 ore, si prestano ottimamente allo scopo. Per lo studio istologico furono adottati i seguenti metodi: colorazione alla ematossilina-eosina, van Gieson, Weigert per le fibre elastiche, e Weigert per la fibrina; inoltre la colorazione di Unna-Pappenheim col verde di metile-pironina, quella col bleu policromo di Unna, e il metodo di Mallory per il connettivo.

* * *

Esporrò riassuntivamente — per quanto lo concede l'argomento — i risultati ottenuti dallo studio delle sezioni della cute, in varii periodi della malattia.

Nelle roseole di malati in 8ª, 10ª e 15ª giornata potei riconoscere, dopo alcune ricerche di orientamento, le alterazioni caratteristiche descritte da Fraenkel. Esse consistono in accumuli cellulari di varie dimensioni, di forma rotondeggiante o irregolarmente poligonali, localizzati attorno alla sezione di un vaso sanguigno che rimane per lo più eccentrico rispetto al nodulo.

Detti focolai si trovano più frequentemente nello strato reticolato del derma o al confine fra derma e sottocutaneo. Sono caratterizzati da elementi cellulari grandi, mononucleati, di forma rotondeggiante o poligonale, con protoplasma abbondante e nucleo ovale, pallido: ricordano le così dette cellule epitelioidi.

A carico dei nuclei di queste cellule ho potuto notare una certa irregolarità di forma (ora ovali, ora a contorno ineguale, talvolta lobati), e differenze di grandezza; è sempre notevole la loro povertà di cromatina; questa si trova per lo più distribuita in tre o quattro piccole masse nel nucleo vescicolare, e qualche volta raccolta in uno strato sottile contro la faccia interna della membrana nucleare, che ne disegna il contorno.

Frammisti in varia misura alle precedenti, ma sempre in minor quantità, trovansi elementi con nucleo piccolo rotondo, intensamente colorato (a

differenza dei precedenti), del tipo dei linfociti. Come cellule isolate possono ancora riscontrarsi nei noduli poche plasmacellule e qualche cellula poligonale con protoplasma abbondante, omogeneo, tinto uniformemente in rosa dall'eosina e nucleo ben colorabile.

Le alterazioni dei tratti di vasi, attorno ai quali si trova l'infiltrazione nodulare, verranno descritte complessivamente, dopo di avere enumerato i varii tipi morfologici che possono presentare gli infiltrati perivasali.

Infatti, oltre al reperto ormai classico di Fraenkel, e perciò soltanto brevemente ricordato, ho potuto osservare, nei miei preparati, noduli più piccoli che chiamerò a tipo linfoide, e noduli cicatriziali, fibrosi;] inoltre focolari più ampî di infiltrazione cellulare diffusa.

I noduli linfoidi e quelli fibrosi potei osservare in tagli di cute in stadî avanzati della malattia (22ª-27ª giornata).

I primi corrispondono a cumuli cellulari, di piccole dimensioni, rotondeggianti, e distribuiti sul decorso dei vasi cutanei più superficiali (strato papillare, e strati superiori della « pars reticularis »); sono costituiti per la maggior parte da cellule coi caratteri dei comuni linfociti. Negli stessi noduli ho osservato, solo in scarso numero, elementi dal nucleo fusato con estremi tozzi, disposti parallelamente all'asse longitudinale del vaso che attraversa il nodulo.

Nei secondi, cioè nei noduli fibrosi, prevalgono gli elementi a nucleo fusato. In essi è anche più manifesta la disposizione di tali elementi parallelamente all'asse longitudinale del vaso, in formazione di strati sovrapposti; i nuclei fusati, allungati, appaiono disposti quasi ad aspetto ondulato caratteristico.

Fra i due tlpi di noduli esistono forme di passaggio, e spesso si trovano le due sorta di noduli nello stesso preparato.

Sembra logico pensare che essi rappresentino un esito in guarigione dei noduli di Fraenkel che nella loro evoluzione subirebbero, dapprima, una semplificazione — per così dire — della loro costituzione morfologica, e successivamente una metamorfosi connettivale.

Il reperto di noduli fibrosi conferma una osservazione isolata di Fraenkel che vide la trasformazione connettivale di un nodulo, studiando la cute di un convalescente nel quale aveva provocato con la stasi la ricomparsa di roseole.

Ho rimandato in ultimo la descrizione dei focolai d'infiltrazione cellulare diffusa perchè a me sembra che morfologicamente siano da tenersi distinti dalle alterazioni nodulari suddescritte, anche se ad esse equivalenti. Infatti detti focolai occupano una estensione molto più ampia dei noduli ed hanno confini indistinti verso il tessuto circostante. Inoltre, non è sempre manifesto un rapporto loro con i vasi, trovandosi talora localizzati attorno alle ghiandole sudoripare, ai follicoli dei peli e, più raramente, alle ghian-

dole sebacee, indipendentemente dalla presenza di un vaso di un certo calibro.

A questi infiltrati hanno accennato vagamente alcuni autori (Paltauf), ma senza darne una descrizione dettagliata.

Nei preparati in cui mi è occorso osservarli — sempre nel periodo florido della malattia — potei notare che in quei focolai si ritrovano gli stessi elementi cellulari descritti da Fraenkel nei suoi noduli, ma con una proporzione assai più varia e diversa da caso a caso. A me sembra che in questi infiltrati diffusi il polimorfismo cellulare raggiunga il massimo sviluppo.

Elencherò i varii tipi cellulari:

a) e *b*) cellule del tipo dei linfociti e cellule grandi, mononucleate, a tipo epitelioide, già descritte, e costituenti la maggior parte degli elementi nei noduli di Fraenkel;

c) cellule fusiformi o stellate, a tipo fibroblastico, con nucleo ben tingibile, nucleolo distinto protoplasma raccolto ai poli del nucleo e terminante con estremi appuntiti;

d) plasmacellule tipo Unna-Marchalcò, talora tanto numerose da costituire l'elemento predominante dell'infiltrato;

e) piccoli nuclei, minori di quelli dei comuni linfociti, apparentemente liberi, già notati da Fraenkel nella sua prima comunicazione;

f) possono essere presenti infine rare cellule con protoplasma omogeneo colorato intensamente dall'eosina, e nucleo ben tingibile;

g) e rari leucociti polinucleati.

Come si è accennato, la proporzione in cui si trovano frammisti questi elementi cellulari nel focolaio è diversa da caso a caso, con varia prevalenza degli uni o degli altri.

*
* *

La descrizione delle alterazioni riscontrate nei vasi colpiti dal processo morboso collima in tutto con quelle date dagli autori.

Nelle arterie più piccole e nei precapillari si può rilevare il distaccarsi degli endotelii rigonfi dalla parete; riconoscibili nel lume come nuclei ovali, grandi, pallidi. Nell'interno del vaso sono presenti globuli rossi, quasi sempre stipati, distinti fra loro, oppure conglobati in una massa omogenea, amorfa, colorata in rosso dall'eosina e che non occupa tutto il volume vasale. Nessuna alterazione esiste manifesta a carico delle fibro-cellule muscolari.

I vasi di calibro un po' superiore, al centro di un nodulo, e particolarmente nella *pars reticularis*, possono dimostrare un restringimento del lume e l'ispessimento delle pareti risultanti di strati nucleati concentrici, nei quali non è più possibile una distinzione delle varie tuniche: il lume è per lo più libero.

Nelle arterie di maggior calibro, al confine tra derma e ipoderma, può riscontrarsi l'alterazione descritta da Fraenkel, cioè la lesione di un solo settore della circonferenza del vaso, e, per lo più, di quello rivolto verso la la parte ampia dell'infiltrato. L'endotelio è spesso rigonfio, sollevato o distaccato dalla parete; in alcuni tratti è mancante. La membrana elastica interna è ben conservata, ciò che ha importanza diagnostica — come fa notare il Bauer — per distinguere il processo in parola dall'arteriosclerosi dei piccoli vasi, in cui al contrario si verifica la moltiplicazione degli elementi elastici e il loro reciproco allontanamento. La tunica muscolare è sana, nè si notano infiltrati cellulari o depositi di fibrina nello spessore delle pareti.

In due roseole potei riscontrare una trombosi parietale costituita da una massa omogenea, colorata in rosa dall'eosina, a figura di mezzaluna, che colpiva un solo settore del vaso. Trattavasi verosimilmente di trombi da agglutinazione di globuli rossi. In un altro caso il trombo era invaso da elementi del tipo di fibroblasti giovani, isolati e non numerosi, e vi notai la presenza di una cellula gigante.

Si può pensare a processi di sostituzione e organizzazione di detti trombi; ma non mi fu dato colpire, con i tagli, tratti in cui fosse dimostrabile il processo di cicatrizzazione avvenuto.

Dalla descrizione delle lesioni vasali, semplicemente degenerative, si rileva, ancora una volta, come la somiglianza del processo descritto dal Fraenkel, con la « periarterite nodosa » di Kussmaul e Maier, sia del tutto superficiale; ciò che affermò per il primo lo stesso Fraenkel.

* * *

Da ultimo riferirò sul comportamento del tessuto connettivo e del tessuto elastico in corrispondenza dei noduli e degli infiltrati. Ho portato speciale cura a tale studio, non risultandomi che vi si sia particolarmente soffermata l'attenzione degli AA.

Trattando tagli di cute, ottenuti il più possibilmente sottili, con il metodo di Mallory per il connettivo, si può mettere in evidenza, tra gli elementi cellulari dei focolai, un reticolo a fibre delicatissime, racchiudente in ogni maglia una singola cellula. Le esili fibre del reticolo si continuano, alla periferia del focolaio, con i fascetti del tessuto connettivo fibrillare circostante.

Trattasi, con ogni verosimiglianza, di quel tessuto « reticolare », che può originarsi anche nell'adulto per suddivisione delle fibre grossolane del connettivo in fibre sempre più sottili, per la penetrazione tra essi degli elementi di infiltrazione e di neoformazione.

Nell'infiltrato dei noduli floridi manca sempre il tessuto elastico o, vi è soltanto rappresentato da qualche frammento di fibra. Gli elementi elastici del corion si arrestano alla periferia del focolaio.

Negli stessi preparati, utilizzati per lo studio del comportamento del tessuto elastico nei focolai di infiltrazione, mi sembra certa la esistenza di una alterazione abbastanza evidente del reticolo elastico sottoepidermico. Questo finissimo intreccio di fibrille elastiche presenta, osservandolo in corrispondenza di tratti di pelle colpiti da roseola, aspetto di discontinuità per zone di estensione varia. Ivi gli elementi costituenti il reticolo appaiono dapprima diradati e meno tingibili, fino a non rimanerne che tracce o a scomparire completamente. In corrispondenza di tali alterazioni dell'elemento elastico, il connettivo appare edematoso, e, a qualche distanza, in profondità, dalla zona del reticolato si trovano spesso presenti comuni elementi d'infiltrazione.

*
* *

Accanto alle osservazioni istologiche, ora ricordate, ho praticato esami batterioscopici nelle sezioni di cute per ricercarvi la eventuale presenza di parassiti, ma con esito negativo. Adoperai, per l'esame, i metodi di Cram, di Giemsa e di Levaditi per l'impregnazione argentica.

Inoltre tentai, per analogia a quanto si conosce per il *virus* vaccinico, di impiantare sulla cornea di conigli il succo ottenuto per scarificazione delle roseole. Non potei rilevare, neppure in questa seconda ricerca, alterazioni della cornea, in forma di inclusioni o di altra natura. Ma — poichè a me non consta che tale tentativo sia stato sinora eseguito da altri — ripetuto con più abbondante materiale e in condizioni, perciò, più svariate di esperimento, esso potrebbe forse condurre ad apprezzabili risultati.

*
* *

Volendo riassumere, a guisa di conclusioni, le osservazioni fatte, può dirsi che:

1) Esse confermano pienamente il reperto di Fraenkel, abbastanza caratteristico perchè debba essergli ormai attribuito pieno valore diagnostico, in uno ai sintomi clinici della malattia;

2) Nel periodo florido della malattia possono riscontrarsi, oltrechè i noduli tipici descritti da Fraenkel, ampî focolai di infiltrazione diffusa di composizione cellulare caratteristica e per lo più in rapporto con un vaso;

3) Fu constatata la coesistenza di nodi linfoidi e di nodi fibrosi in periodi avanzati di malattia (22ª-27ª giornata);

4) Degno di nota è lo speciale comportamento, caratteristico, del tessuto connettivale e del tessuto elastico in corrispondenza dei focolai d'infiltrazione nodulare. Di più sembra certa l'esistenza di una particolare alterazione del reticolo elastico sottoepidermico nella roseola del tifo esantematico.

Fisiologia. — *Sulla funzione di secrezione interna restauratrice della mucosa intestinale durante la digestione e l'assorbimento dei lipoidi* [1]. Nota di Clementi A., presentata dal Corrisp. S. Baglioni.

Mentre lo studio del problema della digestione e dell'assorbimento intestinale dei grassi comuni ha ricevuto nell'ultimo cinquantennio il più valido e fecondo ausilio dall'impiego di metodi istochimici, *manca finora la dimostrazione chimica o istochimica diretta dell'assorbimento intestinale dei lipoidi alimentari* [2]. Mi sono proposto colle presenti ricerche di colmare tale lacuna mediante lo studio citochimico della mucosa intestinale, applicando qualcuno dei metodi istochimici elaborati recentemente per la ricerca dei lipoidi intracellulari, in speciali condizioni di dieta, nella speranza di contribuire per questa via anche alla soluzione del problema riguardante l'*intimo meccanismo dell'assorbimento intestinale dei lipoidi.*

Circa il meccanismo dell'assorbimento intestinale dei lipoidi fosforati, di cui il rappresentante tipico è la lecitina, esistono tra gli autori divergenze di pareri; alcuni sostengono la teoria della emulsione, cioè a dire negano che la lecitina venga scissa dai fermenti lipolitici intestinali e sostengono che venga assorbita come tale allo stato di finissima emulsione (Stassano e Billon, Kalaboukoff e Terroine); altri AA. sostengono la teoria della soluzione, cioè a dire affermano che la lecitina sia scissa dai fermenti del tubo gastro-enterico (Bokay, Slowtzow, Schumow-Simanowski e Sieber, Majer, Clementi) e siano assorbiti dalla mucosa intestinale i suoi prodotti di scissione solubili. Mentre si discute sull'assorbimento intestinale della lecitina, manca finora la *dimostrazione sperimentale diretta,* dell'assorbimento dei fosfatidi alimentari in genere e della lecitina in ispecie da parte della mucosa intestinale. Per risolvere quest' ultimo quesito e per contribuire alla soluzione del problema riguardante la forma sotto cui la lecitina è assorbita dalla mucosa intestinale, mi è sembrata importante la ricerca istochimica; infatti, se con metodi, che mettono in evidenza i fosfatidi, si può studiare e seguire l'assorbimento di essi attraverso la mucosa intestinale, è logico prevedere la possibilità di mettere in evidenza fatti nuovi, che parlino a favore dell'una o dell'altra teoria circa l'assorbimento intestinale dei fosfatidi e servano a risolvere un problema la cui soluzione si è lasciata attendere per molti anni e che, oltre ad avere importanza fisiologica, interessa la fisiopatologia e la farmacologia.

La conoscenza della distribuzione delle sostanze lipoidi nei tessuti e negli organi in condizioni normali e patologiche è molto progredita dopo che furono elaborati ed ap-

[1] Ricerche eseguite nell'Istituto di anatomia e fisiologia comparata della R. Università di Catania e nell'Istituto di fisiologia umana della R. Università di Roma.

[2] È bene tenere presente che con la denominazione di lipoidi, io intendo riferirmi specialmente ai lipoidi fosforati (lecitina, cruorina, neottina ecc.), escludendo non solo gli eteri della glicerina, ma anche le sterine o eteri della colesterina.

plicati metodi chimici e microchimici specifici per la ricerca dei lipoidi, Il *metodo di Ciaccio* è certamente il più attendibile metodo microchimico, che possediamo finora, per per la ricerca dei lipoidi intracellulari; i diversi AA. che si sono occupati dello studio della specificità del metodo Ciaccio (Kaiserling, Kasarinoff, Kawamura, Bell, Rocchi, Biondi) sono concordi nell'ammettere che esso serve a mettere in evidenza i lipoidi (con questa denominazione intendendo i lipoidi fosforati o fosfatidi e i cerebrosidi), mentre non mette in evidenza certamente gli eteri della glicerina (grassi neutri) e gli eteri della colesterina (sterine); la sola eccezione sarebbe rappresentata dall'acido oleico libero, il quale, se la cromizzazione è prolungata, può essere messo in evidenza dal metodo Ciaccio. Applicando il metodo Ciaccio, sono state eseguite numerose ricerche circa la presenza e la distribuzione dei lipoidi negli organi e nei tessuti più svariati (Ciaccio). Nessun A., che io mi sappia, ha finora studiato la distribuzione dei lipoidi nella mucosa intestinale, anche astraendo dalla funzione di assorbimento della medesima; da questo punto di vista le mie ricerche vengono a colmare anche una notevole lacuna per quanto si riferisce alla conoscenza della distribuzione dei lipoidi intracellulari.

Nelle mie ricerche, come animali di esperimento furono adoperati gattini da poco tempo slattati. La ragione per cui fu scelto questo mammifero è duplice: anzitutto, data la difficoltà nota che presenta la fissazione e la sezione dell'intestino, è preferibile scegliere animali di piccole dimensioni; d'altra parte è preferibile scegliere un vertebrato abituato alla dieta di alimenti grassi e lipoidi. Queste condizioni sono presentate dai gattini di pochi mesi di età e da poco tempo slattati.

Fu studiata la mucosa intestinale del tratto duodeno-digiunale di gattini tenuti a digiuno incompleto, di gattini alimentati con solo pane, di gattini alimentati con olio di uliva e di gattini alimentati con vitello di uovo di pollo.

Gli animali alimentati furono sacrificati alcune ore dopo l'ingestione degli alimenti determinati. I pezzi furono fissati e colorati nella massima parte secondo il metodo Ciaccio 1° per la colorazione dei lipoidi e secondo il metodo Ciaccio 3° per la colorazione dei grassi e dei lipoidi alcuni furono trattati anche secondo il metodo di fissazione Benda.

Dallo studio dei preparati ottenuti nelle condizioni sperimentali succennate fissati e colorati secondo il metodo Ciaccio, sono risultati a carico della mucosa intestinale dei gattini i seguenti fatti principali:

1. Durante il digiuno, formazioni e inclusi di natura lipoidea (fosfatidi), rilevabili col metodo Ciaccio, mancano nel citoplasma delle cellule epiteliali del villo intestinale, nel chilifero centrale e nel citoplasma degli elementi cellulari dello stroma del villo, eccettuati alcuni speciali elementi cellulari, che sono stati descritti dal Ciaccio nel connettivo in genere col nome di cellule lecitiniche, aventi forma irregolare e protoplasma infarcito da fini granulazioni di colore rosso-arancio.

2. Nell'alimentazione protratta con pane, si può rilevare la presenza di materiale lipoide nelle cellule epiteliali del villo, materiale il quale si presenta sotto l'aspetto di scarsi granuli sferoidali di colore rosso-bruno, con predominante e caratteristica disposizione nella zona sottonucleare del citoplasma, lungo la membrana basale della cellula.

3. Dopo la ingestione, e durante la digestione di vitello d'uovo (il quale, come è noto, possiede una percentuale altissima di fosfatidi in genere

e di lecitine in ispecie), si può seguire l'assorbimento dei lipoidi attraverso gli elementi costituenti la mucosa intestinale. Nel lume intestinale si constata la presenza di materiale lipoide in forma di globuli e di ammassi lipoidi di varia grandezza. Nella cellula epiteliale villare si ha un quadro citochimico caratteristico, consistente nella mancanza assoluta di materiale lipoide nella cuticula striata e nel terzo esterno del citoplasma; mentre, a cominciare da una linea parallela alla cuticula striata trovantesi a una distanza intermedia tra cuticula striata e nucleo, il protoplasma, con netto e brusco distacco rispetto al terzo esterno, si presenta completamente infarcito da una grandissima quantità di materiale lipoide sino al polo esterno del nucleo e in alcuni casi lateralmente ed anche inferiormente ad esso, sotto l'aspetto di gra nuli e di globuli di colore rosso-arancio intenso, di dimensione svariatissima (dai granuli finissimi, appena percettibili al microscopio, fino ai globuli di volume doppio di quello di un comune nucleolo).

Questo quadro caratteristico e costante si può spiegare ammettendo che la molecola dei fosfatidi è scissa nel lume intestinale e che nell'interno del protoplasma delle cellule epiteliali del villo intestinale del gatto, a cominciare da una linea equidistante dalla cuticula del polo esterno del nucleo, ha luogo la ricostituzione sintetica della molecola primitiva dei fosfatidi.

Si verrebbe così ad avere nella cellula epiteliale villare una distinzione fra zona mitocondriale esterna (corrispondente al terzo esterno del citoplasma secondo Champy e Corti), e zona in cui appare il prodotto della attività sintetica cellulare esercitata sui costituenti della molecola lipoidea assorbiti, analoga a quella rilevata dagli AA. nelle cellule secernenti delle comuni ghiandole tra zona mitocondriale esterna e zona in cui si accumula il prodotto della attività secretiva prima di essere escreto; tale disposizione rappresenta un nuovo dato citologico a favore della dottrina, che identifica la funzione di assorbimento della cellula intestinale villare a quella di una cellula secernente.

4. Nel chilifero centrale del villo e nei capillari sanguigni del villo dei gattini sacrificati alcune ore dopo l'ingestione di vitello d'uovo, si può constatare la presenza di materiale lipoide in forma di ammassi globosi e di granulazioni di colore rosso-arancio o rosso-bruno, che infarciscono anche il lume dei vasi degli spazi connettivali interposti fra le ghiandole di Galeati e il lume dei vasi della sottomucosa. Questo fatto dimostra che le vie di assorbimento dei lipoidi alimentari non sono solo le vie linfatiche, ma anche le vie sanguigne. Le cellule migranti presenti nell'epitelio villare non lasciano rilevare in genere nel loro citoplasma inclusi di materiale lipoide, per cui si deve conchiudere che esse non partecipano al trasporto del materiale lipoide assorbito.

5. Dopo l'ingestione di olio di oliva nella stessa zona del protoplasma della cellula epiteliale villare, in cui si rileva la presenza di materiale

lipoide durante l' alimentazione con vitello d' uovo, sotto la forma di granuli e di globuli colorati in rosso-arancio intenso, si possono notare, nei preparati trattati col primo metodo Ciaccio, delle sferule circolari o di forma ovoidale incolori (grassi neutri), e nei preparati trattati secondo il terzo metodo Ciaccio si rilevano granuli finissimi e globuli colorati in nero o in caffelatte tendente al nero (grassi), mentre la metà esterna della zona sopranucleare del protoplasma è priva di granuli neri o di sferule incolori. Questo reperto rappresenta una conferma indiretta della natura lipoide dei granuli rilevati nelle cellule epiteliali villari durante l'alimentazione lipoidea, rispondendo ad una possibile obbiezione circa la non assoluta specificità del metodo Ciaccio per la colorazione dei lipoidi.

6. Durante la dieta grassa e durante la dieta lipoidea si può constatare la presenza di materiale lipoide o di grasso nel citoplasma delle cellule epiteliali delle ghiandole del Galeati, sotto l'aspetto di granuli o di globuli sferoidali di dimensioni uguali a quelle di un comune nucleolo disposti specialmente lungo la membrana basale della cellula al di sotto del nucleo. Tra le cellule epiteliali fondamentali si trovano cellule speciali, caratterizzate dalfatto che il loro citoplasma è infarcito da fittissime granulazioni aventi volume minore di quello di un comune nucleolo e differenti dai comuni granuli lipoidi osservati nella maggioranza delle cellule, per la loro colorazione grigio-verdastra.

7. La presenza delle cosiddette lacune di Grünhagen e i distacchi dell'epitelio dallo stroma appaiono più frequenti nei preparati degli animali sacrificati durante il periodo della digestione, che non in quelli sacrificati in periodo di digiuno; ma nessun rapporto è dato stabilire tra la loro presenza e lo stato di attività assorbente in cui si trovano le cellule epiteliali del segmento corrispondente del villo rispetto al materiale lipoide e al grasso assorbito.

L'insieme dei risultati delle ricerche surriferite rappresenta la dimostrazione diretta, la quale finora mancava, che i lipoidi fosforati o fosfatidi introdotti nel tubo gastro-intestinale quale alimento sono assorbiti e si ritrovano nei vasi linfatici e nei vasi sanguigni della mucosa intestinale e ci inducono ad ammettere, che attraverso la cuticula striata e attraverso la metà esterna della zona sopranucleare del citoplasma delle cellule epiteliali del villo intestinale dei gattini passano i prodotti della scissione idrolitica della molecola dei fosfatidi, la quale viene ricostituita nell'interno del citoplasma delle cellule epiteliali villari e più specialmente nella metà interna della zona sopranucleare.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente Ròiti apre la seduta dando la luttuosa notizia delle gravissime perdite da cui è stata colpita l'Accademia colla morte dei Colleghi, professori Vincenzo Reina ed Elia Millosevich, Segretari entrambi della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali; il primo dall'anno corrente e il secondo sino dal 1906. Moriva il primo in Como, dopo lunga malattia, il 9 dello scorso novembre, e mancava il secondo per violento morbo il 5 corr. Il Presidente menziona con affettuose parole le benemerenze dei due illustri scienziati che dedicarono la propria costante attività al bene dell'Accademia; e dopo aver ricordato che ai funerali del prof. Reina l'Accademia fu rappresentata dai Colleghi Somigliana e Fantòli, tra il consenso unanime dei Colleghi propone l'invio delle condoglianze più vive alla famiglia del compianto prof. Millosevich.

Il Socio Castelnuovo pronunzia le seguenti parole:

« Avevo intenzione di aggiungere qualche parola in memoria di Vincenzo Reina a cui mi legava amicizia fraterna da quasi trent'anni. La nuova e grave perdita che l'Accademia ha subìto in questi giorni nella persona di Elia Millosevich mi induce ad associare i due nomi ed a ricordarli insieme innanzi a voi. Molte affinità li univano. Cultori della stessa disciplina, appassionati della scienza, anzi di ogni forma di cultura, erano entrambi modesti, scrupolosi nell'adempimento del dovere, disposti sempre a sacrificare ogni interesse personale per il bene delle istituzioni affidate alle loro cure: cuori nobilissimi, caratteri integri, esigentissimi verso sè stessi, indulgenti cogli altri. La loro scomparsa quasi simultanea ci addolora e ci sgomenta. L'Italia non è oggi così ricca di alti cultori della scienza da rendere agevole la sostituzione di chi ci abbandona con chi è destinato a succedergli. D'altra parte, nell'inquieto periodo che attraversiamo, in mezzo allo scatenarsi di tanti egoismi, riesce anche più doloroso veder sparire questi uomini che colla loro vita austera ci offrivano continuo esempio di altruismo e di devozione ai più alti interessi della scienza, della scuola e della società.

« Ed ora vorrei trasmettere all'Accademia un voto che il prof. Millosevich mi esprimeva un anno fa, appena riavutosi da una grave malattia che ci aveva tenuti in ansia per molti giorni.

« Il prof. Millosevich mi faceva notare le infelici condizioni dell'Osservatorio del Collegio Romano e mi diceva che il suo più vivo desiderio era

che sorgesse sul Monte Mario un grande osservatorio degno di Roma, nel quale potrebbero venir riuniti gli strumenti dei due attuali osservatorî del Collegio Romano e del Campidoglio.

« Io vorrei che l'Accademia accogliesse questo voto e ne sostenesse la realizzazione presso il ministro, ottenendo sin da ora che il terreno sulla vetta del colle venisse riservato a questo scopo.

« L'Accademia, promovendo la costruzione del nuovo Osservatorio, renderebbe un grande servizio alla scienza ed eleverebbe alla memoria del nostro caro collega il monumento più ambìto ».

Il Presidente Ròiti, coll'approvazione della Classe, dichiara che l'Ufficio di Presidenza farà tutte le pratiche necessarie perchè il voto del compianto Collega venga esaudito.

Lo stesso Presidente partecipa un'altra perdita che deve deplorare la Classe, nella persona del Socio straniero prof. Adolfo Hurwitz, mancato ai vivi il 18 novembre 1919; apparteneva il defunto all'Accademia, per la *Matematica*, sino dal 27 luglio 1913.

Dà poi comunicazione dei ringraziamenti inviati per la loro recente elezione, dai Corrispondenti Berzolari e Dainelli, e dal Socio straniero Omori.

Il Presidente informa la Classe che in occasione del Congresso internazionale di Fisiologia che si terrà prossimamente a Parigi, è stato invitato a pronunciare il discorso inaugurale il Socio sen. Fano; e si compiace di tale designazione che torna ad onore del Collega e dell'Accademia.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

G. L. Sera. *Sui rapporti della conformazione della base del cranio colle forme craniensi e colle strutture della faccia nelle razze umane.* Pres. dal Segretario.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Pirotta, a nome anche del Socio Mattirolo, legge una relazione colla quale si propone la inserzione nei volumi accademici della Memoria del prof. O. Munerati, intitolata: *Osservazioni e ricerche sulla*

barbabietola da zucchero. La proposta della Commissione esaminatrice, messa ai voti dal Presidente, è approvata dalla Classe, salvo le consuete riserve.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio PIROTTA, che funge da Segretario, fa omaggio, a nome del Corrisp. LUSTIG, dell'opera: *Il dermotifo o tifo esantematico.* Fa poi particolare menzione di quattro volumi delle *Opere di Evangelista Torricelli*, edite in occasione del 3° centenario della nascita, col concorso del Comune di Faenza, da GINO LORIA e GIUSEPPE VASSURA. Il Socio PIROTTA aggiunge che il Corrisp. LORIA ha trasmesso una sua Nota riguardante questa pubblicazione [1].

[1] V, pag. 409.

R. P.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 7 dicembre 1919.

Il progetto Beretta-Maiocchi per la via d'acqua di grande navigazione Milano-Lago di Como. Milano, 1918. 4°, pp. 1-35.

LUSTIG A. — Il dermotifo o tifo esantematico. Milano, 1919. 8°, pp. 1-125.

MELI R. — Notizie preventive intorno a resti di mammiferi trovati nelle ligniti della Sabina (Estr. dagli « Atti della Pontificia Accademia Romana dei Nuovi Lincei »). Roma, 1919. 4°, pp. 1-6.

MELI R. — Notizie sismo-geologiche su Soriano Calabro (Estr. dagli « Atti della Pontificia Accademia Romana nei Nuovi Lincei »). Roma, 1918. 4°, pp. 1-5.

MELI R. — Presentazione di un raro opuscolo sul terremoto, risentito il giorno 11 giugno 1751 a S. Gemini, Cesi e Teria nell'Umbria (Curiosità bibliografiche) (Estr. dagli « Atti della Pontificia Accademia Romana dei Nuovi Lincei »). Roma, 1918. 4°, pp. 1-4.

MELI R. — Raccolte di carte geografiche, incise nella seconda metà del sec. XVI, possedute dalla Biblioteca Alessandrina di Roma (Estr. dal « Bollettino della R. Società Geografica Italiana », anno 1918). Roma, 1918. 8°, pp. 1-15.

MELI R. — Sopra alcune impronte di Pteris aquilina Linn. nel tufo laziale della Villa Torlonia a Frascati (con indicazioni bibliografiche sulla Cava sperone) (Estr. dagli « Atti della Pontificia Accademia Romana dei Nuovi Lincei »). Roma, 1919. 4°, pp. 1-16.

TORRICELLI EV. — Le opere di Ev. T. pub-

blicate da G. Loria e G. Vassura: vol. I, parte 1ª e 2ª; II e III. Faenza 1919. 8°, pp. I-XXXVIII, 1-407; 1-482; 1-320; 1-521.

WASHINGTON H. S. — A feldspar from Linosa and the existence of soda anorthite (carnegieite) (From the « American Journal of Science », volume XXIX, pp. 31-70). New-Haven, 1910. 8°.

WASHINGTON H. S. — A suggestion for mineral nomenclature (From the « American Journal of Science », vol. XXXIII, pp. 137-151). New-Haven, 1912. 8°.

WASHINGTON H. S. — Augite from Stromboli (From the « American Journal of Science », vol. XLV, pp. 463-469). New-Haven, 1918. 8°.

WASHINGTON H. S. — Contributions to the geology of New Hampshire: III, On red hill, Moultonboro (From the « American Journal of Science », vol. XXIII, pp. 257-447). New Haven, 1907. 8°.

WASHINGTON H. S. — Magnetite basalt from North Park, Colorado (Repr. from « The Journal of the Washington Academy of Science », vol. III, pp. 449-452). Washington, 1913. 8°.

WASHINGTON H. S. — Note on the forms of Arkansas diamonds (From the « American Journal of Science », vol. XXIV, pp. 275-276). New Haven, 1907. 8°.

WASHINGTON H. S. — Persistence of vents at Stromboli and its bearing on volcanic mechanism (Repr. from the « Bulletin of the Geological Society of America », vol. XXVIII, pp. 249-278). New Haven, 1917. 8°.

WASHINGTON H. S. — Present condition of the volcanoes of southern Italy (Repr. from the « Bulletin of the Geological Society of America », vol. XXVI, pp. 375-388). New Haven, 1915. 8°.

WASHINGTON H. S. — Some lavas of monte Arci, Sardinia (From the « American Journal of Science », vol. XXXVI, pp. 577-590). New Haven, 1913. 8°.

WASHINGTON H. S. — The Catalan volcanoes and their rocks (From the « American Journal of Science », vol. XXIV, pp. 217-242). New Haven, 1907. 8°.

WASHINGTON H. S. — The constitution of some salic silicates (From the « American Journal of Science », vol. XXXIV, pp. 555-571). New Haven, 1912. 8°.

WASHINGTON H. S. — The distribution of the elements in igneous rocks. New Haven, 1908. 8°, pp. 1-30.

WASHINGTON H. S. — The volcanic cycles in Sardinia (Congrès géologique international, Canada, 1913). s. l., 1913. 8°, pp. 1-11.

PERSONALE ACCADEMICO

MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

RELAZIONI DI COMMISSIONI

PRESENTAZIONE DI LIBRI

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Seduta del 7 dicembre 1919.

(Segue in terza pagina)

E. Mancini *Segretario d'ufficio responsabile.*

(*) Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Pubblicazione bimensile. **N. 12.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXVI.

1919

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 dicembre 1919.

Volume XXVIII.° — Fascicolo 12°
e Indice del volume.

2° Semestre.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI
PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1919

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili del l'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 9 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a pagine 4 $^1/_2$.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 30 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta a stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta, pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 50 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 30 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 dicembre 1919.

F. D'Ovidio, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Geologia. — *Titonico e Cretacico nell'isola di Capri: revisione dei fossili dei calcari coralligeni.* Nota del Socio C. F. Parona.

Nel 1905 riassumevo una mia contribuzione alla fauna dei calcari di Capri [Rend. Lincei, XIX (1°), pag. 69] con queste parole: « Allo stato attuale delle nostre cognizioni, mentre dobbiamo riconoscere la presenza di fossili di tipo titonico, dobbiamo inoltre ritenere, se non accertato, probabile assai, anche per quanto abbiamo detto sui rapporti fra il Titonico superiore ed il Neocomiano, che in parte la serie dei calcari con ellipsactinidi di Capri sia realmente titonica ».

In seguito i professori De Angelis e Airaghi estesero lo studio paleontologico, rispettivamente, ai corallarî ed agli echinodermi, illustrando un insieme di forme prevalentemente infracretaciche; e più tardi i professori De Lorenzo e Rovereto trattarono e discussero le questioni tectoniche. Al Rovereto poi e al prof. Bellini dobbiamo interessanti notizie sui giacimenti fossiliferi e sui rapporti loro e successione stratigrafica [1].

[1] C. Airaghi, *Echinod. infracret. dell'is. di Capri*, Riv. ital. di paleont., XI, 1905; G. De Angelis d'Ossat, *I coralli del calc. di Venassino* (*is. di Capri*), Mem. R. Acc. sc. Napoli, XII, 1905; G. Rovereto, *L'is. di Capri* (*stud. di geomorfol.*, VII), Genova, 1908; G. De Lorenzo, *L'isola di Capri*, Rend. R. Acc. Lincei, 1907. XVI; R. Bellini, *Stud. sint. sulla geol. dell'is. di Capri*, Atti soc. ital. sc. nat., Milano, LV, 1916.

La Nota del Bellini, che è la più recente e riassuntiva per la trattazione della cronologia dei calcari di Capri, prospetta come segue le conoscenze attuali e le deduzioni che se ne possono trarre:

« O nel calcare di Capri è compreso anche il piano titonico, essendo questo collegato al superiore (Parona); o s'accetta l'idea del Di Stefano sulla derivazione dei calcari urgoniani di Capri da preesistenti titonici (immissione di rimaneggiati fossili titonici in calcari sicuramente cretacei, secondo l'espressione del De Lorenzo); o si ammette che le specie titoniche, neocomiane ed urgoniane abbiano avuto una persistenza maggiore di quella generalmente ammessa (Rovereto) ».

Il dubbio sulla reale esistenza di banchi effettivamente titonici alle base della massa dei calcari di Capri non è dunque finora risolto; è però io ritengo opportuno di riprendere in esame la questione, colla scorta dei risultati ottenuti dallo studio dei numerosi fossili, che si raccolsero in questi ultimi anni.

La revisione della fauna di Capri mi fu possibile coll'esame della ricca collezione del museo geologico universitario di Napoli, cortesemente favoritami in esame per consenso del senatore prof. De Lorenzo e per interessamento del prof. G. D'Erasmo. È formata da materiali raccolti in piccola parte dal Karsten, dall'Oppenheim e dal Bassani e per grandissima parte dal sig. dott. I. Cerio, che la donò al museo, aggiungendo così nuova e segnalata benemereuza alle altre già acquistate verso la scienza colle appassionate sue ricerche nell'Isola. Altri materiali pregevoli io ebbi dallo stesso dott. Cerio e dai colleghi Rovereto e Bellini: a tutti questi signori esprimo la più viva riconoscenza [1].

Presento subito gli elenchi delle forme riconosciute, ripartendole nelle divisioni stratigrafiche alle quali appartengono cronologicamente; e, perchè si veda a colpo d'occhio l'entità di questo nuovo contributo alla paleontologia caprense, scrivo in corsivo i soli nomi delle forme, l'esistenza delle quali già era stata segnalata per i calcari di Capri. Dal confronto fra le faune successive risalta ad evidenza la prevalenza del Neogiurassico, costituente una ricca complessa omogenea fauna schiettamente titoniana, che toglie ogni dubbio

[1] Non pochi fossili di questa collezione restano indeterminati, perchè troppo malconservati, o perchè non riferibili a specie a me note, probabilmente nuove, ad ogni modo attribuibili a generi con significato non caratteristico nel riguardo cronologico. Molti di questi fossili sono provenienti da Venassino, altri da Capo di Sopra, qualcuno da Scoglio di Faro; di molti non è indicato il punto preciso di provenienza. Queste indicazioni non dànno per altro elementi utili per l'attribuzione dei giacimenti all'uno o all'altro livello stratigrafico. Nè maggior profitto ebbi, a questo proposito, dalle rinnovate ricerche sui foraminiferi: oltre alle ooliti a miliolidi, posso segnalarne altre nelle quali invece si presentano abbondanti le textularie. Così resta incerto se la *Linoporella capriotica* (Opp.), non rara specialmente nel calcare brecciato, spetti al Titonico piuttosto che al Cretacico, o se, come parmi più probabile, sia comune al Titonico e agli orizzonti urgoniani.

sulla reale esistenza in Capri di strati di età titoniana. Certe forme sono di costituzione troppo delicata e di conservazione troppo difficile perchè si possa supporre che si trovino nel calcare infracretacico come fossili rimestati, pur non escludendo che altri più resistenti abbiano subìto questa sorte e pur ammettendo che qualche forma titoniana sia sopravvissuta nel più antico Cretacico.

Titonico. — Prosopon oxythyreiforme Gemm.; Galathea entecta Moericke; Palaeastacus sp.?; Eryma sp.

Perisphinctes colubrinus (Reinecke); Phylloceras ptychoicum (Quenst.); Nautilus sp. (cfr. N. siculus Gemm.).

Acteonina amygdaloides Zitt., Act. utriculum Gemm., Act. Picteti Gemm.; Purpuroidea striata Zitt., Purp. Tschani (Oost.) Gemm., Purp. Lapierrea (Buv.) Gemm.; Bachytrema superba Zitt.; Petersia nebrodensis Gemm., Pet. costata Gemm., Pet. vitrix (Zitt.); Cypraea Gemmellaroi Di Stef., Cypr. tithonica Di Stef.; Alaria porrecta Zitt; Cerithium cochleoides Zitt., Cer. Suessi Gemm., Cer. Zeuschneri Gemm., Cer. euracense M. Gemm., Cer. forojuliense Pirona, Cer. (Ditretus) nodoso-striatum Peters, Cer. (Ditr.) pagoda Zitt., Cer. (Nerineopsis?) climax Zitt., Cer. (Terebrella) involvens Zitt.; Cerithiella brevis Zitt.; Nerinea Vosinskiana Zeuschn., Ner. bicostata Gemm., Ner. Lorioli Zitt., Ner. affinis Gemm., Ner. Zeuschneri Peters, Ner. Mojsisovichsi Gemm.?, Ner. (Endiatrachelus) subcylindrica d'Orb.; Ptygmatis *carpatica* (Zeuschn.), Ptygm. baculiformis (Gemm.), Pt. excavata (Gemm.), Pt. quinqueplicata (Gemm.), Pt. *Schloenbachi* (Gemm.), Pt. Clio (d'Orb.); Nerinella Taramellii (Pirona); Aptyxiella inornata (d'Orb.)?; Itieria Cabanetiana (d'Orb.); Phaneroptyxis Renevieri (de Loriol), Ph. Moreana (d'Orb.), Ph. obtusiceps (Zitt.), Ph. Catulloi (Gemm.), Ph. decipiens (Pir.), Ph. melanioides (Zitt.); Criptoplocus pyramidalis (Münst.) (C. pachyptyca Cossm.), Cr. (?) Zitteli Gemm.; Rissoina amoena Zitt.?; Purpurina incrassata Zitt.; Turritella tithonica Gemm.?; Pileolus minutus Zitt., Pil. siculus Gemm., Pil. imbricatus Gemm., Pil. granulatus Gemm., Pil. aequicostatus Gemm. (Di Stef.), Pil. problematicus (Zitt.) (non Patella), Pil. politus Gemm. (Di Stef.); Nerita sulcatina Buv. (Gemm.), Ner. Spadae Gemm.; Trochus (Calliostoma) elymum M. Gemm., Tr. (Call.) Massalongoi Gemm., Tr. (Tectus) fraternus Zitt., Tr. (Tect.) crassiplicatus Etall., Tr. (Tect.) Beyrichi Zitt., Tr. cfr. daedalus d'Orb. (De Loriol); Turbo Bonjuri Etall.?, Turb. (Sarmaticus) stephanophorus Zitt.; Ditremaria granulifera Zitt.?, Ditr. gracilis Zitt.; Scuria oxyconus Zitt.

Diceras arietinum Lmk., *Dic.* (Heterodic.) *Luci* Defr., Dic. (Plesiod.) valfinense Boehm.; Matheronia (Monnieria) Romani Paquier?; Astarte Damesi Boehm.?; Pecten Nebrodensis Gemm. et Di Blas., Pect. anastomoplicus Gemm. et Di Blas., Pect. Catulloi Gemm. et Di Blas., Pect. tithonius Gemm. et Di Blas.; Ostrea (Alectryonia) rostellaris Münst.

Rhynchonella capillata Zitt.; Terebratula moravica Glock., Ter. pseudolagenalis Mösch., Ter. pseudobisuffurcinata Gemm.

Holectypus corallinus d'Orb.; Cidaris glandifera Goldf., Cid. carinifera Agass., Cid. cfr. Bononiensis Wright, Cid. (Pseudocid.) tithonia Gemm., Cid. (Pseudocid.) dicosma Gemm., Cid. (Diplocid.) gigantea (Ag.) Des.; Pseudosaccocoma Strambergense Rem.

Heterocoenia verrucosa Koby; Pleurosmilia crassa Milasch.; Montlivaultia obconica (Münst.), Montl. crassisepta From.; Trochoseris corallina From. [1].

Infracretacico. — *Phylloceras infundibulum* (d'Orb.); *Haploceras* (Lissoceras) *Grasi* (d'Orb.).

Nerinea gigantea d' H. F., Ner. Coquandiana d'Orb.

Sphaera corrugata Sow; *Toucasia carinata* Math.; *Requienia ammonia* (Goldf.); *Ethra Munieri* Math.; *Pachytraga paradoxa* Pit. et C.; Monopleura varians Math., Mon. imbricata Math., Mon. michaillensis Pict. et C.; *Offneria rhodanica* Paquier; Horiopleura Almerae Paquier; *Valletia Tombecki* Mun.-Ch.; *Lithodomus avellana* d'Orb. [2].

Terebratula moutoniana d'Orb., Ter. acuta Quenst.

Cidaris Lardyi Des., *Cid. muricata* Roem., *Cid.* (Pseudocid.) *clunifera* (Agass.), *Cid.* (Pseudoc.) *crispicans* De Lor.; *Salenia prestensis* Desor.

Thamnastraea cfr. *Favrei* Koby; *Dimorphastraea Lorioli* Koby; *Hydnophora crassa* From., *Hydn. Picteti* Koby; *Eugyra interrupta* From., *Eug. Cotteaui* From., *Eug. digitata* Koby, *Eug. pusilla* Koby (var.); *Cryptocenia*

(1) È nota l'abbondanza delle ellipsactinidi nei calcari di Capri: il Canavari (*Idroz. titon. della reg. medit. appart. alla fam. delle Ellipsactinidi*, Mem. descr. carta geol. d'It., R. C. G., IV, Roma, 1892), riconobbe 5 specie di ellipsactinie e 1 sferactinia (*Ell. ellipsoidea* Steinm., *E. tyrrhenica* Can., *E. micropora* Can., *E. caprense* Can., *E. ramosa* Can., *Sphaeractinia Steinmanni* Can.) attribuendole tutte al titonico. Ritengo probabile che esse non siano esclusive dei calcari titoniani e che ne esistano anche nei calcari più recenti; ma non ho dati sicuri per affermarlo. Ebbi in esame una trentina di campioni di calcari contenenti esemplari di ellipsactinidi, ma in nessuno di essi riscontrai associazioni con altri elementi che potessero illuminarmi al riguardo. Con questo esame mi fu possibile d'altra parte di assicurarmi che idrozzari di altri generi accompagnano le ellipsactinidi.

(2) Le recenti monografie sulle faune a *facies* urgoniana (V. Paquier, *Les rudistes urgon.*, Mém. S. g. d. Fr., Paléont., I, vol. XI, 1903; II, vol. XIII, 1905; M. Cossmann, *Le Barrem. supér. à facies urgon. de Brouzet-Les-Alais* (Gard), ibid., I, vol. XV, 1907; II (P. de Brun, C. Chatelet et M. Cossmann) ibid., vol. XXI, 1916; III (H. Douvillé) ibid., vol. XXII, 1918; M. Cossmann, *Les coquilles des calcaires d'Orgon*, Bull. S. g. d. Fr., vol. XVI, 1916) mi furono assai utili per lo studio delle rudiste quanto per lo studio dei gasteropodi titoniani ed urgoniani di Capri, perchè i confronti di controllo per sceverare i gasteropodi dei due piani riuscirono più sicuri; ed è da notare a questo riguardo che le affinità fra la fauna a gasteropodi del Neogiurassico e dell'Infracretacico sono nel caso nostro altra causa di difficoltà nello studio.

Picteti Koby; *Enallohelia Rathieri* d'Orb.; *Pleurosmilia neocomiensis* From. [1].

SOPRACRETACICO. — *Cenomaniano*: Nerinea cfr. forojuliensis Pir.; Caprinula Boissyi d'Orb.; Monopleura forojuliensis Pir.; Himeraelites obliquatus (Di Stef.) Par., Himer. frontonis Par.; Caprotina (Sellaea) Zitteli Di Stef.

Turoniano-senoniano: Plagioptychus Aguilloni [2] (d'Orb.) (turon.); Distefanella Bassanii Par. (turon.); Caprina communis Gemm. (senon.); Praeradiolites sp.?; Radiolites sp. (gruppo del *R. angeiodes* P. d. L.); Hyppurites sp. (piccolissima valva inferiore di ippuritide, assai erosa sui fianchi: merita d'essere segnalata come altro documento che attesta la presenza di orizzonti del Cretacico superiore, e perchè si tratta di una forma conico-compressa, rapidamente crescente sulla base appuntita, con tre pieghe supplementari assai pronunciate, oltre alla legamentare ed ai due pilastri, così da ricordare la forma distinta da Futterer come *Bihippurites plicatus*, e spettante verisilmente al gen. *Batolites*, per le affinità col *Bat. tirolicus* Douv. in quanto dipendono dalle pieghe supplementari); Glyphephyllia? (cfr. *G. Dumortieri* From. del Turon.).

Fra le 106 forme componenti la fauna titoniana, sono numerose quelle comuni colla tipica fauna (a gasteropodi) di Stramberg; quante bastano per dimostrare sicuramente il sincronismo e la corrispondenza di *facies*. Particolarmente interessante è la evidente e stretta affinità col Titonico siciliano [3], del quale il calcare di Capri ripresenta gli elementi faunistici più caratteristici, per modo che la fauna di Capri, si può asserire, è quella stessa della Sicilia. Notevoli sono pure le corrispondenze con la fauna titoniana del Monte Cavallo in Friuli e della costa occidentale della Sardegna, più che con quella a brachiopodi e corallarî di Argentera (Stura di Cuneo): tutti depositi calcarei a *facies* neritica, insulare o di costiera al geosinclinale titoniano medi-

[1] L'Airaghi e il De Angelis (Mem. cit.) hanno descritto parecchie nuove forme dei calcari di Capri, attribuendole all'Infracretacico; fra gli echinodermi, *Hemicidaris caprensis, Rabdocidaris Cerioi*; fra i corallarii, *Chaetetes Capri, Amphiastraea Waltheri, Aulastraea Bassanii, Hydnopora Oppenheimi, Stylina Paronai, St. Steinmanni, Acanthocoenia Cerioi, Dendrogyra Kobyi, Cyathophora De Lorenzoi, Pleurosmilia Di Stefanoi.*

[2] La sezione del frammento di guscio (Capri), figurata e attribuita da Oppenheim (1889) al gen. *Plagioptychus*, appartiene invece con ogni probabilità alla *Caprinula Boissyi* del Cenomaniano, come mi risulta dall'esame fattone.

[3] G. G. Gemmellaro, *Stud. paleont. s. fauna del calc. a* Ter. janitor *del N. di Sicilia*, Palermo, 1868-76; G. Di Stefano, *Nuovi gaster. titon.*, Natur. sic., I, Palermo, 1882; id., *Sopra altri foss. del Titon. inf. di Sicilia*, Giorn. sc. nat. ed econ., Palermo, XVI, 1883; M. Gemmellaro, *Nuove osservaz. paleont. sul Tit. inf. della prov. di Palermo*, Palermo, 1909; id., *Sopra un crinoide* (Pseudosaccocoma Strambergense *Rem.*) *del Titon. inf. e dell'Urgon. della prov. di Palermo*, Riv. it. di paleont., XXIV, 1919.

terraneo, come lo sono anche quelli del Gargàno e di Parenzo (Istria) [1]. Nè sono da tacere le relazioni colla fauna di Calascio in Abruzzo [2], che per le incertezze riguardo alla sua giacitura, se cioè originaria oppure rimestata nella zona cretacica, fu oggetto di discussione simile a questa, durata per tanto tempo, a proposito della fauna di Capri, ora qui nuovamente considerata. È poi da ricordare il rinvenimento, nella valle del Sagittario, di calcari bianchi con *Pterocardium corallinum* e *Diceras* come altro non trascurabile indizio dello sviluppo del Neogiurassico coralligeno in Abruzzo [3].

Il Rovereto ha rilevato una sezione attraverso la parte orientale dell'isola di Capri (pag. 244, fig. 51), da Cala Caterola a Grotta Bianca, in corrispondenza dei più importanti affioramenti fossiliferi di Venassino e Capo di Sopra, attribuendo tutta la massa, in regolare piega non fratturata, dei calcari di costiera mesozoici, all'Urgoniano. Ora, per logica deduzione dai risultati della revisione dei fossili, resta confermata l'età urgoniana dei calcari a rudiste di Capo di Sopra, mentre ne deriva che nella massa che segue a sud a Venassino, interposta fra la serie a rudiste e quella dei calcari a struttura cristallina con ellipsactinidi, devesi far posto al Neogiurassico a *facies* titoniana.

Se non che è noto il contrasto di idee sulla struttura dell'isola fra Rovereto e De Lorenzo, il quale ammette (pag. 855) una serie di fratture con rigetti dirette da sud-ovest a nord-est ed un'altra serie diretta da nord-ovest a sud-est limitanti le due grandi masse calcaree della parte orientale ed occidentale dell'isola, a loro volta frammentate in altri blocchi minori, come il Salto di Tiberio ecc., che però tutti conservano uniformemente la generale inclinazione degli strati verso nord-ovest, al pari della massa fratturata della penisola di Sorrento, con cui sono geneticamente congiunti. Dimostrata ormai la reale esistenza di calcari d'età titoniana in Capri, riuscirà forse meno difficile di verificare i loro rapporti con quelli infracretacici, appunto sulle traccie delle fratture con rigetti. E penso che i rapporti non siano qui molto diversi da quelli della serie sincrona e simile giura-cretacica nel ricordato M. Cavallo in Friuli, nonchè della sua prosecuzione nelle

[1] G. A. Pirona, *Sulla fauna foss. giur. del M. Cavallo in Friuli*, Mem. R. Ist. ven. sc., XX, 1878 (carta e prof. geol. del Taramelli); A. Portis, *Sui terr. stratific. di Argentera*, Mem. R. Acc. sc. Torino, XXXIV, 1881; K. Deninger, *Die mesozoisch. Format. auf Sardinien*, N. Jahrb. f. M. G. u. P., XXIII BB., 1907: C. F. Parona, *Affioram. di Titonico con* Diceras Luci *presso Parenzo in Istria*, Rend. R. Acc. Lincei, XXI, 1912.

[2] C. F. Parona, *Nuovi dati paleont. sui terr. mesoz. dell'Abruzzo*, Boll. R. Com. geol., Roma, 1908, P. L. Prever, *Coralli giurass. del Gran Sasso d'Italia*, Atti R. Acc. Torino, XLIV, 1909.

[3] P. Zuffardi, *Escursione alle gole del Sagittario e a Scanno*, Boll. Soc. geol. ital., XXXII, 1913, pag. CXXIII.

vicinanze di Gorizia, secondo il profilo del Kossmatt attraverso l'Isonzo, dal Sabotino al M. Santo [1].

Riguardo al Titonico non ripeterò le considerazioni d'ordine generale esposte nella mia Nota precedente (1905), notando per altro che i nuovi risultati ottenuti colla revisione presente confermano l'attribuzione a questo livello ed a questa età di parte dei calcari di Capri: attribuzione accolta nel mio *Trattato di Geologia* (1903, pp. 505 e 509).

Ai fossili già citati nella precedente Nota (1905) a dimostrazione della presenza dell' Infracretacico nella serie dei calcari di Capri, altri ora ne aggiungo che l'attestano sempre meglio. Non è ancora il caso di precisare la ripartizione di questi fossili nei successivi orizzonti della parte inferiore del Cretacico: mi basta di far rilevare come qui sia tipica la *facies* urgoniana, e di confermare quanto già dissi altrove rispetto a questi fossili accennanti ai livelli neocomiani, barremiani, aptiani [2]. La fauna non è certo ricca, specialmente al confronto con quella titoniana; ma questo di Capri è tuttavia il giacimento italiano di età a *facies* urgoniana più tipicamente rappresentativo e si può dire unico nel riguardo paleontologico.

Per il Sopracretacico, ed in particolare per il Cenomaniano, ricordo che già Bassani e D'Erasmo hanno notato che calcari litologicamente identici a quelli ittiolitiferi di Capo d'Orlando si trovano in Capri nella regione Migliora fra Torre della Guardia e il Cocuzzo e presso la cima del M. Solaro ed altrove [3]. Ora i pochi fossili sopracitati dimostrano la presenza di questo sottopiano nella serie, ma colla *facies* caratteristica dei giacimenti di Termini Imerese in Sicilia e dei Monti d'Ocre nell'Abruzzo aquilano.

Sono pochi anche i fossili del nostro elenco, spettanti al Turoniano e al Senoniano; importanti tuttavia perchè confermano l'esistenza e sviluppo delle divisioni superiori del Cretacico, d'altronde note fin dal 1886, da quando il Walther affermò che dei resti di rudiste (Sphaerulites, Radiolites) si trovano in tutti i punti dell'isola di Capri [4].

[1] F. Kossmatt, *Der Küstenländischen Hochkarst und seine tektonische Stellung.* Verh. k. k. geol. R. A. Wien, 1909, pag. 80, fig. 1.

[2] C. F. Parona, *La fauna corallig. del Cret. dei M. d'Ocre nell'Abruzzo,* Mem. p. serv. alle descr. d. carta geol. d'Italia, V, 1909, pag. 39; id., *Prospetto delle varie facies e loro success. nei calc. a rudiste dell'Apenn.*, Boll. Soc. geol., ital., XXXVII, 1918.

[3] F. Bassani e G. D'Erasmo, *La ittiofauna del calc. cretacico di Capo d'Orlando pr. Castellamare* (Napoli). Mem. Soc. ital. dei XL, tom. XVII, 1912, pag. 25, nota 5.

[4] J. Walther, *I vulcani sottomarini del golfo di Napoli,* Boll. R. Com. geol., XVII, 1886, pag. 364.

Paleontologia. — *Esempî notevoli di icoliti.* Nota del Corrispondente A. Issel.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie.*

Fisica. — *Sulla gravitazione.* Nota V del Corrisp. Q. Majorana.

Piano di ricerca del fattore h. — Le conclusioni a cui sono giunto nelle precedenti Note, si basano sulla ipotesi del fenomeno dell'assorbimento della forza gravitazionale, operato per parte della materia ponderabile; ciò corrisponde al fatto che il fattore h abbia un valore differente da zero ed apprezzabile. Se ora fosse dimostrata l'esistenza di fatti, o fosse possibile la formulazione di teorie capaci di lasciar concludere che effettivamente, nel sole, un fenomeno del genere si verifica, si potrebbe cercare di determinare la *densità vera* di questo astro, e quindi la costante di smorzamento h. Ma non sembra che questo sia il caso; almeno sino ad oggi; per cui, volendo verificare l'attendibilità delle formulate ipotesi, non resta che la ricerca di laboratorio; l'indirizzo di questa può essere facilitato dai risultati numerici a cui sono precedentemente pervenuto.

Vediamo intanto quale sia il significato fisico della grandezza h. Supponiamo che si abbia una certa massa puntiforme m; il suo flusso di azione gravitazionale è, per quanto si è visto,

$$f = km\,.$$

Se ora supponiamo di porre la stessa massa al centro di una sfera di raggio r e di densità ϑ, il flusso totale emergente od apparente allo esterno, sarà, per le fatte ipotesi,

$$f_a = kme^{-h\vartheta r}\,.$$

Corrispondentemente, la massa *vera* e quella *apparente* staranno nel rapporto

$$\text{(19)} \qquad \frac{m_a}{m_v} = e^{-h\vartheta r}\,; \quad \text{cioè} \quad m_a = m_v\, e^{-h\vartheta r}\,.$$

Da tali considerazioni si potrebbe partire, nello immaginare una opportuna esperienza per la ricerca di h. Si potrebbe operare così: si determini il valore di una piccola massa, prima isolata, e poi circondata da altra massa,

possibilmente di forma sferica col centro nella prima; tali determinazioni debbono essere fatte studiando l'azione newtoniana. Le misure di questi due valori corrisponderebbero alla determinazione delle grandezze m_a ed m_v, della (19). Nel realizzare una tale esperienza, si deve scegliere la massa circondante la piccola massa m, in guisa che essa abbia la maggiore densità possibile e, nello stesso tempo, che soddisfi a criterî di costo non eccessivo, e di facile maneggio. Per cui, si deve preferire il mercurio od il piombo, le cui densità sono 13,56 ed 11,34.

Il raggio della sfera circondante la piccola massa m, sarà dell'ordine di una diecina di centimetri, o, nell'ipotesi di esperienze più grandiose, di qualche metro: in ogni modo, di un ordine di grandezza assolutamente differente da quello del raggio solare ($6{,}95 \cdot 10^{10}$ cm.).

Il prodotto $h\vartheta r$, ammettendo per h un valore massimo di 10^{-11}, risulterebbe dell'ordine di 10^{-9} circa. Se questo fosse il caso, sarebbe lecito di scrivere la (19), più semplicemente, sviluppando in serie il secondo membro e trascurando i termini di grado superiore al primo,

$$m_a = m_v(1 - h\vartheta r).$$

Cioè la massa m subirebbe una diminuzione ε, per il fatto di essere cirdondata dal mantello di densità ϑ e di spessore r, data da

$$\varepsilon = m_v h\vartheta r\,, \tag{20}$$

dalla quale si dedurrebbe il valore di h:

$$h = \frac{\varepsilon}{m_v \vartheta r}.$$

La (20) ci dice che, supposto il prodotto $h\vartheta r$ dell'ordine di grandezza di 10^{-9}, quello di ε rimane fissato per la scelta di m_v. Se questa fosse di 1 grammo, occorrebbe, con la progettata disposizione, apprezzare 10^{-9} grammi, cioè un milionesimo di milligrammo: il che sarebbe forse assai difficile. Adoperando invece una massa dell'ordine del chilogrammo, la variazione ε sarebbe dell'ordine dei millesimi di milligrammo: è questo il caso delle esperienze da me eseguite, e che ora comincerò a descrivere.

Considerazioni preliminari sul problema sperimentale. — Si è visto che tale problema consiste nel verificare se una piccola massa m, cambi di valore quando vien circondata da altra massa di forma sferica che chiamo M, disposta col centro sulla prima. Le condizioni sperimentali generali, che subito si intravedono, sono le seguenti:

1°) Evitare qualsiasi contatto o perturbazione reciproca fra m ed M; infatti, qualunque sia il metodo di determinazione di m o delle sue variazioni, occorre che questa possa liberamente spostarsi (anche solo di pochis-

simo) nell'interno di M; per cui fra m ed M deve esistere una adeguata intercapedine.

2°) La massa M dovrebbe essere di forma sferica, con cavità centrale per allogarvi la massa m. Ora, ciò sarebbe facile a reàlizzarsi se si trattasse di un corpo solido (p. es. piombo); ma volendo adoperare del mercurio, corpo che presenta il vantaggio di una densità alquanto maggiore e di maneggio più semplice e tranquillo, potendo fluire attraverso tubi opportuni, è preferibile di adottare la forma cilindrica retta e a base circolare, di altezza all'incirca uguale al diametro.

3°) La massa M deve essere in posizione tale, che le sue azioni newtoniane elementari su m si annullino esattamente; per cui occorre adoperare speciali disposizioni, atte ad eseguire i controlli del caso.

4°) Basterà fissare con piccola approssimazione il valore di m, purchè poi si determinino con estrema precisione le sue eventuali variazioni di peso, per la presenza e per l'assenza di M; e cioè in guisa da poter raggiungere una approssimazione minima sull'unità di peso. e per unità di spessore del mantello e di unità di densità di questo, di circa 10^{-12}, come si è detto.

5°) È da scartarsi, per la determinazione di m e delle sue eventuali variazioni, il metodo della bilancia di Cavendish, che, per quanto perfezionato, non lascia sperare di raggiungere precisione superiore a 10^{-3} o 10^{-4}. Ci si deve meglio servire della gravità terrestre, che genera sulle masse forze assai più notevoli; le variazioni assolute di queste saranno perciò assai maggiori, e quindi più facilmente constatabili. Ora, il metodo più opportuno per apprezzare tali forze è quello della bilancia; un dinamometro, salvo quanto sarà detto, non offre garanzie sufficienti di sensibilità; ancora meno sensibile sarebbe un metodo fondato sulla osservazione di oscillazioni pendolari.

6°) Il giogo della bilancia deve sostenere la massa m da un lato, ed una massa m', identica ad m, dall'altro, quale contrappeso: l'influenza di M su m' deve essere presa in considerazione, nel calcolo delle osservazioni.

7°) Le posizioni di equilibrio della bilancia debbono essere determinate con specchio, raggio luminoso e scala verticale. Non è consigliabile lo studio di un apparecchio fondato sulla osservazione di frangie di interferenza: forse ciò potrebbe convenire in una disposizione dinamometrica; ma non ho, sinora, elementi per dir ciò con sicurezza. Si deve spingere al massimo la sensibilità della bilancia, sia con la opportuna conformazione del suo giogo, sia accrescendo la distanza della scala da essa.

8°) Il valore della sensibilità da raggiungere è, come si è detto, dell'ordine di 10^{-9}, cioè 1 millesimo di mgr., su di 1 kgr., limite che ritengo non sia stato mai raggiunto nell'uso della bilancia.

Intravisti così i criterî generali della progettata esperienza, cominciai,

nell'ottobre 1918, a concretarne i particolari. La bilancia adoperata è una Rueprecht in ottime condizioni, con una lunghezza di giogo di 26 cm., della portata di circa 1 kgr. Le masse m ed m', scelte, sono due sfere di piombo del diametro di 60 mm., con un foro diametrale di 5 mm. di diametro, destinato a ricevere un cilindro di ottone per la sospensione delle sfere ai bracci della bilancia. Esse, come mi sono assicurato con la misura della loro densità, non hanno falle interiori. La quantità di mercurio, di cui posso disporre per la detta esperienza, è di circa 115 kgr.; di essi, 104 sono destinati a fluire in un apposito vaso cilindrico di legno, a pareti robuste, nel cui centro si trova l'involucro sferico racchiudente la sfera di piombo m; questa è sospesa alla bilancia mediante un sottil filo di ottone, protetto da un tubo di vetro.

Tale è, in linea assai sommaria, la disposizione da me adottata. In una prima forma la realizzai nel dicembre 1918; ma successivamente dovetti perfezionarla, tanto che i primi esperimenti, che sembrarono darmi risultati positivi, non furono ottenuti che qualche mese dopo. Un perfezionamento assolutamente necessario, e sulla cui utilità non insisterei mai abbastanza, è stato quello di togliere completamente l'aria a contatto col giogo della bilancia e con le sfere m ed m'; della opportunità di tale artificio (che come, si comprende, rende assai più complicata tutta la disposizione) mi accorsi subito dopo i primi tentativi di osservazione del fenomeno. Infatti, non appena ebbi montato l'apparecchio per la prima volta, quando cioè non avevo ancora praticato il vuoto intorno all'equipaggio mobile, mi accorsi che l'affluire od il defluire del mercurio intorno ad m, faceva subire alla posizione di equilibrio della bilancia, spostamenti assolutamente irregolari, tanto per grandezza, quanto per segno. Dopo qualche tentativo riconobbi che il fatto era dovuto a squilibrî di temperatura fra il mercurio e la sfera m. È bene di rendersi preciso conto di una perturbazione di tale genere.

Supponiamo che il mercurio, lasciato per un tempo sufficiente intorno ad m, abbia finito per assumere esattamente la temperatura di questa sfera; e ciò a traverso l'involucro di protezione di m, e l'aria contenutavi. Si proceda ora all'allontanamento del mercurio, costringendolo a passare a traverso tubi ed a recarsi in serbatoi di temperatura, che difficilmente sarà uguale a quella della sfera m; questa operazione può assai facilmente indurre nel mercurio variazioni di temperatura, anche dell'ordine di qualche decimo di grado. Quando il mercurio, in una fase successiva, sarà ritornato intorno alla sfera, esso potrà trasmettere quelle variazioni all'aria circondante questa; da ciò ne conseguono variazioni nella spinta idrostatica, non compensate, in generale, da un fenomeno analogo sulla sfera m', che è necessariamente lontana dal mercurio. Essendo di cm. 3 il raggio della sfera m, la misura di quella variazione, per 1° centigrado e nelle condizioni ordinarie di pres-

sione e di temperatura, sarà

$$\frac{4}{3}\pi\, 3^3 \frac{0,0013}{273} = \text{gr. } 0,00054\,;$$

cioè di più di $^1/_2$ mgr. Anche ammettendo la variazione di solo un centesimo di grado, la variazione di spinta sarebbe di cinque millesimi di milligrammo, cioè superiore all'ordine di grandezza del fenomeno ricercato. Il rimedio radicale contro tale inconveniente è di eliminare del tutto la spinta intorno all'equipaggio mobile, comprese le sfere m ed m'; ed è quello da me adottato nella disposizione che ora descriverò.

Descrizione della disposizione sperimentale. — Come si è detto, la bilancia adoperata è una Rueprecht, con giogo di 26 cm. e della portata di 1 kgr. Dovendola far funzionare nel vuoto, sarebbe stato difficile realizzare una custodia delle stesse dimensioni di quella fornita dal costruttore, capace di sostenere la pressione atmosferica esterna; notisi che la custodia deve in ogni modo permettere le manovre e le osservazioni necessarie nel corso delle esperienze, dal suo esterno. Per cui risolsi di costruire una custodia di metallo sagomato, delle minime dimensioni possibili, che potesse resistere a quella pressione.

Tale custodia consiste in una scatola a forma di T (fig. 4), che racchiude il giogo colla sua colonna di sostegno, tolto dalla sua protezione originale e sfornito di piattelli, senza altra modificazione. Essa ha le pareti costituite di lamine di ottone spesso 5 mm. e, di queste, l'anteriore è smontabile a mo' di coperchio, fissabile al corpo della scatola con una quarantina di viti, disposte lungo il suo bordo. Sotto al coltello di destra del giogo si protende verso il basso, fissato alla scatola, un tubo D di vetro, sino a raggiungere il recipiente col mercurio U. Lungo l'asse di D si trova un filo di ottone di 0,3 mm. di diametro, che serve a fissare al detto coltello, la sfera di piombo m. Sotto al coltello di sinistra è praticata un'apertura, che connette la scatola con un recipiente cilindrico, destinato a contenere la sfera di contrappeso m'; questo recipiente ha, dal basso, un coperchio orizzontale smontabile, per modo che è possibile di regolare i pesi F, per l'equilibrio della bilancia.

Un tubo di vetro, che circonda i pesi F, permette di sorvegliarne le oscillazioni nelle operazioni preparatorie. Sul giogo, nel suo punto di mezzo, è stata adattata un'asticina rigida, portante uno specchietto S, sul quale arriva un raggio di luce a traverso il vetro spesso A, sostenuto da apposita armatura.

Il giogo può essere liberato od alzato, mediante il congegno fornito dal suo costruttore; ma la chiave di comando G, di tale congegno, passa col suo gambo di 7 mm. a traverso un premistoppa di cuoio ben compresso, su cui si adagia del mercurio, per assicurarne la perfetta tenuta all'aria. Tale

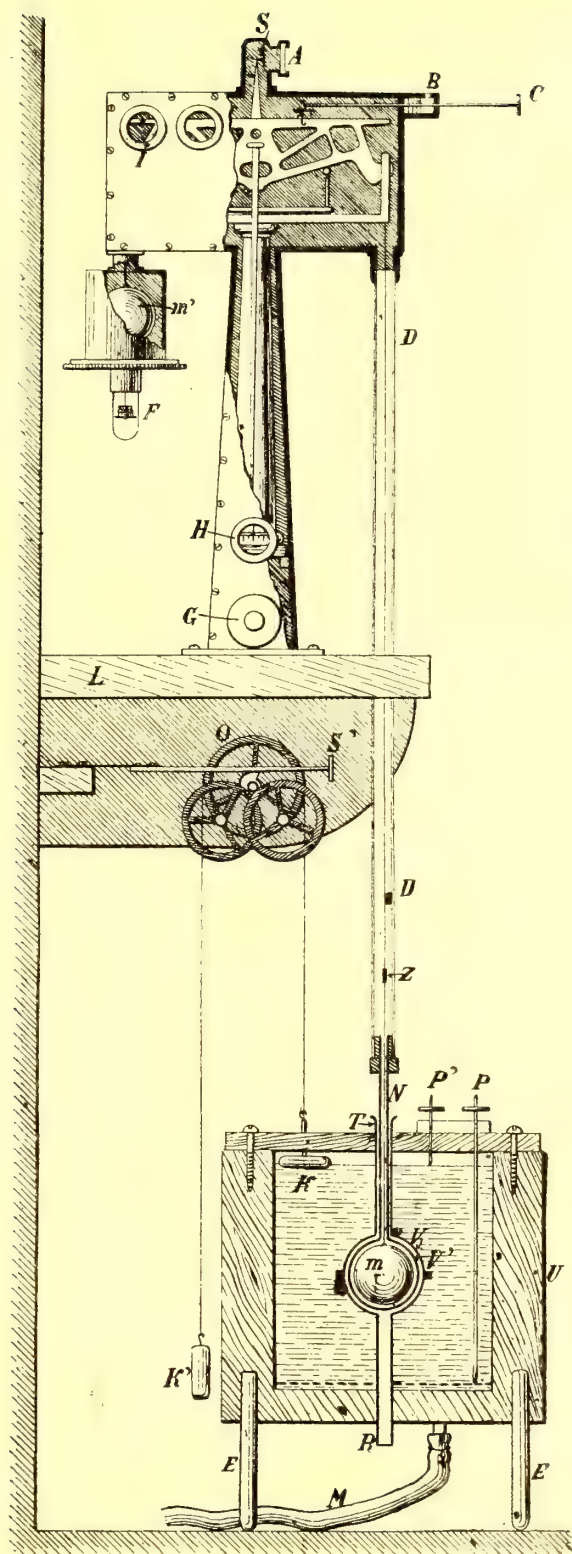



Fig. 4.

meccanismo, che non si vede nella figura, è del tutto analogo a quello realizzato per lo spostamento del cavalierino e che vedesi in figura, in B. Il braccio C di comando del detto cavalierino può ruotare o spostarsi longitudinalmente.

Quando la bilancia è completamente chiusa, cinque finestre circolari, come I, fornite di vetri spessi, permettono di esaminare dallo esterno la posizione del giogo, ed eventualmente di portare in posizione opportuna il cavalierino mediante la manovra di C. Una sesta finestra più bassa, H, permette di controllare la posizione dell'indice verticale del giogo sulla scala a lettura diretta.

Tutta la bilancia, colla sua custodia, è portata da una mensola L di marmo fissata al muro, in una stanza a pianterreno del laboratorio di fisica del Politecnico di Torino. La mensola è situata all'altezza di circa 80 cm. dal pavimento, ed ha un foro per lasciare passare il tubo D. Un attacco speciale, che non si vede in figura, connette l'ambiente della bilancia con una pompa rotativa a mercurio Gaede, fornita della pompa preparatoria a capsula.

Dato il grande sviluppo del contorno del coperchio smontabile della custodia della bilancia, si è incontrata una grande difficoltà per ottenere una perfetta tenuta di vuoto: guarnizioni di cuoio, di gomma, grassi semisolidi, si sono addimostrati inadatti allo scopo. D'altro canto, non potevasi adottare l'uso di un mastice fusibile a caldo (anche solo 50° o 60°), giacchè si sarebbe dovuta scaldare tutta la custodia contenente la bilancia, col rischio di far sviluppare, ed indi depositare sul giogo, sostanze volatili o vapor acqueo. Dopo molti e laboriosi tentativi [1], sono riuscito a trovare il modo di ottenere una tenuta del vuoto, praticamente perfetta; e ciò mediante un mastice facilmente fusibile e dotato di un grande potere adesivo. Esso è costituito così: cera vergine 35, colofonia 35, caoutchouc 18, olio di vasellina 12. Tale mastice ricorda il grasso di Ramsay, ma è alquanto più denso; la proporzione di olio di vasellina può venire cambiata a seconda della temperatura dell'ambiente: di estate la si fa più piccola che non d'inverno. Col detto mastice si spalmano i bordi delle parti da fissare con viti, prima di connetterle, e poi si serrano queste. Servendosi poi di una fiamma e di altro mastice, si completa l'operazione, avvertendo di formare poco alla volta uno spessore di mastice di uno o due millimetri sulle connessure. Con ciò si raggiunge il risultato di una ottima tenuta, senza bisogno di scaldare preventivamente la scatola della bilancia. Infatti, manovrando la pompa Gaede, si arriva facilmente a ridurre la pressione a solo qualche centesimo di mm. di mercurio; fermata la pompa, quella pressione risale lentamente, ma per arrestarsi, dopo circa 24 ore, a 7 od 8 decimi di mm.: questa tensione rappresenta forse quella dei vapori del mastice adoperato.

[1] Soltanto per aprire e richiudere la bilancia occorrono da 4 a 7 giorni.

Al disotto della mensola che sostiene la bilancia, e sul pavimento della stanza di esperimento, si trova il recipiente U, destinato a ricevere il mercurio. Esso è stato così ottenuto: quattro robusti dischi di legno, di 32 cm. di diametro ed alti circa 7 cm., sono insieme fissati con viti e con colla, in guisa che le loro fibre sieno incrociate. Nel blocco, così ottenuto, si è indi praticata al tornio, un'incassatura cilindrica di circa 22 cm. di diametro e profonda altrettanto. Per assicurare poi la tenuta al mercurio, le pareti interne del recipiente sono state foderate con sottile e robusta carta, accuratamente incollata. Il recipiente U è sostenuto sul pavimento da tre piedi cilindrici di ferro, come i due E che si vedono nella figura, e per tentativi le sue pareti sono rese esattamente verticali col porre qualche lastrina metallica sotto i detti piedi; per semplicità costruttiva e per maggiore robustezza della disposizione, non ho adoperato viti calanti.

L'asse verticale del recipiente U coincide esattamente con la verticale condotta dal coltello destro della bilancia. Una volta aggiustata la posizione di U, questo viene fissato al pavimento, annegando in alquanto mastice duro le estremità inferiori dei suoi tre piedi.

Il recipiente U porta sul suo asse verticale due tubi, R e T, di 12 mm. di diametro, di ottone, fissati rispettivamente a traverso il suo fondo e ad una sbarra di legno, aggiustata con due robuste viti, sulla sommità di U. I due tubi R e T, che sono in prolungamento, si raccordano verso il centro di U, mediante una sfera cava a pareti sottili V, di ottone, di 79 mm. di diametro. Questa sfera è smontabile mediante una giuntura a viti, nel suo piano diametrale orizzontale. Nell'interno di V trovasi una seconda sfera cava pure di ottone, V′, concentrica con la prima e di diametro alquanto più piccolo, cioè di 70 mm. Essa è connessa mediante una canna di ottone N, situata coassialmente con il tubo T, col tubo di vetro D che scende dalla custodia della bilancia. La sfera V′ e la canna N non toccano in alcun punto il recipiente I e le parti con esso fissate, come T, V, R. Uno speciale congegno, non indicato in figura, permette, al fine di evitare guasti nell'apparecchio, di fissare insieme T con N, quando non si fanno esperienze. L'involucro V′ è scomponibile, come V, in due calotte semisferiche, svitabili l'una dall'altra. Si può così rinchiudere nel suo interno, la sfera *m* che, come si è detto, resta appesa al giogo della bilancia. Il filo di sospensione di *m* porta un cilindretto Z, visibile all'esterno del tubo di vetro D, e che serve al controllo della posizione di *m* rispetto al recipiente U.

La disposizione descritta permette, volendo, di far circolare una corrente d'aria dal tubo R, a traverso l'intercapedine esistente fra i due involucri V e V′ ed il tubo T; con ciò si può assicurare maggiormente la indipendenza termometrica fra V e V′. Ma tale artificio è stato riconosciuto, nel corso delle esperienze, del tutto inutile.

Il recipiente U è destinato a ricevere dal basso il mercurio. Questo

liquido può affluire, aprendo un grosso rubinetto di ebanite, non segnato in figura, che connette U con sei serbatoi di due litri circa ciascuno, in vetro, posti in parallelo, a m. 2,50 di distanza orizzontale, e a m. 0,50 di altezza dal suolo. I sei serbatoi sono chiusi ermeticamente, e da essi può venire estratta l'aria; con ciò il mercurio viene aspirato dal recipiente U. Così, a volontà, si può automaticamente lasciare affluire quel liquido in U, od allontanarnelo.

Il comando della posizione del mercurio, sia col rubinetto, sia con la pompa per l'aspirazione dell'aria dai sei serbatoi, vien fatto a 12 metri di distanza dalla bilancia, dove si trova anche il posto di osservazione e di comando di tutte le altre operazioni sperimentali.

Controllo della posizione del mercurio rispetto alla sfera m. — Occorre che questa posizione sia tale che l'azione newtoniana risultante, del mercurio sulla sfera di piombo *m*, sia esattamente nulla. Ciò corrisponde alla condizione di esatta coincidenza dei centri di *m*, V', V ed U. Per verificare che tale condizione sia rigorosamente soddisfatta, si procede così:

Con un goniometro a cannocchiale e cerchio azimutale, si determina la distanza fra Z e regoli rettilinei verticali appoggiati alle pareti interne di U. Questa distanza deve essere costante. Essendosi verificato ciò, si può anche essere sicuri che il filo di sospensione di *m* passa, col suo prolungamento, per i centri di V e V'; infatti l'aggiustaggio di questi due involucri rispetto al recipiente U è, per costruzione, fatto colla necessaria esattezza.

Quando il mercurio viene aspirato da U, si arresta l'operazione ad un livello presso al fondo, in figura indicato con linea tratteggiata. Il raggiungimento di tale livello è controllato dalla sparizione del contatto elettrico dell'estremità di una sottile verga di acciaio P col mercurio, e conseguentemente dallo spegnimento di una lampadina elettrica, al posto di osservazione. Quando il mercurio affluisce nel recipiente U, se ne controlla il livello superiore mediante l'analogo contatto di una verga più corta P', che accende una seconda lampadina, posta accanto alla prima. Allo spegnimento della prima lampadina ed all'accensione della seconda, vien chiuso immediatamente il rubinetto di ebanite, mediante il tiro di un cordoncino, provocando l'arresto del movimento del mercurio. Si comprende, da quanto si è detto, che il senso di tale movimento (verso U, oppure da U) è provocato mediante l'ingresso dell'aria nei sei serbatoi, o con l'aspirazione di essa; le quali operazioni vengono, al solito, comandate dal posto di osservazione.

Un terzo contatto elettrico, non indicato in figura, controlla, con una terza lampadina, l'arrivo del mercurio ad un livello posto esattamente a metà altezza fra i due estremi predetti , e ciò per lo scopo che sarà spiegato in seguito.

Ora si comprende che i due estremi del mercurio debbono essere posti esattamente in posizione simmetrica rispetto all' involucro V. Tale condizione

di cose vien verificata accuratamente col catetometro, puntando le estremità superiori delle asticine P e P′ e quelle di altri regoletti verticali che si appoggiano su punti di controllo speciali dell'involucro V′, che non sono segnati in figura. Le lunghezze delle asticine e dei regoli sono conosciute con precisione in precedenza. Essendo l'asticina P′ foggiata a vite, si può agevolmente correggere l'errore di aggiustaggio, così constatato.

Occorre infine che il centro della sfera m sia situato esattamente nel piano mediano, fra i due livelli del mercurio. Tale condizione si verifica anch'essa col catetometro, puntando attraverso il tubo di vetro D, il cilindretto Z, la cui distanza dalla sfera m è stata determinata prima del montaggio dell'apparecchio.

Meccanica. — *Sul moto dei giroscopi asimmetrici pesanti nel caso in cui l'invariante principale S è costantemente nullo.* Nota II di ORAZIO LAZZARINO, presentata dal Corrisp. R. MARCOLONGO.

6. I MOTI ALLA MLODZJEJOWSKI SODDISFANO ALLE CONDIZIONI (16). — È facile vedere che per soddisfare alle (16), e per conseguenza alla (15), basta supporre

$$\mathbf{u} \wedge \alpha\mathbf{u} = 0 \quad , \quad \omega' \neq 0 \; ; \tag{17}$$

infatti, per la prima delle (17), è identicamente soddisfatta la prima delle (16); inoltre dalla (8) si ha $\omega' . \mathbf{g} \times \alpha\mathbf{u} = 0$ e quindi, per $\omega' \neq 0$, risulta $\mathbf{g} \times \alpha\mathbf{u} = 0$, c. d. d.

Indicando poi con n un numero reale non nullo, le (17) si possono scrivere

$$\alpha\mathbf{u} = n\mathbf{u} \quad , \quad \omega' \neq 0 \tag{17'}$$

ed esprimono che « *l'asse di rotazione del giroscopio è asse principale* « *d'inerzia rispetto al punto fisso e che la velocità angolare del giroscopio* « *è funzione del tempo* ».

Nel caso dei *giroscopi asimmetrici pesanti*, si può soddisfare alle (17′) supponendo

$$\mathbf{u} = \mathbf{k} \quad , \quad n = C \quad , \quad \omega' \neq 0 \tag{18}$$

dove $\mathbf{k}$ è un vettore unitario parallelo ad uno qualunque degli assi principali d'inerzia relativi al punto fisso e C è il momento d'inerzia del giroscopio rispetto al detto asse. Nelle ipotesi (18), l'equazione (5) del moto si scrive

$$\omega' . C\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{g} \tag{19}$$

ed esprime che « *durante il moto, l'asse di rotazione si mantiene orizzon-* « *tale, mentre il baricentro del giroscopio oscilla in un piano verticale,* « *cioè il giroscopio oscilla attorno ad un asse orizzontale come un ordi-* « *nario pendolo composto* » [4].

Se poi si tratta di un *giroscopio simmetrico rispetto ad un asse*, ad es. $O\mathbf{k}$, allora, indicando con A, B, C i momenti principali d'inerzia rispetto al punto fisso e supponendo $A = B$, si può soddisfare alle (17') ponendo

$$(20) \qquad \mathbf{u} \times \mathbf{k} = 0 \quad , \quad n = \mathrm{A} \quad , \quad \omega' \neq 0 .$$

Infatti, osservando che in questo caso l'omografia d'inerzia assume la forma [5]

$$(21) \qquad \alpha = \mathrm{A} + a \, . \, H(\mathbf{k} \, , \mathbf{k})$$

dove a è numero reale, si deduce, tenendo conto della prima delle (20),

$$\alpha \mathbf{u} = \mathrm{A}\mathbf{u} + a \, . \, \mathbf{u} \times \mathbf{k} \, . \, \mathbf{k} = \mathrm{A}\mathbf{u}$$

e quindi sussiste il ragionamento fatto per il caso precedente e si conclude che « *nelle ipotesi* (20) *i giroscopi pesanti, simmetrici rispetto ad un* « *asse, compiono dei moti pendolari attorno ad un asse orizzontale, come* « *un ordinario pendolo fisico* ».

Bisogna però osservare che, per la condizione $\mathbf{u} \times \mathbf{k} = 0$, l'asse $O\mathbf{u}$ di oscillazione può coincidere con una qualunque delle rette che passano per O e giacciono nel piano degli assi uguali d'inerzia; perciò in questo caso si ha che « *gli assi di oscillazione dei moti pendolari formano un* « *fascio di rette che ha per centro il punto fisso e per piano quello degli* « *assi eguali d'inerzia* ». Tuttavia, poichè per ciascuno dei detti assi il giroscopio è *planare*, questi moti possono chiamarsi, come quelli precedentemente considerati per i giroscopi asimmetrici, « *moti alla Mlodzjejowski* ».

Dopo ciò, si può concludere che « *quando le equazioni* (10) *non sono* « *fra loro indipendenti, fra i moti possibili vi sono certamente i moti* « *alla Mlodzjejowski* » [6].

Resta ora da vedere se, oltre questi, siano possibili, nel caso considerato, altri moti.

[4] Se fosse $\omega' = 0$, cioè $\omega = \mathrm{cost}$, si avrebbe, per la (19), $\mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{g} = 0$, cioè: « durante il moto, il baricentro del giroscopio resterebbe sulla verticale e attorno a questa « il giroscopio ruoterebbe con moto uniforme; si ricadrebbe perciò nel caso di Staude, « già studiato ».

[5] Cfr. O. Lazzarino, questi Rendiconti, 2° sem. 1917, pag. 234.

[6] B. K. Mlodzjejowski, Arbeiter der phys. Section der Freunde der Naturkunde in Moskau, 7, pag. 46 (1894).

7. Ricerca generale di tutti i moti possibili quando le (16) non sono fra loro indipendenti. — Poichè tutti i moti possibili devono soddisfare necessariamente alle (16), la ricerca consiste sostanzialmente nel vedere a quali moti la coesistenza delle (16) possa condurre. Giova ricordare che nel caso $S = \text{cost.}$, per avere l'equivalenza fra le equazioni di Hess-Schiff e quelle di Euler-Poisson, è necessario associare alle prime la equazione supplementare [v. loc. cit. (2) b)]

$$kg^2 + 2U \,.\, g \times \Omega + g \wedge \alpha\Omega \times \alpha\Omega' = 0 \tag{22}$$

dove

$$k = \alpha\Omega \times \mathbf{k}_1 \tag{23}$$

è la costante dell'integrale delle aree [v. loc. cit. (2) a)]. Osservando ora che, per la (4), l'ultimo termine della (22) si annulla e ponendo, per semplicità di scrittura,

$$\mathbf{u} \times \alpha\mathbf{u} = 2a \quad , \quad \alpha\mathbf{u} \times \alpha\mathbf{u} = 2b \tag{24}$$

dove a e b sono numeri costanti e positivi, dalle (1) si ha

$$T = a\omega^2 \quad , \quad U = b\omega^2 \tag{25}$$

e la (22) assume la forma

$$kg^2 + 2b \,.\, g \times \mathbf{u} \,.\, \omega^3 = 0 \,,$$

dalla quale si deduce, in generale, un valore costante per ω (7).

Perchè ω possa essere funzione del tempo, come richiede la seconda delle (17), è necessario che coesistano le due condizioni

$$(26)\quad k = \alpha\Omega \times \mathbf{k}_1 = 0 \quad ; \quad (27)\quad g \times \mathbf{u} = 0$$

le quali esprimono che « *il momento, rispetto al punto fisso, dell'impulso* « *deve mantenersi orizzontale e l'asse* O$\mathbf{u}$ *di oscillazione deve restare* « *normale al vettore del baricentro* ».

D'altra parte, essendo α dilatazione, la seconda delle (16) può scriversi

$$\alpha g \times \mathbf{u} = 0 \tag{28}$$

e allora, indicando con l un numero reale non nullo, dalle (27) e (28) si ha

$$\mathbf{u} = l \,.\, g \wedge \alpha g \tag{29}$$

e quindi

$$\alpha\mathbf{u} = l \,.\, \alpha(g \wedge \alpha g) = l(I_1 \alpha \,.\, g \wedge \alpha g - g \wedge \alpha^2 g) \,. \tag{30}$$

(7) Essendo, nel caso in esame, i vettori g, $\mathbf{u}$ fissi nel corpo e costanti in grandezza, sarà $g \times \mathbf{u} = \text{cost.}$

Dopo ciò, la prima delle (16) può scriversi

$$l^2(\mathbf{g} \wedge \alpha\mathbf{g}) \times (I_1 \alpha . \mathbf{g} \wedge \alpha\mathbf{g} - \mathbf{g} \wedge \alpha^2\mathbf{g}) \wedge \mathbf{g}$$

e da qui, sviluppando e semplificando, si ottiene l'equazione

$$(31) \qquad l^2 \mathbf{g}^2 . \mathbf{g} \times \alpha\mathbf{g} \wedge \alpha^2\mathbf{g} = 0 .$$

Indicando ora con ξ, η, ζ le coordinate del baricentro del giroscopio, rispetto alla terna $O(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ precedentemente considerata, e con A, B, C i momenti principali d'inerzia rispetto ad O, la (31) assume la forma

$$(31') \qquad l^2 \mathbf{g}^2 (B - C)(C - A)(A - B)\, \xi\eta\zeta = 0$$

e, poichè i numeri l^2 e $\mathbf{g}^2$ non sono nulli, si conclude che la (31'), e quindi la (31), è soddisfatta quando, e solo quando, si verifica una delle seguenti condizioni:

$$(32) \qquad \xi = 0 \quad , \quad \eta = 0 \quad , \quad \zeta = 0$$

$$(33) \qquad B = C \quad , \quad C = A \quad , \quad A = B ;$$

cioè quando, e solo quando, il *giroscopio è planare o simmetrico rispetto ad un asse.*

Supponendo ad es. $\zeta = 0$ e tenendo presenti la seconda delle (16) e la (27), si vede che in detta ipotesi devono coesistere, per ogni posizione di $\mathbf{g}$, le tre condizioni

$$(34) \qquad \zeta = \mathbf{g} \times \mathbf{k} = 0 \quad , \quad \mathbf{g} \times \alpha\, \mathbf{u} = 0 \quad , \quad \mathbf{g} \times \mathbf{u} = 0$$

dalle quali risulta $n\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}$, $\mathbf{k} = \mathbf{u}$; si deducono perciò le (18) e si conclude che « *le ipotesi* (32) *conducono ai moti alla Mlodzjejowski* ».

Nelle ipotesi (33), supposto ad es. $A = B$, si ha, per la (21),

$$\alpha\mathbf{u} = A\mathbf{u} + a . \mathbf{u} \times \mathbf{k} . \mathbf{k}$$

e quindi la seconda delle (16) assume la forma

$$\alpha\mathbf{u} \times \mathbf{g} = A . \mathbf{u} \times \mathbf{g} + a . \mathbf{u} \times \mathbf{k} . \mathbf{k} \times \mathbf{g} = 0$$

e da qui, per la (27), e osservando che è $a \neq 0$, si ottiene la relazione

$$\mathbf{u} \times \mathbf{k} . \mathbf{k} \times \mathbf{g} = 0$$

che è soddisfatta quando si verifica almeno una delle due condizioni

$$\mathbf{g} \times \mathbf{k} = 0 \quad , \quad \mathbf{u} \times \mathbf{k} = 0 .$$

Per $\mathbf{g} \times \mathbf{k} = \zeta = 0$ si ripete il ragionamento precedente; per $\mathbf{u} \times \mathbf{k} = 0$ si osserva che questa condizione coincide con la prima delle (20) e che perciò si ha $\alpha\mathbf{u} = A\mathbf{u}$, $A = n$, onde si deduce, tenendo presente quanto

si è ottenuto dalle (20), che « *anche le ipotesi* (33) *conducono ai moti* « *alla Mlodzjejowski* ».

Avendo così dimostrato che « la coesistenza delle condizioni (16) e dell'ipotesi $\omega' \neq 0$ conduce necessariamente ai moti alla Mlodzjejowski », si può concludere che « *tutti i moti giroscopici possibili, per* $\omega' \neq 0$, *e* « *quando le equazioni* (10) *non sono fra loro indipendenti, sono moti* « *alla Mlodzjejowski* ».

Per $\omega' = 0$ si hanno, come si è già visto, i moti di Staude.

Nei moti alla Mlodzjejowski, il cono di Staude si spezza in due piani, uno dei quali (primo piano di Staude) contiene il baricentro del giroscopio, e l'altro (secondo piano di Staude), a differenza di quanto accade nel caso di Hess, non coincide col piano $S = 0$. Questo piano, la cui equazione può scriversi $\alpha g \times \mathbf{u} = 0$, taglia i detti piani secondo le rette $O . \alpha g$, $O\mathbf{u}$, di cui la seconda coincide con l'asse di oscillazione del giroscopio.

8. Determinazione dell'asse di oscillazione nei moti alla Mlodzjejowski. — Per determinare l'asse $O\mathbf{u}$ di oscillazione, possono servire le equazioni

$$(35) \qquad \alpha g \times \mathbf{u} = 0 \ , \ \alpha \mathbf{u} \wedge g \times \mathbf{u} = 0 \ , \ \mathbf{u} \times \mathbf{u} = 1$$

che, nel caso in esame, sono tutte indipendenti fra loro. Da esse si deduce, con procedimento noto [v. loc. cit. ([2]) *a*) pag. 328], la relazione

$$(36) \qquad \alpha g \times (\alpha \mathbf{u} \wedge g) \wedge \mathbf{u} \, . \, \mathbf{u} = \alpha g \wedge (\alpha \mathbf{u} \wedge g)$$

la quale permette di determinare il vettore $\mathbf{u}$, essendo, per l'indipendenza delle (35),

$$(37) \qquad \alpha g \times (\alpha \mathbf{u} \wedge g) \wedge \mathbf{u} \neq 0 \, .$$

Tale condizione non è soddisfatta nell'ipotesi particolare

$$(38) \qquad \alpha \mathbf{u} \wedge g = 0$$

la quale però *non è compatibile* con la condizione $\alpha \mathbf{u} \times g = 0$, trovata necessaria per l'esistenza dei moti alla Mlodzjejowski. Da ciò si deduce che « *quando il momento, rispetto al punto fisso, dell'impulso è parallelo al* « *vettore del baricentro, i moti alla Mlodzjejowski non sono possibili* ».

Non è però escluso che, in questo caso e per un *giroscopio generale*, possano sussistere delle *rotazioni permanenti* attorno alla retta di equazione (38), la quale appartiene al *cono di Staude*.

Matematica. — *Nuove regole per la riduzione degli integrali multipli generalizzati di Riemann.* Nota IV di **Mauro Picone**, presentata dal Socio L. Bianchi [1].

Esempio II. — Sia E un dominio piano la cui frontiera sia costituita da una curva chiusa C semplice regolare di Jordan di equazioni parametriche $x = h(s)$, $y = k(s)$, ove s designa l'arco di C. Le funzioni $h(s)$, $k(s)$ sono supposte continue con le loro derivate prime e seconde in tutto il tratto $(0 . L)$, L designando la lunghezza di C. Supponiamo anche che la curva C abbia l'equazione $l(x, y) = 0$, essendo $l(x, y)$ una funzione continua, con le sue derivate parziali prime e seconde, in un rettangolo Δ, a lati paralleli agli assi coordinati, contenente E, sempre positiva nei punti *interni* di E, riuscendo inoltre, su C, $l_x^2 + l_y^2 > 0$.

Sia ora $g(x, y)$ una funzione continua in tutto E, e consideriamo la funzione

$$f(x, y) = g(x, y) : [l(x, y)]^{\alpha},$$

ove α è una costante minore dell'unità. Questa funzione è continua in ogni dominio *interno* ad E. Dico che *essa ammette un integrale generalizzato* (R) *esteso ad* E [2].

Supponiamo che il verso degli archi crescenti su C sia quello positivo su C. Indicando con n la normale a C, vòlta verso l'interno di E, si ha: $\cos(x, n) = -k'(s)$, $\cos(y, n) = h'(s)$. La curvatura di C

$$\frac{1}{R} = | h' k'' - k' h'' | .$$

è, per ipotesi, (finita e) continua in tutto $(0, L)$. Il minimo R_0 del raggio di curvatura R di C sarà perciò diverso da zero. Portiamo su n, a partire da C e nel verso positivo di n, un segmento costante $\varrho < R_0$; si ottiene la curva C_ϱ di equazioni

$$(11) \qquad \begin{cases} x = h(s) - \varrho k'(s) , \\ y = k(s) + \varrho h'(s) , \end{cases}$$

che dico essere semplice, regolare e intieramente interna a E, non appena ϱ

[1] Pervenuta all'Accademia il 25 settembre 1919.

[2] Alle stesse conclusioni si giungerebbe per la funzione

$$f(x, y) = g(x, y) \, |\log l(x, y)|^{\beta} ,$$

ove β è una qualunque quantità positiva.

è minore di un certo termine r assegnabile. La normale interna n in un punto P di C, corrispondente al valore s dell'arco, è incontrata dalla curva C, oltre che in P, in un insieme di punti diversi da P, sia $p_1(s)$ la distanza del punto P da questo insieme. Al variare di s, $p_1(s)$ è una funzione positiva di s e, con un ragionamento di noto tipo, si dimostra che essa ha in $(0, L)$ un limite inferiore $p_1 > 0$. Consideriamo ora, con P, un punto Q variabile su C; l'asse del segmento PQ incontra il raggio n, determinando su di esso, al variare di Q, un insieme di punti dal quale P ha una distanza $p_2(s)$ diversa da zero ([1]); $p_2(s)$ è una funzione di s sempre positiva avente in $(0, L)$ un limite inferiore $p_2 > 0$.

Sia ora r minore della minore delle tre quantità p_1, p_2, R_0. La curva C_ϱ risulterà intieramente interna ad E, poichè $\varrho < p_1$; risulterà semplice, poichè $\varrho < p_2$; risulterà regolare, poichè ove fosse, per un valore di s, contemporaneamente, $h'(s) - \varrho k''(s) = k'(s) + \varrho h''(s) = 0$, se ne trarrebbe $1 - \varrho(h' k'' - k' h'') = 0$ e quindi che, per quel valore di s, il segmento ϱ raggiungerebbe il raggio di curvatura di C; ciò che è assurdo, per essere $\varrho < R_0$.

Possiamo pertanto asserire che la curva C_ϱ è la frontiera di un dominio E_ϱ tutto interno ad E. Per assicurare l'integrabilità (R) in modo generalizzato della funzione $f(x, y)$ in E, basterà, in virtù del criterio dato al n. 3, far vedere che l'integrale

$$\iint_{E_\varrho} |f(x, y)|\, dx\, dy = \iint_{E_\varrho} \frac{|g(x, y)|}{[l(x, y)]^\alpha}\, dx\, dy\,,$$

è limitato in ogni tratto (ε, r), ove ε è un infinitesimo; o, cioè, che indicando con $E_{\varrho_1\varrho_2}$ il dominio compreso tra due curve $C_{\varrho_1}, C_{\varrho_2}, \varrho_1 < \varrho_2 < r$, si avrà

$$\lim_{\varrho_1 = 0,\, \varrho_2 = 0} \iint_{E_{\varrho_1\varrho_2}} \frac{|g(x, y)|}{[l(x, y)]^\alpha}\, dx\, dy = 0\,. \tag{12}$$

Per il calcolo dell'integrale di $|f|$ esteso al dominio $E_{\varrho_1\varrho_2}$, cangiamo le variabili di integrazione x e y nelle variabili s e ϱ legate alle x e y dalle (11), ciò che, come facilmente si vede, è lecito. Si ha, in $E_{0,r}$, $\frac{D(x, y)}{D(s, \varrho)} = 1 - \varrho(h' k'' - k' h'') > 0$. Se designamo con K il massimo, in $E_{0,r}$, di $|g(x, y)| \{1 - \varrho(h' k'' - k' h'')\}$, si trova

$$\iint_{E_{\varrho_1\varrho_2}} |f(x, y)|\, dx\, dy \leq K \int_0^L ds \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \frac{d\varrho}{[l(x, y)]^\alpha}\,,$$

([1]) $p_2(s)$ è il limite inferiore dei raggi dei cerchi tangenti in P alla C, e giacenti dalla parte di n, che hanno almeno un ulteriore punto, diverso da P, in comune con C. Se pertanto fosse $p_2(s) = 0$, ne seguirebbe che in P la curvatura di C sarebbe infinita.

ove

$$(13)\qquad l(x, y) = \varrho\, l_\varrho(0, s) + \frac{\varrho^2}{2} l_{\varrho\varrho}(\bar{\varrho}, s),$$

$\bar{\varrho}$ designando un certo valore pasitivo, dipendente da s, minore di ϱ.

Si ha, d'altra parte, $l_\varrho(0, s) = -l_x(h, k)k' + l_y(h, k)h'$; e pertanto risulterà sempre, in $(0, L)$, $l_\varrho(0, s) \neq 0$, poichè, in caso diverso, avendosi identicamente $l_x(h, k)h' + l_y(h, k)k' = 0$, ne seguirebbe, contrariamente ad un'ipotesi fatta, l'esistenza di un punto di C in cui $l_x = l_y = 0$.

Sarà d'altra parte sempre $l_\varrho(0, s) > 0$, poichè $l(x, y)$, nulla su C, è sempre positiva nell'interno di C. Diciamo m il minimo, in $(0, L)$, di $l_\varrho(0, s)$, sarà $m > 0$; diciamo M il massimo di $\frac{1}{2}|l_{\varrho\varrho}(\varrho, s)|$ in $E_{0,r}$. Si dedurrà, dalla (13), $l(x, y) > \varrho m - \varrho^2 M$. Prendiamo ora ϱ_1 e ϱ_2 entrambi minori di $m:(2M)$; si avrà, in tutto $E_{\varrho_1\varrho_2}$,

$$l(x, y) > \varrho(m - \varrho M) > \varrho\, m/2.$$

Ne segue, per gli indicati valori di ϱ_1 e ϱ_2,

$$\iint_{E_{\varrho_1\varrho_2}} |f(x, y)|\, dx\, dy \leq \frac{2^\alpha KL}{m^\alpha}\int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \frac{d\varrho}{\varrho^\alpha}, \qquad \alpha < 1,$$

ed il secondo membro di questa diseguaglianza è un infinitesimo con ϱ_1 e ϱ_2. È con ciò dimostrata la (12) e quindi l'integrabilità (R) in modo generalizzato della funzione $f(x, y)$ nel dominio E.

Diciamo a_1 e a_2 il minimo ed il massimo della x su C. Supponiamo ora, in particolare, che, se si esclude un insieme X di valori di ξ in (a_1, a_2) di misura (lineare) nulla, la sezione del dominio E, con ogni retta $x = \xi$, sia un insieme $\lambda(\xi)$ misurabile (J). Si può asserire allora (cfr. l'osservazione al Corollario 1 del n. 5) che *la funzione* $f(\xi, y)$ *ammette sempre un integrale generalizzato* (R) *esteso a* $\lambda(\xi)$, *escluso al più un insieme di valori di* ξ *in* (a_1, a_3) *di misura (lineare) nulla.*

Per ricercare i punti in (a_1, a_2) di eccezione per l'integrabilità (R) in modo generalizzato di $f(\xi, y)$ in $\lambda(\xi)$, supponiamo, ancor più in particolare, che ogni retta $x = \xi$, per ξ *interno* ad (a_1, a_2), seghi la curva C in due soli punti $y_1(\xi)$, $y_2(\xi)$, $y_1(\xi) < y_2(\xi)$, le funzioni $y_1(\xi)$ e $y_2(\xi)$ essendo continue in (a_1, a_2) [1]. Supponiamo anche che esista su C soltanto un numero finito di punti nei quali la tangente a C è verticale [1]. Si potrà allora dividere l'intervallo (a_1, a_2) in un numero finito di tratti (α_i, β_i), nei punti *interni* di ciascuno dei quali è sempre $l_y[x, y_1(x)] > 0$, $l_y[x, y_2(x)] > 0$.

Dico che in ogni tratto (α'_i, β'_i), *interno* ad (α_i, β_i), l'integrale generalizzato di Riemann

$$\varphi(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy$$

[1] Le conclusioni a cui giungeremo sussistono per ipotesi molto più larghe.

ha un valore determinato e finito, ed esso è una funzione di x continua in (α'_i, β'_i).

Designino $\eta(x)$, indifferentemente, una delle due funzioni $y_1(x)$ o $y_3(x)$, m $(m>0)$ il minimo in (α'_i, β'_i) di $|l_y(x, \eta(x))|$, M il massimo in E di $\frac{1}{2}|l_{yy}(x, y)|$. Si ha

$$l(x, y) = [y-\eta(x)]\, l_y[x, \eta(x)] + \tfrac{1}{2}[y-\eta(x)]^2\, l_{yy}[x, \bar{\eta}(x)],$$

ove $\bar{\eta}(x)$ è un valore intermedio fra y e $\eta(x)$. Ne segue che, per $|y-\eta| < \frac{m}{2M}$, risulta $l(x, y) > \frac{m}{2}|y-\eta|$. Pertanto, se y' e y'' sono due qualisivogliano valori, entrambi contenuti o nel tratto $\left(y_1, y_1 + \frac{m}{2M}\right)$ o nel tratto $\left(y_2 - \frac{m}{2M}, y_2\right)$, si ha

$$\int_{y'}^{y''} |f(x, y)|\, dy \leq \frac{2^\alpha H}{m^\alpha} \int_{y'}^{y''} \frac{dy}{|y-\eta|^\alpha},$$

ove H è il massimo di $|g|$ in E. Ciò intanto prova che $f(x, y)$, per ogni valore di x in (α'_i, β'_i) ammette un integrale generalizzato (R) esteso al tratto $[y_1(x), y_2(x)]$. Per dimostrare ora che questo integrale $\varphi(x)$ è una funzione continua di x in (α'_i, β'_i), osserviamo che, se σ designa una fissata quantità positiva per cui sia

$$\frac{2^\alpha H}{m^\alpha} \frac{\sigma^{1-\alpha}}{1-\alpha} < \frac{\varepsilon}{2},$$

ε essendo un numero positivo arbitrariamente assegnato, risulterà, per ogni valore di x in (α'_i, β'_i),

$$\left|\int_{y_1}^{y_1+\sigma} f(x, y)\, dy\right| < \varepsilon \quad , \quad \left|\int_{y_2-\sigma}^{y_2} f(x, y)\, dy\right| < \varepsilon. \tag{14}$$

Esiste un numero positivo δ tale che, per $|\varDelta x| < \delta$, si ha

$$\left|\int_{y_1(x+\varDelta x)+\sigma}^{y_2(x+\varDelta x)-\sigma} f(x+\varDelta x, y)\, dy - \int_{y_1(x)+\sigma}^{y_2(x)-\sigma} f(x, y)\, dy\right| < \varepsilon,$$

per tali valori di $\varDelta x$ si otterrà, in virtù delle (14),

$$|\varphi(x+\varDelta x) - \varphi(x)| < 5\varepsilon,$$

e ciò prova la continuità di $\varphi(x)$ in (α'_i, β'_i). *L'insieme dei punti singolari per l'integrabilità* (R) *della funzione* $\varphi(x)$ *in* (a, b) *è dunque contenuto in quello dei punti, in numero finito,* a, b, α_i, β_i. Ne segue, in forza del

Corollario I, che *la funzione* $\varphi(x)$ *ammette un integrale generalizzato* (R) *esteso al tratto* (a, b), *e che si ha*

$$\iint_E f(x, y)\, dx\, dy = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dx .$$

Osservazione I. Con un'analisi, analoga a quella precedente, può essere trattato, con i medesimi risultati, il caso in cui la curva C semplice di Jordan sia scomponibile in un numero finito di archi, lungo ciascuno dei quali si verifichino le ipotesi precedentemente enunciate per l'intiera curva C, potendo dunque la curva presentare dei punti angolosi o delle cuspidi in numero finito. Occorrono però in tal caso ulteriori condizioni per la curva C. In ogni punto (x_0, y_0), singolare per C, si ha $l(x_0, y_0) = l_x(x_0, y_0) = l_y(x_0, y_0) = 0$, basterà supporre che sia

$$l_{xx}(x_0, y_0)\, l_{yy}(x_0, y_0) - l^2_{xy}(x_0, y_0) < 0 ,$$

e che esista un punto M, interno a C, per cui i raggi, da esso uscenti, incontrino in un solo punto la C. Le curve C_ρ dianzi considerate si sostituiranno ora con curve omotetiche della C, rispetto a M assunto come centro di omotetia.

Osservazione II. È facile anche stabilire che se in un dominio E la funzione $f(x, y)$ può mettersi sotto una delle forme

$$f_1(x, y) = g(x, y) : \prod_{1}^{n}{}_i\, |a_i x + b_i y + c_i|^{\alpha_i} \qquad , \alpha_i < 1 , a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 > 0 ,$$

$$f_2(x \cdot y) = g(x, y) \cdot \prod_{1}^{n}{}_i \left| \log |a_i x + b_i y + c_i| \right|^{\beta_i} , \beta_i \geq 0 , a^2 + b_i^2 + c_i^2 > 0 ,$$

ove $g(x, y)$ è continua in tutto E, *la riduzione dell'integrale generalizzato* (R) *della funzione* f *esteso ad* E *si può effettuare come per quello di una funzione continua in tutto* E.

Osservazione III. Conclusioni analoghe sussistono nello spazio per la funzione

$$f(x, y, z) = g(x, y, z) : [l(x, y, z)]^\alpha , \quad \alpha < 1 .$$

Osservazione IV. Gli esempî I e II, benchè particolari, illustrano bene la teoria svolta nella Note precedenti e ne confermano la notevole portata pratica.

Geologia. — *Osservazioni geologiche sul monte Gargano* (1). Nota I del dott. G. Checchia-Rispoli, presentata dal Socio C. F. Parona.

I risultati delle ricerche preliminari sulla formazione a *rudiste* dei dintorni di Vico Garganico hanno contribuito a schiarire in parte l'età della massa calcarea, che sta direttamente sui calcari marnosi con selce del Neocomiano, fino allora riferita in modo vago all'*ippuritico* (2).

Lo studio dei fossili eseguito dal prof. C. F. Parona ha dimostrato che in quella massa esistono diversi orizzonti del neocretacico, che da ulteriori osservazioni dovranno essere meglio distinti (3).

Seguitando le ricerche nella regione settentrionale del promontorio garganico, ho potuto raccogliere varî altri elementi che permettono una precisa determinazione dell'età di una parte, certamente la più importante, di quei calcari, che da Vico si sviluppano verso Ischitella, Rodi e Carpino.

In questa parte del M. Gargano, sulla formazione neocomiana si osservano dei calcari bianchissimi e di un aspetto facilmente riconoscibile; infatti, si presentano generalmente bucherellati, semicristallini, tenacissimi e risultano di un impasto di detriti di fossili. Localmente però, nella vasta formazione il calcare diventa compatto, o a struttura oolitica, oppure assume una consistenza tufacea o addirittura polverulenta. Essi sono per lo più oscuramente stratificati, meno alla base della formazione, ove gli strati formati di roccia più compatta, sono sottili, ben distinti ed alternati con straterelli di selce varicolore, spesso giallastra. La selce si trova pure sotto forma di noduli di varia forma e grandezza. Così avviene anche che nella parte basale della formazione i fossili sono per lo più silicizzati. In alto la selce sembra mancare o deve essere rarissima; e i fossili, che pur si rinvengono qua e là, sono quasi sempre spatizzati e difficili ad essere isolati.

Al contatto della formazione marnosa con quella calcarea, in varî punti tra Ischitella e Carpino, ho potuto constatare l'esistenza di minute breccioline calcaree, a cemento marnoso, poco consistenti, ricche di *Orbitolina* di medie e piccole dimensioni.

Nelle contrade Tartareto e Forchione la forte erosione ha messo in evidenza sulla superficie del calcare, oppure ha quasi interamente liberati dalla

(1) Lavoro eseguito nel R. Ufficio geologico.

(2) G. Checchia-Rispoli, *Osservazioni geologiche nei dintorni di Vico Garganico*, Rendiconti d. R. Acc. dei Lincei, Cl. sc. fis. mat. e nat., vol. XXV, 1° sem. 1916.

(3) C. F. Parona, *Cenni sulle faune sopracretaciche a rudiste del monte Gargano*, ib. ib.

roccia, i fossili che, per la loro natura silicea, hanno potuto resistere più a lungo all'azione degli atmosferili.

Una collezione di questi fossili è stata, col consueto interessamento, studiata dal sullodato prof. Parona, che ha determinato le seguenti specie:

Triploporella Fraasi Steinm.,
Orbitolina bulgarica Desh.,
Orbitolina Paronai Prev.,
Apricardia Archiaci d'Orb.?,
Monopleura forojuliensis Pir.,
Himeraelites Douvillei Di-Stef.,
Himeraelites sp. (cfr. *H. frontonis* Par.),
Sphearucaprina sp.,
Trochus (*Ziziphinus*) sp.,
Nerinea forojuliensis Pir.,
Itieria acteonellaeformis Schnarr.,

delle quali, *Tr. Fraasi*, *A. Archiaci*, *Him.* cfr. *frontonis*, *N. forojuliensis* ed *I. acteonellaeformis* sinora non erano state indicate per il Gargano. Queste forme, nel loro insieme, rappresentano il Cenomaniano; la sola *Mon. forojuliensis* passa anche nel Turoniano; tutte poi, ad eccezione dell'*A. Archiaci*, sono state ritrovate nel ricco giacimento dei monti d'Ocre nell'Abruzzo aquilano.

I fossili su indicati non sono i soli raccolti nella nota formazione cenomaniana garganica. In varie escursioni compiute nella primavera scorsa, ho raccolto, nei pressi della *piscina* Ventrella (Carpino), nei calcari bucherellati a *Monopleura forojuliensis*, oltre a numerose orbitoline (*Orb. bulgarica*, *Orb. Paronai*, ecc.), parecchi molluschi, in predominanza gasteropodi, in perfettissimo stato di conservazione. Questi non sono silicizzati, e si trovano esclusivamente là dove il calcare diventa tenero e quasi farinoso. Questi fossili sono caratterizzati dalle piccolissime dimensioni, che solo eccezionalmente sorpassano i cinque millimetri. Debbo fra essi segnalare anche una piccola ammonite liscia, l'unica di sicura provenienza di tutto il Gargano. Ho raccolto pure vari esemplari completi della *Triploporella Fraasi*, che per la loro perfetta conservazione meritano di essere illustrati, e diversi altri fossili (foraminiferi, briozoi, radioli di echinidi, ecc.), tutti di piccole dimensioni.

A destra poi della bassa vallecola d'Orlando, ad est di Carpino, nel calcare farinoso si trovano grossi radioli di un *Cidaris*, molto prossimo al *Cid. Berthelini* Cotteau del Cenomaniano. Infine, al di là di *Piano Canale*, presso la masseria Giuffrida, nei punti ove il calcare diventa tufaceo, insieme con varie *Orbitolina*, ho raccolto anche alcuni piccoli gasteropodi specificamente identici a quelli della piscina Ventrella. In tutta la formazione abbondano corallari, idrozoarî e briozoarî.

*
* *

I calcari ad *orbitolina*, *monopleura*, *himeraelites*, ecc., riposano, come s'è detto, sui calcari marnosi con selce del Neocomiano, che contengono in alcuni punti la *Rhynchonella* (*Peregrinella* Oehlert) *multicarinata* Lamk (= *Terebratella peregrina* L. v. Buch, 1833), segnalata la prima volta dal prof. L. Bucca ([1]).

Nonostante vi sia discordanza fra il Neocomiano ed il Cenomaniano, pur si nota spesso fra i due un parallelismo di strati. Per citare un caso evidente, basti ricordare quello che si osserva lungo il profondo vallone Romondato, tra Carpino ed Ischitella, presso Rocca di Pietra, ove gli strati del Cenomaniano e quelli del Neocomiano pendono entrambi di circa 30° ad ovest. Se si aggiunge poi che i primi strati del Cenomaniano contengono dei letti regolari di selce, che abbonda nel Neocomiano, si ha l'impressione che in quei punti vi sia stata una continuità di sedimentazione. Il che non è, perchè tra le due formazioni esiste in realtà discordanza, per quanto leggera. Così presso Vico, come ho scritto nella mia citata Nota, gli strati neocomiani pendono a N-E di circa 35°, mentre quelli cenomaniani di circa 15° ad E. La presenza poi della breccetta ad *orbitolina* alla base del Cenomaniano sta ad indicare chiaramente la trasgressione. Il fatto è che la formazione neocomiana, come tutte le altre formazioni geologiche del Gargano, sono poco disturbate.

Il trovare poi la selce negli strati inferiori del Cenomaniano, anzi i fossili silicizzati, come avviene nel Neocomiano, vuol dire che il fenomeno della silicizzazione, molto accentuato nel cretaceo inferiore, si estese anche nel noecretacico.

*
* *

Nei dintorni di Vico, Ischitella e Rodi i calcari cenomaniani non formano un deposito continuo, per quanto si presentino in lembi estesi parecchi chilometri. In frammenti più limitati, e come resti di denudazione, s'incontrano frequentemente qua e là sulla formazione marnosa del Neocomiano. I tre paesi di Vico, Ischitella e Rodi sono edificati sui calcari cenomaniani ed il piccolo promontorio di Rodi è pure formato da una rupe di detto calcare. Verso Carpino però il calcare assume un grande sviluppo sia per estensione, sia per potenza, Infatti, l'ultimo sperone detto *le coste di Carpino*, che si

([1]) Recentemente il prof. Parona ha indicato per il Gargano lo *Pterocera* (*Harpagodes*) *Ribeiroi* Choffat del neocomiano superiore (auteriviano) del Portogallo, che fa parte della collezione Costa del Museo di geologia di Napoli. Questo fossile, senza indicazione precisa, come tutti quelli della collezione Costa, con molta probabilità deve provenire dagli strati marnosi a selce (vedi C. F. Parona, *Prospetto delle varie «facies» e loro successioni nei calcari a rudiste dell'Appennino*, in Boll. Soc. Geol. Ital., vol. XXXVII, a. 1918).

diparte da Coppa Tre Confini — così detta perchè sulla sua sommità (m. 713) s'incontrano i confini dei comuni di Vico, Ischitella e Carpino, — è formato quasi interamente dal Neocomiano, sul quale si osserva una rivestitura poco spessa ed interrotta di calcare cenomaniano. Scendendo poi dalle *coste* verso il paese di Carpino, i calcari marnosi scompaiono sotto i calcari ad *orbitolina* e non riappariscono in tutta questa parte del promontorio, se non in lembi ristrettissimi nella regione a nord di Carpino verso il lago di Varano.

I calcari cenomaniani invece formano da soli il monte di Iorio, l'Immersa delle Ripe, il monte di Mezzo; poi per il piano Vergato si estendono al monte di Lauro, al monte Pizzuto e al monte Vernone, scendendo di nuovo verso Carpino a formare il monte isolato di Pastromele, che è circondato quasi interamente dal tufo gialliccio del miocene. I calcari cenomaniani, oltre a formare la cerchia dei monti intorno a Carpino, si sviluppano ininterrottamente verso nord-est, nella parte centrale del promontorio.

La nuova strada provinciale Carpino-Montesantangelo, che attraversa da N-O a S-E il Gargano per una lunghezza di circa 40 chilometri, è tagliata per lunghissimo tratto nei calcari del Cenomaniano. Infatti da principio essa incontra i calcari a corallari e briozoarî delle regioni Coppa e Copparone, poi i calcari ad *Ellipsactinia* di Monte di Mezzo e della regione Iannetta, indi i calcari a struttura oolitica del *piano Vergato*, e continua a svolgersi per tutto il *piano Canale*, ove proprio in contrada Giuffrida i calcari assumono una consistenza tufacea e contengono piccoli gasteropodi ed orbitoline.

*
* *

I calcari dei dintorni di Carpino, come quelli della regione centrale del Gargano sino alla masseria Giuffrida, fin dove ho potuto studiarli sino ad ora, erano riferiti al Giurassico e propriamente al Titonico. Ma la posizione di essi, sempre superiore alle marne con *R. multicarinata* del Neocomiano ed il rinvenimento di fossili indiscutibilmente cenomaniani, ne modificano profondamente l'età. Dopo questa constatazione, una estesa parte dei calcari ritenuti titonici per la presenza delle ellipsactinie, passano dal giurassico al cretaceo. Ciò non ostante, io non mi sento ancora autorizzato ad estendere i risultati delle presenti ricerche ai rimanenti calcari del Gargano, ritenuti già giurassici, per quanto tale riferimento sia stato messo in dubbio dal De Lorenzo e dal De Stefani e negato del tutto dal Cassetti, che considera la formazione neocomiana come il terreno basale del promontorio garganico.

Lo studio dei fossili raccolti in altri punti dell'estesa regione, il quale è già in corso, e le nuove ricerche intraprese, diranno se nella carta geologica del Gargano i terreni giurassici debbano venire del tutto soppressi o circoscritti in limiti meno estesi di quelli loro assegnati dai precedenti rilevatori.

Geologia. — *Cenni descrittivi sulla morfolite di Castiglioncello.* Nota di A. Pelloux, presentata dal Socio A. Issel.

La magnesite del giacimento di Castiglioncello, nei monti livornesi, forma potenti filoni entro alle roccie verdi (serpentine ed eufotide). La miniera, scoperta nel 1913 dal Maggiore Attilio Gotti, è ora esercitata dalla Società « La Magnesite » che recentemente ne ricavava intorno alle 100 tonn. giornaliere, impiegando il minerale sia per la preparazione di mattoni refrattarî, sia per spedirlo grezzo, o calcinato, agli stabilimenti siderurgici ed alle fabbriche di prodotti chimici. Un grandioso stabilimento è annesso alla miniera e ne dista circa un km., trovandosi in riva al mare presso il paese di Castiglioncello [1].

La magnesite è generalmente compatta, di colore bianco o gialliccio, qualche volta più intensamente colorata da idrossido di ferro od annerita da ossido di manganese, il quale ultimo si presenta anche polverulento od in dendriti. Sono frequenti le concrezioni e le forme brecciate della magnesite, dovute ad un rimaneggiamento del minerale, prodotto da acque circolanti. Rari i cristalli di abito lenticolare determinato dalla presenza di un romboedro molto ottuso. Accidentali le tinte rosee dovute a tracce di carbonato di manganese e quelle verdi dipendenti da sali di nichel o da tracce di ossido di cromo. In qualche luogo si osservano miscele di magnesite con silice calcedoniosa o resinite, ma tali impurità non sono frequenti, ciò che costituisce un pregio nella confezione dei refrattarî.

Ho raccolto le morfoliti presso l'affioramento di uno dei filoni che sporgono dalla serpentina al *botro del Massaccio*. Non mi risulta che se ne siano trovate anche nei lavori interni delle miniere, dove la magnesite mi è sembrata generalmente compatta.

Le concrezioni più voluminose misurano cent. 1 e più di diametro e si trovano anche sparse nel terreno presso il filone da cui si distaccarono. La loro superficie esterna è sferoidale anzichè poliedrica, e si presenta come

[1] Sul giacimento di magnesite di Castiglioncello vedansi specialmente: G. D'Achiardi, *Magnesite di Castiglioncello* (M. Livornesi), Atti Soc. tosc. sc. nat. Processi verbali, vol. XXII, n. 5, 16 nov. 1913, Pisa; A. Stella, *I giacimenti italiani di magnesite e la loro utilizzazione*, nel periodico: L'industria chimica, mineraria e metallurgica, anno II, n. 19, pag. 293, Torino, 1915; C. De Castro, *Rapporto sul servizio nel distretto di Firenze*, nella Rivista del servizio minerario nel 1915, pag. 82, Roma, 1917; *Le cave di giobertite di Castiglioncello e Monterufoli*, nel periodico: La miniera italiana, anno I, Roma, 1915, pag. 138.

una buccia sottile, facilmente distaccabile dal nucleo e molto limonitica. Nelle più piccole tale superficie sferoidale è sostituita dall'insieme di 12 facce pentagonali che limitano i singoli pseudocristalli. Questi sono addossati fittamente gli uni contro gli altri, senza che a ciò contribuisca la presenza di un cemento qualsiasi, dimodochè gli aggregati si sgretolano facilmente con la semplice pressione delle dita. Nei campioni formati da individui cementati, il cemento è pure magnesiaco.

Come ho detto, solo negli individui più piccoli è visibile l'abito pentagonododecaedrico. Tali morfoliti misurano al massimo 5 mm. di diametro. Le facce pentagonali sono tutte leggermente concave nella loro parte centrale. Gli angoli, misurati con il goniometro di applicazione, corrispondono a quelli del pentagonododecaedro (210) e, cioè, si aggirano intorno ai 55° per gli angoli (210) : (210) e sono di circa 66° per quelli di (210) con (120).

Il colore di queste morfoliti è bianco gialliccio, generalmente più chiaro nella parte centrale. Sono qualche volta presenti piccole macchie limonitiche e dendriti di manganese. La superficie del minerale, anche ad occhio nudo, appare scabra, e questa scabrosità è dovuta a terminazioni cristalline romboedriche, meglio visibili con un debole ingrandimento, terminazioni che corrispondono a singoli cristalli prismatici da cui è costituita la parte periferica delle morfoliti. Questa struttura è resa evidente immergendo e togliendo rapidamente i pseudocristalli in una soluzione colorante, quindi spezzandoli per osservarne l'interno. Si vede allora che le singole morfoliti sono costituite da una buccia periferica il cui spessore varia da $^1/_2$ mm. ad un millimetro o poco più, e che, più permeabile in causa della sua struttura, rimane tinta dal liquido e da un nucleo che conserva il colore primitivo. La zona periferica è formata dall'insieme di prismetti, o meglio di aghi a contorno indeciso, disposti radialmente rispetto all'intera morfolite, ed è nettamente separata dal nucleo. Gli aghi, osservati alla luce polarizzata, mostrano estinzione parallela al loro allungamento e forte birifrangenza. Nella parte costituente il nucleo, il minerale ha struttura minutamente granosa e cristallina. I singoli grani, osservati al microscopio, non mostrano regolare contorno ed alla luce polarizzata presentano caratteri identici a quelli del minerale che costituisce la buccia. I saggi chimici dimostrano che sia questa, sia il nucleo, sono essenzialmente costituiti da carbonato di magnesio. Però, mentre nel nucleo non si hanno che traccie di ferro, nella buccia la quantità di questo elemento è più ragguardevole. Solo un'analisi quantitativa potrebbe decidere se si tratti soltanto di impurità o piuttosto di miscela isomorfa del carbonato di ferro con quello di magnesio: nel qual caso ciò potrebbe forse, in parte, spiegare la differenza di struttura che si osserva nel nucleo e nella corteccia che lo avvolge.

Non so se simili morfoliti di magnesite siano stati altrove trovati, ma molta analogia mi sembra presentino con dei noduli di aragonite descritti

dal Wada e trovati nelle sorgenti termali di Taira, nel Giappone. In questi però la forma pentagonododecaedrica pare si osservi piuttosto nei noduli di maggior mole che non in quelli più piccoli, mentre a Castiglioncello accade il contrario. Di più non sembra dalla descrizione, che la struttura del nucleo sia diversa da quella dell'involucro, ma sempre fibroso-raggiata. Inoltre non ho notato nelle morfoliti di Castiglioncello la esistenza di un frammento di roccia nel centro dei noduli come si verifica in quelle giapponesi. Altra differenza si ha nel contenuto in ferro, che, nell'aragonite del Giappone, è superiore nel centro che non alla periferia [1].

Anche il giacimento di Castiglioncello, secondo il D'Achiardi, sarebbe dovuto al deposito di acque termali [2].

Biologia vegetale. — *Della supposta partenocarpia del nocciuolo e dei suoi eventuali caratteri: osservazioni ed esperienze.* Nota I di A. Trotter, presentata dal Corrisp. P. A. Saccardo.

Da varî anni, per interessamento della Direzione generale dell'Agricoltura, mi sto occupando di un fenomeno patologico di grande pregiudizio ai nocciuoli coltivati nella Campania, e che può essere sinteticamente definito come una cascola prematura di frutti più o meno sviluppati e subapireni (fig. 1). Infatti, nella grande maggioranza delle nocciuole cadute, non può ancora parlarsi dell'esistenza di un vero seme, bensì o di un ovulo avviato a trasformarsi in seme, oppure di un seme piccolissimo, contenente per lo più un minuscolo, imperfetto embrione, più o meno atrofico, ridotto a due sottili lamine cellulari (fig. 5); talora anzi arrestatosi nel suo sviluppo prima ancora si sieno differenziate le due bozze cotiledonari. Perciò il tegumento del seme, che in molti casi può indipendentemente progredire alquanto nel suo accrescimento, morto l'embrione, si affloscia, e le pareti finiscono per accollarsi come se il tegumento stesso fosse un sacco privo di contenuto.

[1] Vedi: T. Wada. *Minerals of Japan*. Tokyo, 1904, pag. 65.

[2] Circa l'origine della magnesite G D'Achiardi (op. cit.) così si esprime:
« La genesi di questo giacimento è, con tutta probabilità, da ricercarsi nell'azione « di acque verosimilmente termali, carboniche, che si fanno strada attraverso alle rocce « verdi, presso il contatto con l'alberese, alterandole e dando luogo alla formazione « di carbonati e di silice calcedoniosa od opalina. La presenza di acque carboniche agli « Occhibolleri, vicinissimo cioè alla località ora descritta, viene in appoggio all'ipotesi « fatta ».

Tale fenomeno assume anche grande importanza pratica [1], poichè in talune annate riduce una produzione promettente a proporzioni meschinis-

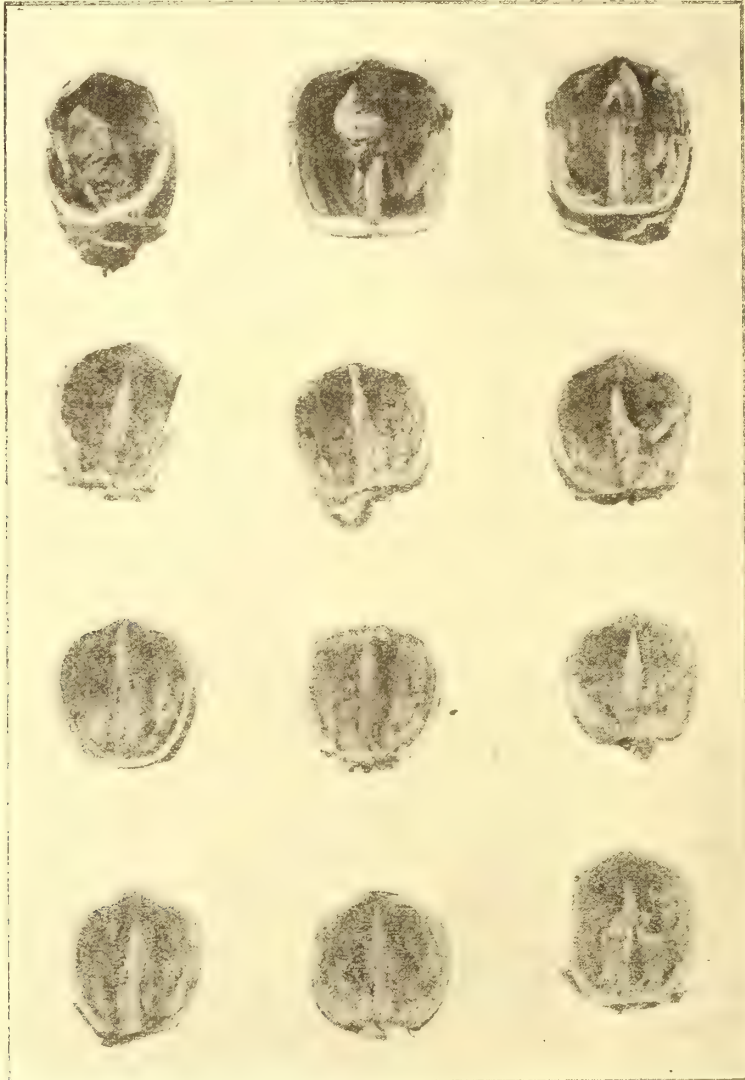



Fig. 1. — Nocciuole, al momento del raccolto, vuote o semivuote, con semi atrofici o più spesso arrestatisi nella fase ovulare e con il solo funicolo più o meno sviluppato (grand. nat.).

sime, e le nocciuole, verso la fine di luglio o ai primi di agosto, cadono a terra immature ad ogni più piccola scossa, come una fitta gragnuola.

[1] L'importanza pratica risulta da ciò, che nella Campania esistono circa 8000 ettari dedicati alla coltura più o meno specializzata del nocciuolo, con un prodotto medio annuo di nocciuole secche il quale può ragguagliarsi intorno ai 60000 quintali, e che ai prezzi attuali può rappresentare un valore di circa 20 milioni di lire.

I patologi, si sono occupati di questo fenomeno in epoca relativamente recente, quasi fosse stata una malattia nuova (COMES 1885, BRIZI 1897, CASALI 1898, TROTTER 1904, PETRI 1913); però, come sarà da me dimostrato in un lavoro più ampio, riguardante il nocciuolo della Campania, essa è assai antica e può ritenersi anzi vi esista da epoca immemorabile.

Dovendosi escludere un'azione specifica, diretta od indiretta, di parassiti, io avevo avanzata sin dal 1904 l'ipotesi [1] (pag. 55, Nota I) che si fosse potuto trattare di fenomeno di partenocarpia. Allora non erano ancora apparsi i lavori di EWERT, di MUELLER-THURGAU, di NEGRI, di SOLACOLU, di ZACHARIAS e di altri, destinati ad illustrare tale ordine di fenomeni, di una grande importanza teorica e pratica, od a richiamare su di essi la nostra attenzione; e perciò anche la mia ipotesi assumeva, già da allora, un particolare valore.

Nel lavoro dell' EWERT [2] ed anche in quello del NEGRI [3], che è la più recente compilazione su tale soggetto, troviamo anzi che il nocciuolo è segnalato tra le piante partenocarpiche. Non vi sarebbe perciò che da prendere atto di tale affermazione, e dare di conseguenza come spiegata la cascola; soffermandoci solo a discutere qualche carattere accessorio ed intimo del fenomeno partenocarpico o ad indagare le cause, facilmente reperibili in fatti meteorici, culturali, parassitarî ecc., concorrenti a turbare l' impollinazione della pianta.

Effettivamente però, le conclusioni di EWERT e di NEGRI non sono desunte nè dalla mia ipotesi del 1904, nè da loro osservazioni od esperienze personali. Esse derivano invece da notizie antiche, contenute nella ben nota opera di GAERTNER (1844), il quale con ciò appare come il primo assertore della partenocarpia del nocciuolo [4]. Ma da un attento esame dell'opera di GAERTNER, risulta però che pur collocando questi il nocciuolo tra le piante partenocarpiche (*Fruchtungsvermögen der Pflanzen*: pp. 443, 558, 562), la constatazione del fenomeno non è sua, ma è tratta da un brevissimo articolo di J. A. WEINMANN, che GAERTNER cita anzi erroneamente, essendo stampato in « Flora » nell'anno 1822 (*Correspondenz*, pp. 763-764) e non nel 1827. Vediamo quali sieno le notizie in esso contenute.

Il WEINMANN afferma di avere osservata una pianta di nocciuolo proterandra, con fiori ♀ sviluppatisi dopo la scomparsa completa di tutti gli

[1] TROTTER A., *Osservazioni e ricerche sulla « malsania » del nocciuolo in provincia di Avellino e sui mezzi atti a combatterla.* « Redia », vol. 2°, fasc. I, 1904, pagine 37-67, con figure.

[2] EWERT R., *Blütenbiologie und Tragbarkeit unserer Obstbäume.* Landw. Jahrb., Bd. 35, 1906, pp. 259-287.

[3] NEGRI G., *I frutti apireni.* Ann. R. Acc. di Agr. Torino, vol. 55, 1912, 67 pag..

[4] GAERTNER C. F., *Versuche und Beobachtungen über die Befruchtungsorgane der vollkommeneren Gewächse und über die natürliche und künstliche Befruchtung durch den eigenen Pollen.* Stuttgart, 1844, X-644 pag. (pp. 558, 562).

amenti ♂, ma di aver tuttavia potuto raccogliere nell'estate 65 nocciuole; le quali poi, messe nel terreno, non germinarono, perchè, rotte, presentavano semi incompletamente sviluppati ed ammuffiti. Da queste semplici, anzi rudimentali osservazioni, ha avuto origine l'affermazione, tramandata alle opere recenti, che il nocciuolo sia partenocarpico!

Non vi è invece chi non veda come non sia possibile, sulle osservazioni ora ricordate, fondare alcuna solida conclusione. Anche a prescindere dal dubbio che le nocciuole di Weinmann siano da considerare come frutti veramente subapireni, paragonabili a quelli che caratterizzano la cascola della Campania [1], si presentano alla nostra mente anche altre evidenti e necessarie riserve. Causa la non contemporanea schiusa dei fiori nel nocciuolo, ed il lungo periodo durante il quale questa può prolungarsi (talora per lo spazio di due mesi), non è improbabile possa essergli sfuggita una eventuale contemporanea esistenza degli ultimi fiori ♂ in antesi e dei più precoci ♀. Ma circostanza anche più importante, il risultato delle sue osservazioni ci lascia anche sospettare, poichè il Weinmann non ne parla, che nella medesima località vi fosse stata per avventura qualche altra pianta, la quale (trattandosi di specie ad impollinazione anemofila), avesse potuto fornire il polline all'individuo proterandro caduto sotto la sua osservazione.

In tali condizioni di fatto, appare certamente come assai poco fondata l'affermazione della partenocarpia del nocciuolo, mentre l'indagine relativa e le conclusioni sono di gran peso in rapporto alla cascola patologica del nocciuolo. Qualora poi si volesse tener conto delle osservazioni di Weinmann, divulgate più tardi da Gaertner nel modo già ricordato, essendosi i frutti sviluppati senza impollinazione, o più precisamente senza uno stimolo vegetativo del polline, si tratterebbe di quella forma di partenocarpia che Winkler [2] ha distinta col nome di vegetativa (autonoma di Fitting 1909, endodinama di Baccarini 1912).

Ma, ripeto, le conclusioni di Weinmann e di Gaertner non sono accettabili, per cui mi apparve la necessità di dover stabilire con esperimenti, per quanto possibile rigorosi, se nel nocciuolo esista o meno partenocarpia, ed in relazione a ciò, se le nocciuole affette da cascola sieno o non sieno da attribuire a fenomeno partenocarpico. È quanto vedremo in una prossima Nota.

(1) Egli scrive: « Dieser [cioè le nocciuole raccolte] kam, aber keine jungen Pflanzen meiner ausgesäeten *Corylus Avellana*. Ich untersuchte sie genau, und fand die Nüsse fast alle wieder; allein die eigentlichen Kerne waren alle sammt und sonders verschiemmelt. Ob nun die unvolkommene Ausbildung der Kerne aus Mangel an vollkommener Befruchtung an dem Nichtkeimen Schuld war, wage ich freylich nicht zu erörten ».

(2) Winkler H., *Parthenogenesis und Apogamie im Pflanzenreiche*. Jena 1908, Progressus Rei Botanicae, II, 3, pp. 293-454, con 14 figure.

Fisiologia. — *Contributo alla conoscenza degli enzimi.* III: *L'invertasi ed altri fermenti dell'orzo germogliato* (¹). Nota di D. Maestrini, presentata dal Corrisp. S. Baglioni.

Invertasi. — L'invertasi dell'orzo germogliato fu dimostrata da Kühnemann (²), e confermata poi da H. T. Brow u. I. Heron (³). Più recentemente E, Körber (⁴) ne ha negata l'esistenza, mentre H. I. I. Vandevelde (⁵) l'ha di nuovo affermata.

Noi, riprendendone lo studio, abbiamo potuto nell'emulsione e nel filtrato dell'estratto, dimostrare costantemente un fermento, capace d'invertire il saccarosio. Abbiamo anche determinato, coi metodi già innanzi ricordati, la sua temperatura ottima di azione e quella di distruzione, nonchè indagata l'influenza degli acidi minerali e degli alcali.

Dal complesso delle ricerche siamo in grado di concludere:

1) nell'orzo germogliato ed essiccato al disotto di 40° C. esiste un fermento, che inverte il saccarosio;

2) questa invertasi è solubile nell'acqua distillata acidulata (al titolo di gr. mole 0,03 °/₀₀ con acido acetico); difatti è presente non soltanto nell'emulsione, ma anche nel filtrato dell'estratto;

3) per ottenere un liquido attivo, l'estrazione deve durare *almeno 6 ore* e possibilmente alla temperatura di *30°-35°* C.;

4) l'idrato di potassio al titolo di gr. mole 0,03 °/₀₀, distrugge, dopo 48 ore, l'attività dell'invertasi del malto;

5) l'acido cloridrico al titolo di gr. mole 0,03 °/₀₀ agisce sull'invertani come l'acido acetico a titolo equivalente;

6) la temperatura ottima di azione è a circa 50° C.; quella di distruzione è a 55° C.

Maltasi. — Nelle piante la maltasi fu primieramente segnalata da L. Cusenier (⁶) che potè metterla in evidenza, facendo macerare farina di

(¹) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Roma, diretto dal prof. S. Baglioni.

(²) Kühnemann, citato da H. T. Brow u. I. Heron.

(³) H. T. Brow. u. I. Heron, *Beiträge zur Geschichte der Stärke und der Verwandungen derselben*, Liebig's Annalen, *199*, 165-253, und I. Maly *10*, 68-73, an. 1881.

(⁴) E. Körber, *Ueber das vorkomen eines glycasichen und die Abwesenheit eines Saccarose invertirenden Fermentes im malze*, Zeitschr. f. d. ges. Brauw., *18*, 325-327, 334-336; u. I. Maly *25*, 597; 1896.

(⁵) I. I. Vandervelde, Biochem. Zeitschr. *28*, 133-134, 1910.

(⁶) Cusenier, Monit. scientif., 1886, pag. 718.

mais alla temperatura di 50° C.; M. V. Beyerinck (1), nello stesso anno, indicò il modo di preparazione. Secondo I. Effront (2) questo fermento è presente nella maggior parte dei cereali, e C. Oppenheimer (3) lo ammetto pure nel malto. Z. Wierzchowski (4) invece, che più recentemente ha fatto uno studio molto accurato intorno alla maltasi, ha potuto dimostrare che essa, mentre esiste nel mais, è assente nell'estratto di malto.

Il risultato segnalato da quest'ultimo ricercatore ha trovato conferma nelle nostre esperienze.

Lattasi. — Nei semi di molte fanerogame (prunus, sorbus, cerasus, sinapis ecc.), ed anche in varie crittogame (pennicilium, aspergillus ecc.), fu rinvenuto un fermento capace di scindere il lattosio in galattosio e glicosio. A questo studio si dedicarono, fra gli altri, Brachin (5) e Nägeli (6).

Dalla letteratura però non appare che alcuno abbia ricercato questo fermento nell'orzo germogliato. Valendoci quindi dei metodi altrove descritti, abbiamo voluto vedere, se il filtrato dell'estratto di malto o l'emulsione fossero capaci di scindere il lattosio. *Le nostre ricerche furono numerose, ma con risultato costantemente negativo.*

Coagulasi. — Molti si occuparono del *labfermento* e lo trovarono assai diffuso nel regno vegetale (7). Alla sua presenza nel *malto* accennò per primo Francesco Weis (8), in un lavoro, in cui più specialmente si occupò del potere proteolitico. Più recentemente M. Soave (9) affermò pure che il succo dei semi germinanti di orzo, ottenuto mediante la pressa di Ed. Buchner, coagula il latte.

Nel corso delle nostre esperienze ci siamo occupati anche di questo fermento, ed abbiamo ripetutamente visto che il latte è realmente coagulato tanto dall'emulsione quanto dall'estratto filtrato; ma si ha pure identica coagulazione con soluzione di acidi organici (acido acetico) od inorganici (acido cloridrico o solforico) aventi un titolo eguale a quello dei liquidi usati.

Si può quindi pensare che la coagulazione del latte piuttosto che dipendere da azione enzimatica, sia l'effetto dell'acidità degli estratti o dei succhi usati, i quali, anche se non furono preparati con soluzioni acide, in breve tempo, dopo la loro preparazione, presentano reazione acida al tornasole.

(1) M. W. Beyerinck, Centralblatt f. Bact; II Abth., 2 Iohrg., 1898.

(2) I. Effront, *Les enzymes et leurs applications*, Paris, pag. 244, an. 1899.

(3) C. Oppenheimer: *Die Fermente und ihre Wirkungen*, II, 32, Leipizig 1910.

(4) Wierzchowski: Bioch. Zeit. 56, S. 209, e Liebig's Annaten, 212-324; 1913.

(5) Brachin, I. de pharm. et de chim., *20*, 195-300; e Oppenheimer, *Die Fermente und ihre Wirkungen*, II, 44. an. 1910.

(6) Nägeli, Die niederen Pilze, S 12, an. 1882, e C. Oppnheimer, loc. cit.

(7) C. Oppenheimer, loc. cit., II, 314-315.

(8) Fr. Weis, Zeitschr. Phys. Chem. *31*, 79-97; 1900.

(9) M. Soave, Annali R. Accad. Agricol. Torino, XLVIII, 1906.

Una conferma di questo modo di vedere si ha nel fatto che i nostri liquidi, anche dopo essere stati bolliti, davano con il latte identico coagulo.

Ossidasi. — Pochi sono coloro che si occuparono dei fermenti ossidanti del *malto.* Fra questi mi limito a nominare H. von Lear [1], che parla di una *catalasi.*

Noi abbiamo rivolto l'attenzione anche a questi fermenti, ed abbiamo potuto constatare l'esistenza di un *catalasi* e di una *ossidasi.* La prima potè dimostrarsi, sia col metodo Koning [2] sia con quello di Lobeck [3]: la seconda mediante la prova alla tintura alcoolica di guaiaco.

***

Dal complesso delle ricerche, sinora eseguite, e brevemente riassunte in questa e nelle Note precedenti, si può dunque concludere che nell'orzo germogliato si trovano presenti: *amilasi, proteasi, lipasi, invertasi, catalasi* ed *ossidasi;* mentre sono assenti: *maltasi, lattasi* e il *labfermento.*

Biologia. — *Correlazioni e differenziazioni* (*sul « Triton cristatus »*). Nota IV di GIULIO COTRONEI [4], presentata dal Socio BATTISTA GRASSI.

Nel corso delle mie ricerche sulle correlazioni e differenziazioni [5], ho voluto estendere agli Urodeli lo stesso metodo d'indagine adoperato da me per gli Anuri. Avendo precedentemente osservato come i migliori risultati si ottenevano, fra molti sali, con il cloruro di litio, mi sono servito unicamente di esso nei miei esperimenti sulle uova in sviluppo di *Triton cristatus.*

La presente Nota si riferisce a un esperimento risultato positivo dopo varî tentativi andati a male. L'esperimento rimonta al 10 maggio 1916. Trattai molte uova di tritone dai varî stadii di segmentazioni fino alle varie fasi della gastrulazione con una soluzione $\frac{m}{10}$ di cloruro di litio: la durata con tale trattamento fu per 19 ore. Quasi tutte le uova finirono col soccombere; poche continuarono nello sviluppo e raggiunsero lo stadio lar-

[1] H. Von Laer, Bull. d. Soc. chimiq. de Belgique, *19*, 337-336; und I. Maly 35, 874.

[2] C. I. Koning, Biol. u. Bioch. Studien über Milch. Leipzig, 1906 u. 1908.

[3] Lobeck, Bioch. Zeitschr. Bd. XXX, S. 334, 1911,

[4] Lavoro eseguito nell'Istituto d'anatomia comparata della R. Università di Roma.

[5] Cotronei Giulio, *Correlazioni e differenziazioni.* Nota I Rendiconti, R. Accademia dei Lincei, vol. XVIV, serie 5ª, 1° sem., fasc. 12, 1915 — Nota II, Rend. R. Accademia Lincei, vol. XXIV, serie 5ª, 2° sem., fasc. 6, 1915. — Nota III, Rend. Accademia Lincei, vol. XXVIII, serie 5ª, 2° sem., fasc. 5 e 6, 1919.

vale. Di queste larve, due presentavano lievi modificazioni che non potetti fare oggetto di studio per la perdita del materiale: una sola larva, che presentava notevoli malformazioni, fu fissata in liquido di Zenker il 28 maggio, per farne oggetto di osservazioni microscopiche. Non curai più di ripetere gli esperimenti con il materiale indicato, perchè per il momento mi bastava avere ottenuto la conferma dei risultati che avevo raggiunto e che tuttavia minuziosamente analizzavo nella *Rana esculenta* e nel *Bufo vulgaris*.

Con osservazioni fatte *in toto* con il microscopio binoculare si riscontrava che le modificazioni apportate dall'azione sperimentale erano nella regione cefalica; non esisteva apertura boccale; nella regione olfattoria esistevano evidenti riduzioni per l'assenza delle due narici laterali. Gli occhi si vedeva che si erano spostati medialmente e per trasparenza si riusciva a intravedere che i due occhi dovevano essersi fusi sulla linea mediana. In complesso la regione cefalica si presentava ridotta rispetto alla larva normale; per il resto, nulla di notevole.

All'esame microscopico si convalida e spiega quanto si rilevava sommariamente con l'esame *in toto*. È opportuno innanzi tutto fissare l'attenzione sulla condizione presentata dal neurasse, che ci appare nella parte anteriore in stato di arretrato sviluppo: infatti si riscontra che la regione telencefalo-diencefalica è poco sviluppata: si nota un semplice accenno alla formazione degli emisferi cerebrali.

Osservando la condizione presentata dai ventricoli, potremo desumere lo stato di sviluppo raggiunto dal neurasse.

Si riscontra che anteriormente il ventricolo comune telencefalico, a destra e a sinistra presenta una sottile e breve insenatura che si può considerare come un accenno del corno anteriore del ventricolo laterale (seguendo la terminologia usata dallo Studnicka). Posteriormente tanto a destra quanto a sinistra, si nota un'altra sottile insenatura che considero come un accenno del corno posteriore [1] del ventricolo laterale. In realtà manca nel reperto in esame l'ulteriore sviluppo dei ventricoli laterali, che è poi l'indice dello sviluppo degli emisferi cerebrali; ne consegue, pertanto, che rispetto ai controlli la regione anteriore del neurasse occupa un volume minore, onde si ottengono riduzioni nelle condizioni spaziali per la morfogenesi di quelle parti che le nostre ricerche sperimentali convalidano essere s o s t e n u t e e quindi d i r e t t e nel loro sviluppo dallo sviluppo del neurasse.

A conferma di quanto precede e analogamente a quanto abbiamo riscontrato negli Anuri, si nota, all'esame microscopico del nostro esemplare di Tritone, che tutti gli organi situati nella regione precordale hanno risentito l'azione sperimentale del cloruro di litio: il territorio olfattorio vien limi-

[1] Non è superfluo avvertire che, pure usando tale terminologia, non intendo per nulla entrare nelle complesse questioni di omologie con ciò che si denomina ugualmente nelle forme superiori.

tato ad un unico ridotto e mediano organo olfattorio, che giunge ad aderire posteriormente al cervello anteriore [1].

Manca ogni traccia di apertura boccale, che sta a significare il mancato infossamento del seno boccale; è sviluppata invece la regione branchiale.

Gli occhi hanno raggiunto un notevole grado di differenziamento. Scorrendo le sezioni, per un buon tratto i due occhi appaioni come divisi; ma poi si nota che essi si fondono medianamente e ventralmente al cervello: si è formata durante lo sviluppo, a destra e a sinistra, la cavità del calice ottico e si nota a destra e a sinistra la presenza dei due cristallini. Nella regione di fusione dei due occhi si nota una sottile zona di tessuto nervoso, che sulle sezioni si segue fino al cervello.

Gli occhi, così fusi, si vengono a trovare anteriormente alla coda dorsale o, meglio, al rivestimento cartilagineo della corda, a livello della quale si arrestano le malformazioni o fusioni. Tutti gli organi che sono in rapporto più o meno diretto con la corda si sono sviluppati e accresciuti secondo la direzione di normale accrescimento: gli organi uditivi sono quindi nella posizione normale.

In conclusione, anche per gli Urodeli possono valere le stesse considerazioni fatte per gli Anuri: in un determinato momento della morfogenesi vi sono due organi, la corda dorsale e la parte precordale del neurasse, che nello stesso tempo che servono di sostegno, dirigono, sviluppandosi, la morfogenesi degli organi da essi sostenuti; quindi se, per un'azione paralizzante esercitata dal sale di litio sullo sviluppo del neurasse, questo in un dato momento subisce un arresto di sviluppo, mentre la corda dorsale si sviluppa normalmente, ne consegue che gli organi che si vanno sviluppando nel territorio sostenuto dal neurasse precordale lo possono fare soltanto nel modo consentito dalle condizioni spaziali nelle nuove condizioni embrionali.

[1] È importante notare la relazione che passa tra la riduzione del territorio olfattorio e l'arresto di sviluppo cerebrale (nel modo riferito) quando si pensi che il cervello degli anfibî è del *tipo olfattorio.*

Nota aggiunta. — In un recentissimo « Abstract Cards » del Bibliographic Service of the Wistar Institute, giunto in questi giorni, trovo un breve riassunto di un lavoro di A. Bellamy, pubblicato in Biological Bulletin, novembre 1919, che non è ancora pervenuto in Laboratorio: l'autore ha studiato la reazione differenziale che presentano le uova e gli embrioni di Rana a vari agenti nocivi, fra cui il Cloruro di litio, venendo alla conclusione che in generale quelle regioni che sono normalmente più attive nella crescita e nello sviluppo sono più suscettibili: i processi metabolici sono, secondo l'autore, primitivamente più attivi al polo apicale.

R. P.

ERRATA-CORRIGE

A pag. 175, riga 24, aggiungasi:

$$-\xi\left\{\left[\varepsilon(\alpha\xi)+\varepsilon\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\right]\frac{d}{d\xi}\left[\varepsilon(\alpha\xi)+\varepsilon\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\right]+\frac{d}{d\xi}\left[\varepsilon(\alpha\xi)\,\varepsilon\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\right]+\varepsilon(\alpha\xi)\,\varepsilon\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\frac{d}{d\xi}\left[\varepsilon(\alpha\xi)+\varepsilon\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\right]\right\}$$

A pag. 177, riga 18, invece di μ^3 leggasi μ^2.

" " " " " " $\sigma = 2$ " $\sigma = 1$.

" " " 19 " " $h = 3$ " $h = 2$.

" " " 20 " " *terzo* " *secondo*.

" " " " " " μ^3 " μ^2.

" " " 24 " " $2(\alpha_1 + \alpha_1^{-1})(\xi - \xi^{-1} + \xi^3 - \xi^{-3})$ leggasi $\{2 + (\alpha_1 + \alpha_1^{-1})^2\}\{\xi^2 - \xi^{-2}\}$.

" " " 25 " " $s \mp 3$ leggasi $s \mp 2$.

" " " 27 " " $\alpha_2 = \frac{2k}{k^2 - 1}$ leggasi $\alpha_2 = 0$.

" " " 29 " " $\alpha_{23} = \frac{k^2 - 1}{4}$ leggasi $\alpha_{22} = \frac{3k^2 - 1}{2}$.

" 178, " 5 " " $\frac{k^2 - 1}{4}\mu^3(\xi^3 + \xi^{-3})$ leggasi $\frac{2k^2 - 1}{2}\mu^2(\xi^2 + \xi^{-2})$.

INDICE DEL VOLUME XXVIII, SERIE 5ª. — RENDICONTI

1919 — 2º SEMESTRE.

INDICE PER AUTORI

A

B

C

D

E

F

G

H

I

L

M

P

V

INDICE PER MATERIE

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Seduta del 21 dicembre 1919.

E. Mancini *Segretario d'ufficio responsabile.*

(*) Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie*.